Лекція №13. Границя функції

[1. Поняття границі функції]

[2. Зведення поняття границі функції до границі послідовності]

[3. Розкриття невизначених виразів типу $\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right], [\infty-\infty]$ для алгебраїчних функцій]

[3.1. Невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$ для раціональних функцій]

[3.2. Невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$ для ірраціональних функцій]

[3.3. Невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$]

[3.4. Невизначеність $[\infty-\infty]$]

1. Поняття границі функції

Нехай функція $y=f(x)$ визначена у деякому околі точки $x = a$, за винятком, хіба що, самої точки $x = a$.

Означення. Число b називається *границею функції* $f(x)$ *при* $x\to a$, якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ існує число $\delta>0$, таке що при $|x-a|<\delta$ і $x\neq a$ виконується нерівність $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Коротко це означення можна записати так:

$$\left(\lim_{x\to a} f(x)=b\right) := ((\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ |x-a|<\delta,\ x\neq a)\Rightarrow(|f(x)-b|<\varepsilon)).$$

На рис. 1 показано геометричну інтерпретацію $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, де за заданим ε-околом числа b знайдено δ-окіл числа a такий, що для всіх $x\in(a-\delta;\ a+\delta),\ x\neq a$ відповідні значення функції $f(x)\in(b-\varepsilon,\ b+\varepsilon)$, тобто графік функції $f(x)$ лежить у смузі шириною 2 ε.

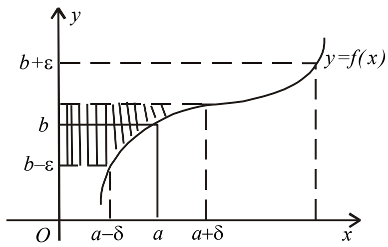

Рис. 1

Приклад. Довести за означенням, що $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$.

Доведення. Візьмемо довільне число $\varepsilon > 0$. Покажемо, яким чином треба вибрати $\delta > 0$. За означенням границі функції з нерівності $|x - x_0| < \delta$ має випливати нерівність $|x - x_0| < \varepsilon$. Для того щоб виконувалася така умова, досить вибрати $\delta = \varepsilon$.

Нехай область визначення функції включає нескінченний проміжок.

Означення. Число b називається *границею функції* $f(x)$, *коли* $x \to \infty$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $M > 0$, таке що з нерівності $|x| > M$ випливає нерівність $|f(x) - b| < \varepsilon$. Коротко це можна записати так:

$$\left(\lim_{x\to\infty} f(x) = b\right) := \left(\left(\forall\varepsilon > 0,\ \exists M > 0,\ |x| > M\right) \Rightarrow \left(|f(x) - b| < \varepsilon\right)\right).$$

При $x \to a$ або $x \to \infty$ функція може набувати нескінченно великих значень чи прямувати до нуля. Ці випадки можна проілюструвати такими означеннями.

Означення. Функція $f(x)$ називається *нескінченно великою величиною* (*н.в.в.*) при $x \to a$, якщо для будь-якого $M > 0$, яке б велике воно не було, існує число $\delta > 0$, таке що з нерівності $0 < |x - a| < \delta$ випливає $|f(x)| > M$, тобто:

$$\left(\lim_{x\to a} f(x) = \infty\right) := \left(\left(\forall M > 0,\ \exists\delta > 0,\ 0 < |x - a| < \delta\right) \Rightarrow \left(|f(x)| > M\right)\right).$$

Означення. Функція $f(x)$ називається *нескінченно малою величиною* (*н.м.в.*) при $x \to a$, якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Розглянемо односторонні границі для функції $y = f(x)$.

Означення. Правостороння границя функції:

$$\left(\lim_{x\to a+0} f(x) = b\right) := \left(\left(\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ a < x < a + \delta\right) \Rightarrow \left(|f(x) - b| < \varepsilon\right)\right).$$

Означення. Лівостороння границя функції:

$$\left(\lim_{x\to a-0} f(x) = b\right) := \left(\left(\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ a - \delta < x < a\right) \Rightarrow \left(|f(x) - b| < \varepsilon\right)\right).$$

***Теорема*. Для існування $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова**

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{a+0} f(x) = b.$$

Приклад. Довести, що $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ не існує.

Розглянемо односторонні границі:

а) ліворуч $\lim\limits_{x\to -0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \left| \begin{matrix} x\to -0 \\ \frac{1}{x}\to -\infty \end{matrix} \right| = -\frac{\pi}{2}$;

б) праворуч $\lim\limits_{x\to +0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \left| \begin{matrix} x\to +0 \\ \frac{1}{x}\to +\infty \end{matrix} \right| = +\frac{\pi}{2}$.

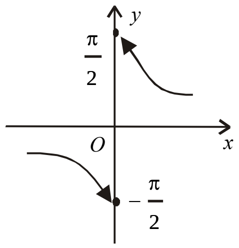

Рис. 3.14

Отже, $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ не існує, бо односторонні границі хоча й існують, але не рівні між собою (рис. 3.14).

2. Зведення поняття границі функції до границі послідовності

Послідовність за означенням є функція, отже, границя послідовності — просто окремий випадок границі функції. Навпаки, у деякому розумінні границя функції може бути зведена до границі послідовності.

Нехай задано функцію $f(x)$, $x\in D$; $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — послідовність значень аргументу функції з області D; цій послідовності відповідатиме така послідовність значень функції: $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$.

