ВИЩА МАТЕМАТИКА

для студентів ОКР “Бакалавр”

галузь знань – 12 «Інформаційні технології»

спеціальність – 122 «Комп’ютерні науки та інформаційні технології»

Автор:

Доцент кафедри вищої та прикладної математики

Шостак Сергій Володимирович

Тема3: Розв ’язування систем лінійних рівнянь

1. Правило Крамера
2. Розв'язання і дослідження систем лінійних рівнянь за допомогою матриць
3. Розв'язування однорідної системи лінійних рівнянь
4. Загальний розв'язок неоднорідної системи лінійних рівнянь
5. Ранг матриці. Теорема Кронекера-Капеллі

Система трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = h_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = h_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = h_3, \end{cases} \quad (1)$$

Однорідна система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = h_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = h_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = h_3, \end{cases}$$

$$h_1 = h_2 = h_3 = 0$$

Головний визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

Еквівалентна система рівнянь

$$\begin{cases} \Delta \cdot x_1 = \Delta_1, \\ \Delta \cdot x_2 = \Delta_2, \\ \Delta \cdot x_3 = \Delta_3. \end{cases} \quad (3)$$

Правило Крамера

Якщо головний визначник системи (1) не дорівнює нулеві , то система має єдиний розв'язок

Формули Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \qquad (4)$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

Система *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = h_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = h_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = h_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{nn}x_n = h_n. \end{cases} \qquad (5)$$

Скорочена форма запису системи рівнянь

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = h_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n). \quad (6)$$

Формули Крамера для системи з *n* рівнянь з *n* невідомими

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$$

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \qquad (7)$$

$$x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

Зауваження

Якщо головний визначник системи = 0 , то, очевидно, що формули Крамера не мають місця. Отже, система (1) або (5) не може мати єдиного розв'язку

Сумісна та несумісна система рівнянь

Система рівнянь, яка має розв'язок (єдиний або безліч) називається **сумісною,** а система, яка не має розв'язку, — **несумісною.**

Матричне рівняння

Еквівалентний запис системи (1) у матричній формі

$$AX=H \qquad (7)$$

Розв'язок *X у* матричній формі

$$X = A^{-1} H \qquad (8)$$

Однорідна система рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0, \end{cases} \qquad (9)$$

Тривіальний розв’язок системи (9)

Система (9) має завжди один розв'язок $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, який називається **нульовим** або **тривіальним**

Розв'язки системи (9) при $\Delta = 0$

$$x_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot t;$$

$$x_2 = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot t; \qquad (10)$$

$$x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot t;$$

Теорема (про ненульовий розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь)

Для того, щоб однорідна система (9) мала ненульовий розв'язок, необхідно і достатньо, щоб її головний визначник дорівнював нулеві

Теорема (про загальний розв'язок неоднорідної системи)

Якщо головний визначник неоднорідної системи дорівнює нулеві і система має якийсь розв'язок (x_1, x_2, x_3), то вона має безліч розв'язків

Загальний розв'язок неоднорідної системи

$$x_1^{3H} = x_1^* + x_1^{30}$$

$$x_2^{3H} = x_2^* + x_2^{30}$$

$$x_3^{3H} = x_3^* + x_3^{30}$$

загальний розв'язок неоднорідної системи є сумою її довільного розв'язку і загального розв'язку відповідної однорідної системи

Поняття рангу матриці

Рангом матриці *A* називається найвищий із порядків її мінорів, відмінних від нуля.

Позначення рангу матриці

Якщо ранг матриці *A* дорівнює *k*, то це позначається так:

$$r(A) = k$$

Властивості рангу

Ранг матриці не зміниться, якщо:

- матрицю транспонувати;
- у матриці переставити рядки (стовпці);
- із матриці виключити рядок (стовпець), який містить тільки нулі;
- із матриці виключити рядок (стовпець), який є лінійною комбінацією інших рядків (стовпців);
- будь-який рядок (стовпець) помножити на число, що не дорівнює нулеві;
- до будь-якого рядка (стовпця) додати лінійну комбінацію інших рядків (стовпців).

Теорема Кронекера — Капеллі

Система лінійних рівнянь **сумісна** тоді і тільки тоді, коли ранг матриці *A* системи дорівнює рангу розширеної матриці *B:*

$$\boldsymbol{r(A) = r(B)}$$

Контрольні запитання

- Що називається матрицею?
- Яка матриця називається квадратною, прямокутною, одиничною?
- Що розуміють під операцією транспонування матриці?
- Які лінійні операції над матрицями Ви знаєте?
- Дайте означення добутку двох матриць.
- Дайте означення оберненої матриці до даної матриці.
- Сформулюйте алгоритм знаходження оберненої матриці.
- Яка система рівнянь називається однорідною?
- Який визначник називається головним визначником системи?
- Сформулюйте правило Крамера.
- В чому суть матричного методу розв'язування систем лінійних рівнянь?