ВИЩА МАТЕМАТИКА

для студентів ОКР “Бакалавр”

галузь знань – 12 «Інформаційні технології»

спеціальність – 122 «Комп’ютерні науки та інформаційні технології»

Автор:

Доцент кафедри вищої та прикладної математики

Шостак Сергій Володимирович

Тема5: Лінійні операції над векторами, заданими координатами. Скалярний, векторний та мішаний добуток векторів.

1. Лінійні операції над векторами

2. Розклад вектора по координатних ортах

3. Скалярний добуток векторів

4. Векторний добуток векторів

3. Мішаний добуток векторів

Рівні вектори

Два вектори ***a*** та ***b*** **рівні,** якщо рівні їх координати:

$a = b \Leftrightarrow a_x = b_x ; a_y = b_y ; a_z = b_z ;$ (1)

Колінеарні вектори

Два вектори ***a*** та ***b*** **колінеарні,** якщо їх відповідні координати пропорційні:

$a \| b \Leftrightarrow a_x / b_x = a_y / b_y = a_z / b_z = \lambda \Leftrightarrow a = \lambda b$ (2)

Сума векторів

Сумою двох векторів $\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ та $b = \{b_x, b_y; b_z\}$ є вектор

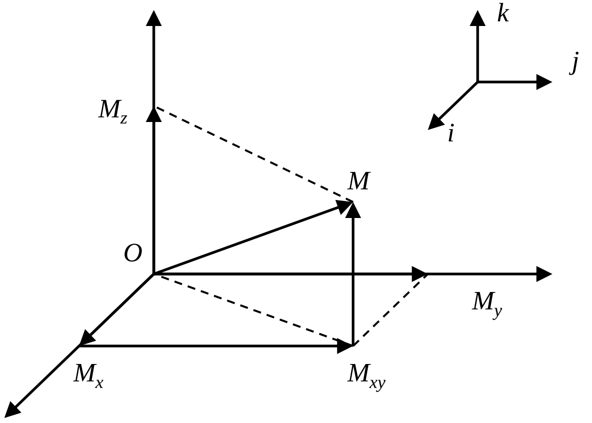
$$a + b = \{a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z\}$$

Добуток скаляра на вектор

Добутком скаляра λ на вектор $\boldsymbol{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ є вектор λa *такий, що*

$$\lambda a = \{\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z\}$$

Координатні орти



Вектори *i* , *j*, *k* називаються **ортами** відповідно осей *Ox*, *Oy*, *Oz*, або **координатними ортами**

Розклад вектора по координатних ортах

$$a = a_x i + a_y j + a_z k$$

Представлення вектора у просторі

1)своїми координатами:

$$a = \{a_x; a_y; a_z\};$$

2)розкладом по координатних ортах:

$$a = a_x i + a_y j + a_z k;$$

3)модулем і напрямними косинусами (напрямом):

$$|a|, \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$$

Скалярний добуток векторів

$$a\ b = |a|\ |b| \cos(a,b)$$

Властивість 1 скалярного добутку

$$a\,b = |a|\text{пр}_a b = |b|\text{пр}_b a$$

Наслідок 1

$$пр_b a = a\, b\, /|b|, \ (пр_a b = a\, b\, /|a|)$$

Наслідок 2

$$\cos(a, b) = \cos \varphi = ab/(|b||a|)$$

Властивість 2 скалярного добутку

$$a\ b = b\ a$$

Властивість 3 скалярного добутку

$$(a + b)\,c = a\,c + b\,c$$

Властивість 4 скалярного добутку

$$\lambda\,(ab) = \lambda\,ab = a\,\lambda b$$

Умова ортогональності двох векторів

Вектор а ***ортогональний***

до b , тоді і тільки тоді, коли

a b=0

Властивість 6 скалярного добутку

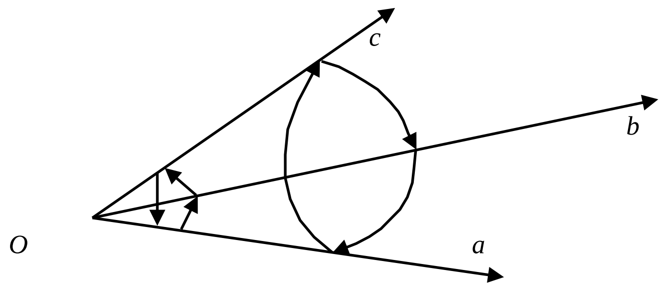
Скалярний квадрат вектора

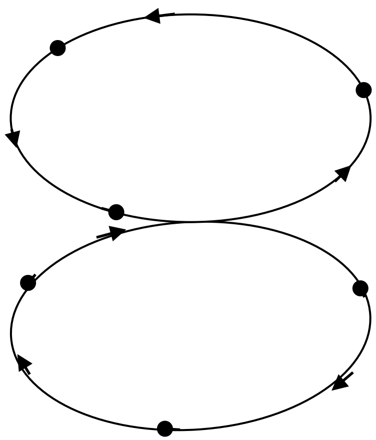
дорівнює квадрату його модуля

Властивість 7 скалярного добутку

$$a\,b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Поняття трійки векторів



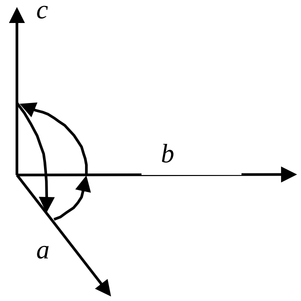


Три вектори *a, b, c* називаються **трійкою,** якщо вони взяті у строгому порядку їх запису. Наприклад, *a, b, c* та *b, a, c*— різні трійки векторів

Права та ліва трійка векторів

Трійка некомпланарних векторів *a, b, c,* що приведені до загального початку, називається **правою (лівою),** якщо спостерігачеві, що дивиться із кінця вектора с, найменший поворот від *a* до *b* видно проти (за) годинникової стрілки

Права трійка векторів



Векторним добутком векторів

Векторним добутком векторів *a* та *b* називається вектор $c = a \times b$, який

1) має модуль, що дорівнює добутку модулів цих векторів на синус кута між ними

$|c| = |a \times b| = |a|\ |b| \sin (a, b);$

2) перпендикулярний до площини, в якій лежать *a* та *b*

3)утворює з *a* та *b* праву трійку

Мішаний добуток трьох векторів

$$(a \times b)c$$

Геометричний зміст мішаного добутку

Модуль мішаного добутку трьох не-компланарних векторів *a, b, c* дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на *a, b, c* як на ребрах:

$$|(a\times b)\,c| = V$$

Об'єм трикутної піраміди

$$V_{тетр} = |(a \times b)\, c|/6$$

Мішаний добуток векторів, заданих координатами

$$(a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Контрольні запитання

- Означення скалярного добутку векторів.
- Геометричний зміст скалярного добутку векторів.
- Фізичний зміст скалярного добутку векторів.
- Необхідна і достатня умова перпендикулярності векторів.
- Скалярний добуток векторів заданих своїми координатами.
- Формула кута між двома векторами.
- Означення векторного добутку векторів.
- Необхідна і достатня умова колінеарності векторів через векторний добуток векторів.
- Формула площі паралелограма та трикутника.
- Векторний добуток векторів, заданих координатами.
- Означення мішаного добутку векторів.
- Мішаний добуток векторів, заданих координатами.
- Формула об’єму паралелепіпеда та піраміди.