**Лекція №14. Особливі границі**



## *1. Перша особлива границя*

Взявши до уваги неперервність функції $f(x)=\sin x$ при $x = 0$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin 0=0\right)$, матимемо невизначеність $\frac{0}{0}$ в разі границі $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sin x}{x}$. Крім того, для малих $x$ маємо $\sin x = x$, отже, є підстава вважати, що така границя в разі, коли вона існує, або дорівнює одиниці, або до неї близька. Яка на справді ця границя?

**Теорема.** *Має місце границя* $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sin x}{x}=1$.

**Доведення.** Доведемо спочатку, що для довільного $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

$$\sin x < x < \tan x$$

Побудуємо коло радіуса $R$ і промінь під кутом $x$ до осі $Ox$ (рис. 1).

Маємо

$$S_{\Delta OAB} < S_{\text{сект.}\,OAB} < S_{\Delta OCB}$$

Знайшовши площу площу кожної з цих фігур, дістанемо

$$\frac{1}{2}R^2\sin x < \frac{1}{2}R^2 x < R^2\tan x,$$

звідки дістанемо нерівність (11).

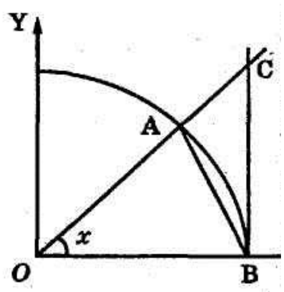


*Рис. 1*

Зазначимо, що коли $f_1(x) < f_2(x)\forall x\in(a,x)$, то $\lim\limits_{x\to x_0}f_1(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f_2(x)$ (наприклад $\sin < x\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, але $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\lim\limits_{x\to x_0}x$)

Поділимо обидві частини нерівності (11) на $\sin x>0$. Дістанемо

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x},$$

або

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

Використаємо неперервність функції $f(x)=\cos x$ і теорему 2 (п. 2.2). Маємо

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Оскільки $\dfrac{\sin x}{x}$ - парна функція, то результат буде той самий при $x \to 0-0$.

*Границі — наслідки першої особливості границі:*

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1.$ 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x}{x}=1.$ 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\mathrm{tg}x}=1.$ 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}=\dfrac{a}{b}.$

*Зауваження*. За допомогою першої особливої границі можна досліджувати невизначеності $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ для виразів з тригонометричними функціями.

**Приклад**.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

**Приклад.** $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin x/2}{(\pi-x)^2}=\left[\dfrac{0}{0}\right].$

● Для того щоб скористатися першою особливою границею, потрібно виконати таку заміну змінної *x*, щоб нова змінна прямувала до нуля, наприклад $\pi-x=y$.

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1-\sin\frac{x}{2}}{(\pi-x)^2}=\left|\begin{array}{l}\pi-x=y\\ x=\pi-y\\ x\to\pi\\ y\to 0\end{array}\right|=\lim_{y\to 0}\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{y}{2}\right)}{y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos\frac{y}{2}}{y^2}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{2\sin^2\frac{y}{4}}{y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{y}{4}\right)}{16\left(\frac{y}{4}\right)^2}=\frac{1}{8}.$$

**Приклад**.

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\mathrm{ctg}\frac{\pi x}{2}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{array}{l}1-x=y\\ x=1-y\\ x\to 1\\ y\to 0\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi y}{2}\right)}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\mathrm{tg}\frac{\pi y}{2}}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi y}{2}}{\mathrm{tg}\frac{\pi y}{2}}=\frac{2}{\pi}.$$

## *2. Друга особлива границя*

Для послідовності $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ маємо $\lim\limits_{x\to\infty} a_n = 1$. Розглянемо послідовність $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$. Маємо $u_1 = 2, u_2 = 2{,}25, u_3 = 2{,}37, u_4 = 2{,}44, \ \ldots$ . Схоже, що остання послідовність зростає. Чи має вона границю? Відповідь дає така теорема.

**Теорема.** *Має місце*

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

*де* $e$ *- трансцендентне число,* $e \approx 2{,}718$.

**Доведення.** Скористаємося формулою бінома Ньютона (узагальнення відомих формул при $n = 1, n = 2, n = 3$)

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^3 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots + x^n,$$

де $n \in N, n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n.$.