Означення. Число b називається *границею функції* $f(x)$ при $x\to a$, якщо для будь-якої послідовності значень аргументу x_n, $x_n \neq a$, що має границею число a, відповідна послідовність значень функції $f(x_n)$ має границею число b.

Відповідно до означення поняття границі функції фактично зведено до поняття границі послідовності, тому теореми про границі послідовностей також справджуються для границь функцій, тобто не потрібно формулювати ці теореми ще раз для границь функцій.

3. Розкриття невизначених виразів типу $\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right], [\infty-\infty]$ для алгебраїчних функцій

При виконанні граничного переходу у виразах типу $f(x)\pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$, коли порушуються умови теореми про граничний перехід при арифметичних операціях, розв’язання задачі у ряді випадків зводиться до аналізу невизначених виразів виду $\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right], [\infty-\infty]$.

Розглянемо деякі загальні рекомендації щодо дослідження таких невизначених виразів, обмежуючись тільки алгебраїчними функціями.

3.1. Невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$ для раціональних функцій

Спочатку нагадаємо деякі положення алгебри многочленів. Многочлен $P_n(x)$ називається *упорядкованим*, якщо

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n.$$

Теорема (Безу). **Остача від ділення многочлена $P_n(x)$ на двочлен типу *x* – *a* дорівнює значенню многочлена при $x = a$, тобто $P_n(a)$.**

Наслідок. Якщо число *a* — корінь многочлена $P_n(x)$, тобто $P_n(a) = 0$, то многочлен $P_n(x)$ ділиться без остачі на двочлен *x* – *a*.

Приклад. Розкласти на множники $P_3(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 5$. Оскільки $P_3(1) = 0 \Rightarrow x = 1$ — корінь $P_3(x) \Rightarrow P_3(x)$ ділиться без остачі на *x* – 1. Виконуючи ділення многочленів, дістаємо:

$$\begin{array}{r|l}
x^3 - 2x^2 + 6x - 5 & x - 1 \\ \cline{2-2}
-\underline{x^3 - x^2} & x^2 - x - 5 \\
-x^2 + 6x & \\
-\underline{-x^2 + x} & \\
5x - 5 & \\
-\underline{5x - 5} & \\
0 &
\end{array}$$

Отже,

$$P_3(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 5 = (x-1)(x^2 - x + 5).$$

Розглянемо $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$, де $P_n(x)$, $Q_m(x)$ — такі многочлени, що $P_n(a) = 0$, $Q_m(a) = 0$.

За наслідком з теореми Безу чисельник і знаменник діляться без остачі на *x* – *a*, тобто чисельник і знаменник мають спільний множник *x* – *a*. Отже, дістаємо:

$$\lim_{x \to a} \frac{P_n(a)}{Q_m(a)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)P_{n-1}(x)}{(x-a)Q_{m-1}(x)} = \lim_{x \to a} \frac{P_{n-1}(x)}{Q_{m-1}(x)}.$$

Степінь многочленів як у чисельнику, так і в знаменнику зменшився на одиницю. Якщо після виконання нового граничного переходу знову буде невизначеність $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, то наведений алгоритм повторюють.

Зауважимо, що скорочення дробу на множник *x* – *a* під знаком границі можливе, бо за означенням границі функції змінна *x* як завгодно близька до числа *a*, але $x \neq a$.

Приклад.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 2x^2 + 6x - 5}{x^2 - 1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2 - x + 5)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x + 5}{x + 1} = \frac{1 - 1 + 5}{1 + 1} = \frac{5}{2}.$$

Отже, невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$ при $x \to a$ для раціональних функцій розкривається діленням многочленів у чисельнику і знаменнику на двочлен $x - a$.

3.2. НЕВИЗНАЧЕНІСТЬ $\left[\frac{0}{0}\right]$ ДЛЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Для розв'язування задач у цьому випадку рекомендується звільнитись від тих ірраціональних множників у чисельнику і знаменнику дробового виразу, які перетворюються на нуль при виконанні граничного переходу. Для звільнення від радикалів використовують формули скороченого множення, заміну змінної та інші штучні прийоми.

Приклад.

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 5}\frac{\left(\sqrt{x-1}-2\right)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{x-1-4}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{1}{\sqrt{x-1}+2}=\frac{1}{4}.$$

Приклад.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{matrix} x=t^6 \\ x\to 1 \\ t\to 1\end{matrix}\right|=$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{t^2-1}{t^3-1}=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)(t+1)}{(t-1)\left(t^2+t+1\right)}=\lim_{t\to 1}\frac{t+1}{t^2+t+1}=\frac{2}{3}.$$

3.3. НЕВИЗНАЧЕНІСТЬ $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

У цьому випадку і чисельник, і знаменник рекомендується поділити на найбільший степінь змінної, що входить як до знаменника, так і до чисельника.

Приклад.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{x}+x+1}{2\sqrt{x^3+x}-10x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x\sqrt{x}+x+1}{x\sqrt{x}}}{\dfrac{2\sqrt{x^3+x}-10x}{x\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}}{2\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{10}{\sqrt{x}}}=\frac{1}{2}.$$

3.4. Невизначеність $[\infty-\infty]$

Цей тип невизначеності зводиться до невизначеностей $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$; наприклад, зведенням виразу до спільного знаменника, множенням на спряжений вираз.

Приклад.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right)=[\infty-\infty]=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1+x-2}{1-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{1-x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}-\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{x+1}=-\frac{1}{2}.$$

Приклад.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=[\infty-\infty]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}=\frac{2}{1+1}=1.$$

[Повернутися до змісту]