

ВИЩА МАТЕМАТИКА

для студентів ОКР “Бакалавр”

галузь знань – 12 «Інформаційні технології»

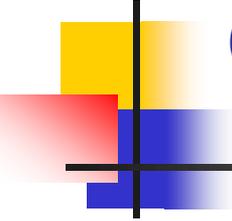
спеціальність – 122 «Комп’ютерні науки та інформаційні технології»

Автор:

Доцент кафедри вищої та прикладної математики

Шостак Сергій Володимирович

Тема 3: Розв'язування систем лінійних рівнянь

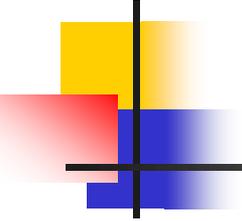


- 1. Правило Крамера**
- 2. Розв'язання і дослідження систем лінійних рівнянь за допомогою матриць**
- 3. Розв'язування однорідної системи лінійних рівнянь**
- 4. Загальний розв'язок неоднорідної системи лінійних рівнянь**
- 5. Ранг матриці. Теорема Кронекера-Капеллі**

Система трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими

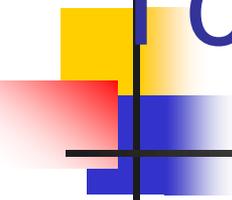
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = h_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = h_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = h_3, \end{cases} \quad (1)$$

Однорідна система лінійних рівнянь



$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = h_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = h_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = h_3, \end{cases}$$

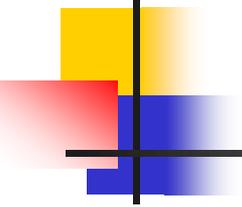
$$h_1 = h_2 = h_3 = 0$$



Головний визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (2)$$

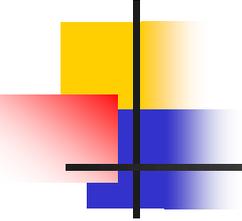
Еквівалентна система рівнянь



$$\Delta \cdot x_1 = \Delta_1.$$

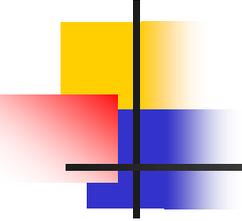
$$\Delta \cdot x_2 = \Delta_2. \quad (3)$$

$$\Delta \cdot x_3 = \Delta_3.$$



Правило Крамера

Якщо головний визначник системи (1) не дорівнює нулеві , то система має єдиний розв'язок



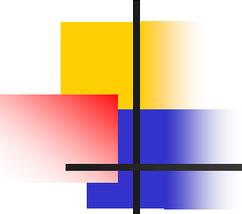
Формули Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad (4)$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

Система n лінійних рівнянь з n невідомими

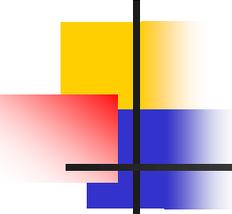

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = h_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n = h_2, \\ \dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n = h_i, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nj}x_j + \dots + a_{nn}x_n = h_n. \end{array} \right. \quad (5)$$

Скорочена форма запису системи рівнянь

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = h_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (6)$$

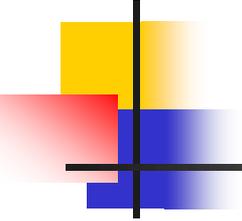
Формули Крамера для системи з n рівнянь з n невідомими

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{\Delta_1}{\Delta} \\x_j &= \frac{\Delta_j}{\Delta} \\x_n &= \frac{\Delta_n}{\Delta}\end{aligned} \quad (7)$$



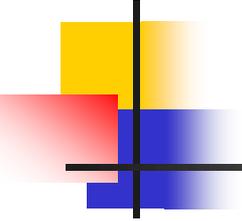
Зауваження

Якщо головний визначник системи $= 0$, то, очевидно, що формули Крамера не мають місця. Отже, система (1) або (5) не може мати єдиного розв'язку



Сумісна та несумісна система рівнянь

Система рівнянь, яка має розв'язок (єдиний або безліч) називається **сумісною**, а система, яка не має розв'язку, — **несумісною**.