Маємо

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^3 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots + x^n =$$

$$1 + 1 + \frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{2!} + \frac{(n-1)(n-2)}{n^2}\cdot\frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-(n-1))}{n^{n-1}}\cdot\frac{1}{n!} =$$

$$2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\frac{1}{3!} + \ldots + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n!}.$$

Можна довести, що послідовність $u_n$ є зростаючою, $u_{n+1} > u_n$. Отже,

$$u_n > u_1 = 2$$

Оскільки

$$1 - \frac{1}{n} < 1, \quad 1 - \frac{2}{n} < 1, \ldots, 1 - \frac{n-1}{n} < 1,$$

то

$$u_n \le 1 + 1 - \frac{1}{2!} + - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} \le 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} +$$

$$+ \ldots \le 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots = 1 + \frac{1}{1\frac{1}{2}} = 3.$$

Тут скористалися формулою суми спадної геометричної прогресії ( $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots$, де $a = 1$, $g = \frac{1}{2}$, $S = \frac{a}{1-g}$ ). Оскільки послідовність $u_n \uparrow$ і обмежена зверху числом 3, то вона має границю (теорема 6, п. 3.1), яку позначимо через $e$ .

Зазначимо, що і у неперервному випадку маємо

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e,\quad \lim_{x\to U}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

Логарифми за основою  називають натуральними і позначають

$$\log_e x=\ln x.$$

Іноді користуються позначенням $e^x=\exp(x)$.

*Границі — наслідки другої особливої границі:*

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$. 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}=e^{ab}$. 3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$.

*Зауваження*: За допомогою другої особливої границі та її наслідків можна досліджувати невизначеності

$$\left[\frac{0}{0}\right],\ \left[1^{\infty}\right],\ \left[\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}\right].$$

**Приклад.**

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{2x-1}=\left[\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right)^{2x-1}=\left[1^{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}\cdot\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\left(1+\frac{-2}{x}\right)^{2x}\left(1+\frac{3}{x}\right)}=\frac{e^{3\cdot 2}\cdot 1}{e^{-2\cdot 2}\cdot 1}=e^{10}.$$

**Приклад.**

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{\sin 2x}{x\sin 2x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left((1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}}\right)^{\frac{\sin 2x}{x}}=\left|\begin{array}{l}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}}\xrightarrow[x\to 0]{}e\\ \frac{\sin 2x}{x}\xrightarrow[x\to 0]{}2\end{array}\right|=e^2.$$

**Приклад.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\ln(2x+1)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x\cdot 2x\cdot 5x}{5x\cdot\ln(2x+1)\cdot 2x}=\left|\begin{array}{l}\frac{\sin 5x}{5x}\xrightarrow[x\to 0]{}1\\ \frac{2x}{\ln(2x+1)}\xrightarrow[x\to 0]{}1\end{array}\right|=\frac{5}{2}.$$

## *3. Еквівалентні нескінченно малі величини*

*Означення.* Нескінченно малі величини (н.м.в.) $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються н.м.в. одного порядку *мализни* при $x\to a$, якщо $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\text{const}\neq 0.$

**Приклад.** Н.м.в. $\alpha(x)=x$ та $\beta(x)=\sin 2x$ є н.м.в. *одного порядку мализни* при $x\to 0$, бо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 2x}=\frac{1}{2}\neq 0.$$

*Означення.* Н.м.в. $\alpha(x)$ називається н.м.в. *вищого порядку мализни* порівняно з н.м.в. $\beta(x)$ при $x\to a,$ якщо

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0.$$

**Приклад.** Н.м.в. $\alpha(x)=x^n(n>1)$ є вищого порядку мализни порівняно з н.м.в. $\beta(x)=x$ при $x\to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^n}{x}=\lim_{x\to 0}x^{n-1}=0.$$

*Означення*. Дві н.м.в. $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються *еквівалентними* при $x\to a,$ якщо $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1.$

*Зауваження*: При дослідженні границь відношення н.м.в. їх можна замінювати еквівалентними, тобто якщо $\beta(x)$ еквівалентна $\gamma(x)$ при $x\to a,$ то $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\gamma(x)}.$

Виходячи з наслідків першої та другої особливих границь, можна записати таку низку еквівалентних н.м.в. при $x\to 0$:

$$x \sim \sin x \sim \mathrm{tg}x \sim \arcsin x \sim \mathrm{arctg}x \sim e^x-1 \sim \ln(x+1).$$

Як наслідок звідси випливає, наприклад, що при $x\to 0$ буде: $e^{3x}-1\sim 3x$; $\sin 5x\sim 5x$ і т.п.

Використовується шкала н.м.в. при дослідженні невизначеностей типу $\left[\frac{0}{0}\right]$.

**Приклад**.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 5x}-e^{\sin x}}{\ln(1+3x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}\left(e^{\sin 5x-\sin x}-1\right)}{\ln(1+3x)}=$$

$$=\left|\begin{array}{l} x\to 0 \\ \ln(1+3x)\sim 3x; \\ e^{\sin 5x-\sin 5x}-1\sim \sin 5x-\sin x; \\ e^{\sin x}\to 1 \end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin x}{3x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x\cdot\cos 3x}{3x}=\left|\begin{array}{c} x\to 0 \\ \sin 2x\sim 2x \\ \cos 3x\to 1 \end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot 2x}{3x}=\frac{4}{3}.$$

Повернутися до змісту