Лекція №12. Границя числової послідовності

1. Поняття числової послідовності та її границі

2. Загальні властивості збіжних послідовностей

3. Нескінченно мала величина та її властивості

4. Нескінченно велика величина. Зв'язок між нескінченно великою і нескінченно малою величинами

5. Граничний перехід при арифметичних операціях

6. Теореми, які полегшують знаходження границь послідовностей

7. Число е

1. Поняття числової послідовності та її границі

Означення. Числова функція $y = f(n)$, область визначення якої є множина натурального ряду чисел, називається *числовою послідовністю*, або просто послідовністю, і позначається $y = x_n$, надалі писатимемо $x_n = f(n),\ n \in N.$

Значення $x_1 = f(1),\ x_2 = f(2),\ \ldots,\ x_n = f(n),\ \ldots$ називаються *членами послідовності*. Послідовність вважається заданою, якщо задано *n*-й член послідовності.

Приклад. Записати три перші члени послідовності $x_n = \dfrac{2n-1}{2^n}$. Маємо $x_1 = \dfrac{1}{2},\ \ x_2 = \dfrac{3}{2^2},\ \ x_3 = \dfrac{5}{2^3}.$

Приклад. За заданими трьома першими членами послідовності $x_1 = 1,\ \ x_2 = -\dfrac{3}{5\sqrt{2}},\ \ x_3 = \dfrac{5}{5^2\sqrt{3}}$ знайти формулу *n*-го члена.

Задача розв'язується методом добору з наступною перевіркою $x_n = \dfrac{(-1)^{n-1}(2n-1)}{5^{n-1}\sqrt{n}}$.

Означення. Число *a* називається *границею послідовності* x_n, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$, яке б мале воно не було, існує номер *N* такий, що для всіх номерів $n > N$ виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$.

Позначення $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ або $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$.

Для стислого запису означення границі використаємо квантори: $\forall$ — для будь-якого, будь-який; $\exists$ — існує, знайдеться; $:=$ дорівнює за означенням, означає. Тоді означення границі послідовності за допомогою цих символів запишеться так:

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n = a\right) := \left((\forall\varepsilon > 0,\ \ \exists N,\ \ n > N) \Rightarrow \left(|x_n - a| < \varepsilon\right)\right).$$

Розглянемо геометричну інтерпретацію границі послідовності. На числовій осі побудуємо ε-окіл числа *a*, тобто інтервал (*a* − ε; *a* + ε), і покажемо, як розміщуватимуться точки, які відповідають членам послідовності $x_n \to a$, при $n \to \infty$ (рис. 1).

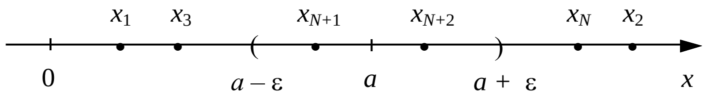

Рис. 1

Означення. Число a називається *границею послідовності* x_n, якщо для будь-якого ε-околу точки a існує номер N такий, що, починаючи з номерів $n > N$, усі члени послідовності перебувають в ε-околі точки a (див. рис. 1).

Означення. Послідовність називається *збіжною*, якщо вона має границю (скінченну). Послідовність, яка не має границі, називається *розбіжною*.

Приклад. Довести за означенням, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Зауважимо, що n-й член послідовності $x_n = \frac{1}{n}$; сама послідовність така: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$. Для доведення потрібно за заданим $\varepsilon > 0$ знайти номер послідовності N, такий, що при всіх номерах $n > N$ виконуватиметься нерівність $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$. Розв'яжемо останню нерівність відносно n:

$$\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Виберемо* $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$. Тоді при $n > N$ нерівність $n > \frac{1}{\varepsilon}$ виконується, а отже, виконується і нерівність $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$, чим доведено, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Отже, для доведення за означенням певної границі послідовності досить побудувати функціональну залежність N від числа ε, тобто знайти функцію N(ε). У розглянутому прикладі функція $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, і за заданим будь-яким $\varepsilon > 0$ завжди можна знайти відповідний номер N; наприклад при $\varepsilon_1 = 0{,}001$, $N_1 = \left[\frac{1}{0{,}001}\right] = 1000$; при $n > N_1 = 1000$ нерівність $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon_1 = 0{,}001$ виконується.

2. Загальні властивості збіжних послідовностей

***Теорема 1*. (Єдиність границі послідовності). Якщо послідовність має границю, то вона єдина.**

***Теорема 2*. (Необхідна умова збіжності послідовності). Якщо послідовність збіжна, то вона обмежена.**

***Теорема 3*. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ і $a < l \, (a > m)$, то існує такий номер N, що при всіх $n > N$ виконується нерівність $x_n < l \, (x_n > m)$.**

---

* Символом $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ позначено цілу частину числа $\frac{1}{\varepsilon}$.

