ВИЩА МАТЕМАТИКА

для студентів ОКР “Бакалавр”

галузь знань – 12 «Інформаційні технології»

спеціальність – 122 «Комп’ютерні науки та інформаційні технології»

Автор:

Доцент кафедри вищої та прикладної математики

Шостак Сергій Володимирович

Тема12: Границя числової послідовності

1. Поняття числової послідовності та її границі
2. Загальні властивості збіжних послідовностей
3. Нескінченно мала величина та її властивості
4. Нескінченно велика величина. Зв’язок між нескінченно великою і нескінченно малою величинами
5. Граничний перехід при арифметичних операціях
6. Теореми, які полегшують знаходження границь послідовностей
7. Число e

Позначення числової послідовності

$$x_n = f(n), \;\; n \in N$$

Члени послідовності

$$x_1 = f(1),\ \ x_2 = f(2),\ \ \ldots,\ \ x_n = f(n),\ \ldots$$

Знаходження членів послідовності

$$x_n = \frac{2n-1}{2^n}$$

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{3}{2^2}, \quad x_3 = \frac{5}{2^3}$$

Знаходження загального члена послідовності

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -\frac{3}{5\sqrt{2}}, \quad x_3 = \frac{5}{5^2\sqrt{3}}$$

$$x_n = \frac{(-1)^{n-1}(2n-1)}{5^{n-1}\sqrt{n}}$$

Позначення границі послідовності

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{або} \quad x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$$

Математичні квантори

$\forall$ — для будь-якого, будь-який;

$\exists$ — існує, знайдеться;

: = дорівнює за означенням, означає

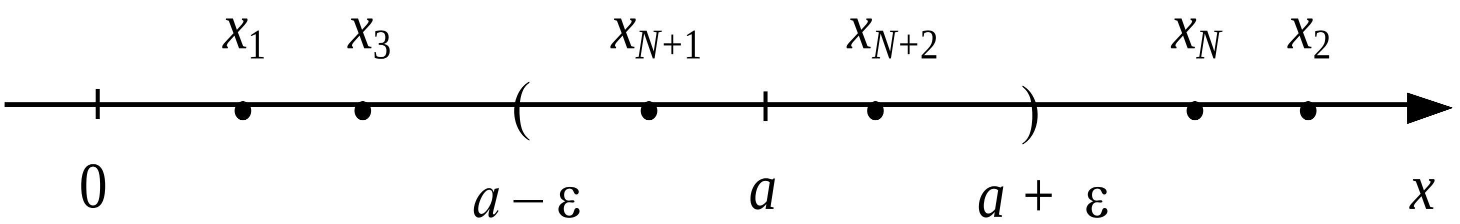
Означення границі послідовності на мові кванторів

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n = a\right) := \left(\left(\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ n > N\right) \Rightarrow \left(\left|x_n - a\right| < \varepsilon\right)\right)$$