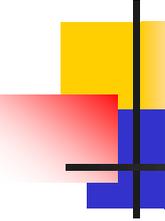
Матричне рівняння

Еквівалентний запис системи (1) у матричній формі

$$AX=H \quad (7)$$

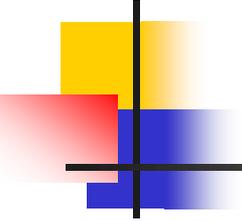
Розв'язок X у матричній формі

$$X = A^{-1}H \quad (8)$$



Однорідна система рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0, \end{cases} \quad (9)$$



Тривіальний розв'язок системи (9)

Система (9) має завжди один розв'язок $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, який називається **нульовим** або **тривіальним**

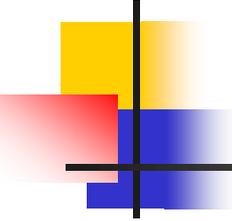
Розв'язки системи (9)

при $\Delta = 0$

$$x_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot t;$$

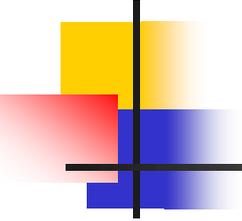
$$x_2 = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot t; \quad (10)$$

$$x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot t;$$



Теорема (про ненульовий розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь)

Для того, щоб однорідна система (9) мала ненульовий розв'язок, необхідно і достатньо, щоб її головний визначник дорівнював нулеві



Теорема (про загальний розв'язок неоднорідної системи)

Якщо головний визначник неоднорідної системи дорівнює нулеві і система має якийсь розв'язок (x_1, x_2, x_3) , то вона має безліч розв'язків

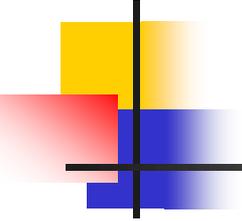
Загальний розв'язок неоднорідної системи

$$x_1^{3H} = x_1^* + x_1^{30}$$

$$x_2^{3H} = x_2^* + x_2^{30}$$

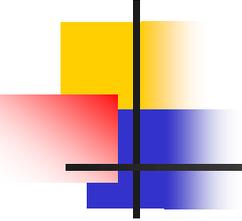
$$x_3^{3H} = x_3^* + x_3^{30}$$

загальний розв'язок
неоднорідної
системи є сумою її
довільного розв'язку
і загального
розв'язку відповідної
однорідної системи



Поняття рангу матриці

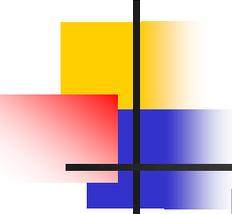
Рангом матриці A називається найвищий із порядків її мінорів, відмінних від нуля.



Позначення рангу матриці

Якщо ранг матриці A
дорівнює k , то це
позначається так:

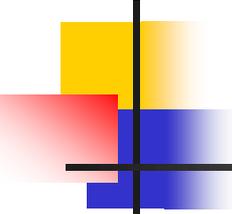
$$\mathbf{r(A) = k}$$



Властивості рангу

Ранг матриці не зміниться, якщо:

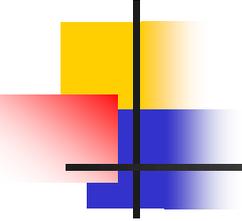
- матрицю транспонувати;
- у матриці переставити рядки (стовпці);
- із матриці виключити рядок (стовпець), який містить тільки нулі;
- із матриці виключити рядок (стовпець), який є лінійною комбінацією інших рядків (стовпців);
- будь-який рядок (стовпець) помножити на число, що не дорівнює нулеві;
- до будь-якого рядка (стовпця) додати лінійну комбінацію інших рядків (стовпців).



Теорема Кронекера — Капеллі

Система лінійних рівнянь **сумісна** тоді і тільки тоді, коли ранг матриці A системи дорівнює рангу розширеної матриці B :

$$r(A) = r(B)$$



Контрольні запитання

- Що називається матрицею?
- Яка матриця називається квадратною, прямокутною, одиничною?
- Що розуміють під операцією транспонування матриці?
- Які лінійні операції над матрицями Ви знаєте?
- Дайте означення добутку двох матриць.
- Дайте означення оберненої матриці до даної матриці.
- Сформулюйте алгоритм знаходження оберненої матриці.
- Яка система рівнянь називається однорідною?
- Який визначник називається головним визначником системи?
- Сформулюйте правило Крамера.
- В чому суть матричного методу розв'язування систем лінійних рівнянь?