Приклад. Послідовність $x_n = \frac{n+4}{n}$ у розгорнутому вигляді така: $\frac{5}{1}, \frac{6}{2}, \frac{7}{3}, \frac{8}{4}, \frac{9}{5}, \ldots, \frac{n+4}{n}, \ldots$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+4}{n} = 1 < 2 = l$. Для номерів $n > 4$ усі члени послідовності $\frac{9}{5}, \frac{10}{6}, \frac{11}{7}, \ldots$ будуть менші за 2.

***Теорема 4*. Границя сталої величини дорівнює сталій, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$, $c = \mathrm{const}$**

3. Нескінченно мала величина та її властивості

Означення. Послідовність α_n називається *нескінченно малою величиною* (*н. м. в.*), якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$.

Приклад. $\alpha_n = \frac{1}{n}$ — н.м.в., бо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

***Теорема 1*. Сума двох н.м.в. є н. м. в.**

Наслідок. Алгебраїчна сума скінченної кількості н.м.в. є н.м.в.

***Теорема 2*. Добуток обмеженої величини на н.м.в. є н.м.в.**

Приклад. Обчислити $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}$. Послідовність $\frac{\sin n}{n}$ — н.м.в., бо є добутком обмеженої величини $\sin n\left(|\sin n| \le 1\right)$ і н.м.в. $\frac{1}{n}$.

Таким чином, за теоремою 2 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n} = 0$.

***Теорема 3*. Добуток двох н.м.в. є н.м.в.**

Наслідок. Добуток скінченної кількості н.м.в. є н.м.в.

***Теорема 4*. Для існування границі *a* послідовності x_n необхідно і достатньо, щоб послідовність $\alpha_n = x_n - a$ була н.м.в.**

Наслідок. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то $x_n = a + a_n$, де α_n — н.м.в.

4. Нескінченно велика величина. Зв’язок між нескінченно великою і нескінченно малою величинами

Означення. Послідовність x_n називається *нескінченно великою величиною* (н.в.в.), якщо для будь-якого числа $0 < M < +\infty$, яке б велике воно не було, існує номер *N*, такий, що при всіх $n > N$ виконується нерівність $|x_n| > M$.

Якщо члени н.в.в., починаючи з деякого номера, всі додатні, то позначають $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$; якщо від’ємні, то — $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, а якщо різних знаків, то — $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Наприклад:

1) $x_n = \sqrt{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n} = +\infty$;

2) $x_n = -n^2, \ \lim\limits_{n\to\infty}\left(-n^2\right) = -\infty;$

3) $x_n = (-1)^n n, \ \lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n n = \infty.$

Аналітичною мовою означення н.в.в. виглядає так:

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n = \infty\right) := \left(\left(\forall M > O, \ \exists N, \ n > N\right) \Rightarrow \left(\left|x_n\right| > M\right)\right).$$

За своїм означенням, н.в.в. — необмежена, але не кожна необмежена величина є н.в.в., наприклад послідовність 1, 0, 3, 0, 5, 0, ... з членом $x_n = \frac{1}{2}\left(n + (-1)^{n+1} n\right)$ — величина необмежена, але н.в.в. не буде. Справді, не *всі* члени цієї послідовності, починаючи з деякого номера, будуть як завгодно великими.

***Теорема*. Зв'язок між н.в.в. і н.м.в.**

1. Якщо α_n — н.м.в. і $\alpha_n \neq 0$, то обернена до неї послідовність $y_n = \frac{1}{\alpha_n}$ буде н.в.в., і навпаки.

2. Якщо y_n — н.в.в., то обернена до неї $\alpha_n = \frac{1}{y_n}$ — н.м.в.

5. Граничний перехід при арифметичних операціях

***Теорема*. Якщо існують границі $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то:**

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} c y_n = c \lim\limits_{n\to\infty} y_n;$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$ **при** $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0.$

За допомогою теореми можна виконувати граничний перехід при арифметичних операціях з послідовностями, але тільки в тих випадках, коли послідовності збіжні.

Приклад.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 2 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = \frac{1-0}{2+0} = \frac{1}{2}.$$

На практиці такі докладні записи граничного переходу виконують рідко; як правило, граничний перехід при арифметичних операціях виконується усно.

Якщо умови теореми порушуються, то вираз під знаком границі спочатку перетворюють таким чином, щоб арифметичні дії виконувалися зі збіжними послідовностями, а потім виконують граничний перехід.