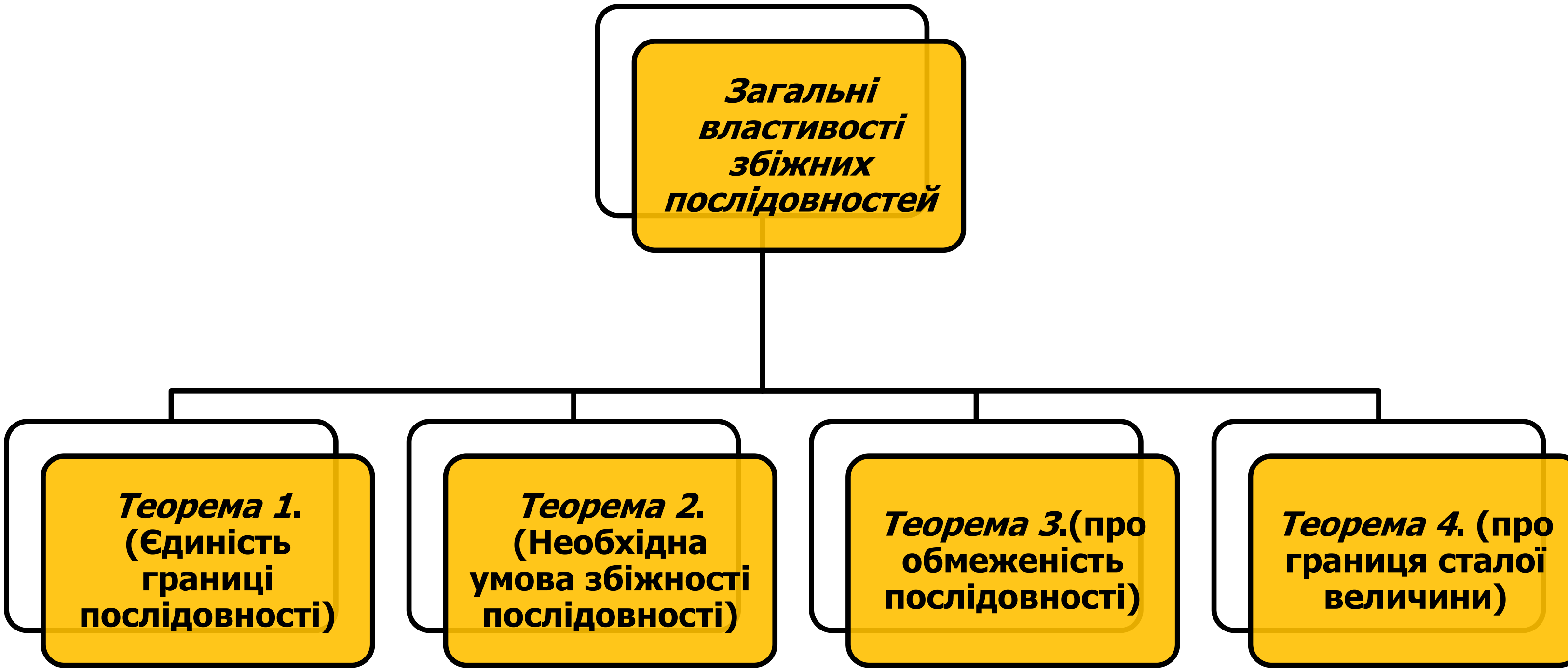
ε-окіл числа *a*

інтервал $(a - \varepsilon;\ a + \varepsilon)$

Розміщення членів послідовності



Загальні властивості збіжних послідовностей



Нескінченно мала величина (н. м. в.)

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$$

α_n *- нескінченно мала величина*

Приклад нескінченно малої величини

$$\alpha_n = \frac{1}{n}$$ — н.м.в., бо $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Властивості нескінченно малих величин

Властивості нескінченно малих величин

- ***Теорема 1*. Сума двох н.м.в. є н. м. в.**
- ***Теорема 2*. Добуток обмеженої величини на н.м.в. є н.м.в.**
  - *Наслідок*. Добуток скінченної кількості н.м.в. є н.м.в.
- ***Теорема 3*. Добуток двох н.м.в. є н.м.в.**
- ***Теорема 4*. (про границя сталої величини)**

Нескінченно велика величина (н.в.в.)

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

x_n - *нескінченно велика величина*

Означення н.в.в. аналітичною мовою

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n = \infty\right) \coloneqq \left(\left(\forall M > O,\ \exists N,\ n > N\right) \Rightarrow \left(\left|x_n\right| > M\right)\right)$$

Зв’язок між н.в.в. і н.м.в.

α_n — н.м.в. $\Rightarrow$ $y_n = \dfrac{1}{\alpha_n}$ — н.в.в.

і навпаки

Граничний перехід при арифметичних операціях

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n;$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} c y_n = c \lim_{n\to\infty} y_n;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} \quad \text{при} \quad \lim_{n\to\infty} y_n \neq 0.$$

Теореми, які полегшують знаходження границь

- ***Теореми для знаходження границь***
  - ***Теорема 1.*** **(Граничний перехід у нерівності)**
  - ***Теорема 2.*** **(Про границю затисненої послідовності)**
  - ***Теорема 3.*** **(Вейєрштрасса)**

Число е

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Чисмлове значення числа е

$$e = 2{,}7183\ldots$$

Контрольні запитання

- Означення числової послідовності
- Означення границі числової послідовності
- Теорема про єдиність границі послідовності.
- Необхідна умова збіжності послідовності.
- Теорема про границю сталої величини
- Нескінченно мала величина
- Теореми про н.м.в.
- Нескінченно велика величина
- Теорема про зв’язок між н.в.в. і н.м.в.
- Теореми про граничний перехід при арифметичних операціях
- Теорема Вейєрштрасса про границю монотонної й обмеженої послідовності