Приклад.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_{k-1} n + a_k}{b_0 n^m + b_1 n^{m-1} + \ldots + b_{m-1} n + b_m} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k\left(a_0+\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n^2}+\ldots+\frac{a_k}{n^k}\right)}{n^m\left(b_0+\frac{b_1}{n}+\frac{b_2}{n^2}+\ldots+\frac{b_m}{n^m}\right)}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}, & \text{якщо } k=m;\\ \infty, & \text{якщо } k>m;\\ 0, & \text{якщо } k<m.\end{cases}$$

5. *Теореми, які полегшують знаходження границь послідовностей*

***Теорема 1.* (Граничний перехід у нерівності).**

Якщо для будь-якого n виконується нерівність $x_n \le y_n$ і x_n, y_n — збіжні, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

***Теорема 2.* (Про границю затисненої послідовності). Якщо для будь-якого n $x_n \le y_n \le z_n$ і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.**

Приклад. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=1$, бо $1<\sqrt{1+\frac{1}{n}}<1+\frac{1}{n}$, а $\lim\limits_{n\to\infty}1=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$.

***Теорема 3.* (Вейєрштрасса). Про границю монотонної й обмеженої послідовності:**

1) якщо монотонно зростаюча послідовність обмежена зверху, то вона збіжна;

2) якщо монотонно спадна послідовність обмежена знизу, то вона збіжна.

Приклад. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ при $|q|<1$. При $q=0$ доведення очевидне. Нехай $0<q<1$, тоді послідовність $x_n = q^n$ — монотонно спадна (див. рис. 3.8) і обмежена знизу $\left(q^n>0\right)$. Отже, за теоремою Вейєрштрасса послідовність $x_n=q^n$ має границю, яку позначимо так: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = a$. Послідовність $y_n = q^{n-1}$, за винятком першого члена, збігається з послідовністю $x_n = q^n$, отже, $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n-1} = a$. Звідси випливає, що $a=\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(q\cdot q^{n-1}\right)=q\cdot a$, тобто $a=qa$ або $a(1-q)=0$, але $q\ne 1$, отже, $a=\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. Нехай тепер $-1<q<0$.

Розглянемо

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \left|\begin{array}{l} -q=p \\ 0<p<1 \\ q=-1p \end{array}\right| = \lim_{n\to\infty}(-1)^n\cdot p^n = \left|\begin{array}{l} p^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow p^n - \text{н.м.в.} \\ \left|(-1)^n\right| \le 1 - \text{обмежена} \end{array}\right| = 0.$$

Приклад.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^n+3^n}{3^n}}{\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}{2\left(\frac{2}{3}\right)^n+3}=\left|\begin{array}{l}\left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\\ 0<\frac{2}{3}<1\end{array}\right|=\frac{1}{3}.$$

7. Число e

Розглянемо послідовність $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Можна довести, що ця послідовність монотонно зростає і обмежена $2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$. За теоремою Вейєрштрасса існує границя цієї послідовності, яку позначають так: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

Зазначимо, що число *e* = 2,7183... є основою натуральних логарифмів $\ln a = \log_e a$. Взагалі, число *e*, як і число π = 3,14 ..., широко застосовується в різних задачах, у тому числі й у задачах з економічним змістом.

Задача. Суму *a* грн покладено в банк при *p* % річних. Як збільшиться ця сума за один рік, якщо вклад безперервно забирати і знову класти в банк?

Нехай вклад буде недоторканним цілий рік, тоді його приріст $x = \frac{ap}{100}$, а вся сума $S_1 = a + \frac{ap}{100} = a\left(1+\frac{p}{100}\right)$.

Якщо вклад зняли через півроку і відразу поклали на півроку, то приріст за перше півріччя буде $x_1 = \frac{ap}{2\cdot 100}$, а за друге — $x_2 = \left(a + \frac{ap}{2\cdot 100}\right)\cdot\frac{p}{2\cdot 100}$. Отже, вся сума за $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)$ року буде

$$S_2 = a + \frac{ap}{2\cdot 100} + \frac{a\left(1+\frac{p}{200}\right)p}{200} =$$
$$= a\left(1+\frac{p}{2\cdot 100}\right)\left(1+\frac{p}{2\cdot 100}\right) = a\left(1+\frac{p}{2\cdot 100}\right)^2.$$

Аналогічно можна вважати, що коли брати з банку і знову класти 3 рази на рік, то за рік $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)$ сума буде така:

$$S_3 = a\left(1+\frac{p}{3\cdot 100}\right)^3,$$

а за рік $\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+...+\frac{1}{n}\right) = 1 \Rightarrow S_n = a\left(1+\frac{p}{n\cdot 100}\right)^n.$

Розв’язком задачі буде границя $S = a\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{p}{n\cdot 100}\right)^n$.

При $p = 100\%$ сума $S = a\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = ae$; для довільного *p*, як буде показано в підрозд. 3.4, $S = ae^{\frac{p}{100}}$.

Розглянемо деякі цифрові дані: при початковому вкладі $a = 100$ грн, в умовах даної задачі, при $p = 100\,\%$ річних сума за рік буде $S = 271$грн 83 коп. (а не 200 грн, якщо вклад не знімали цілий рік); при $p = 2\,\%$ річних *S* = 102 грн 2 коп. (а не 102 грн, якщо вклад не знімати цілий рік).

Повернутися до змісту