

# ВИЩА МАТЕМАТИКА

---

для студентів ОКР “Бакалавр”

галузь знань – 12 «Інформаційні технології»

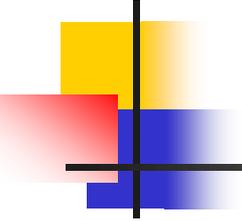
спеціальність – 122 «Комп’ютерні науки та інформаційні технології»

Автор:

Доцент кафедри вищої та прикладної математики

Шостак Сергій Володимирович

# Тема 13: Границя функції

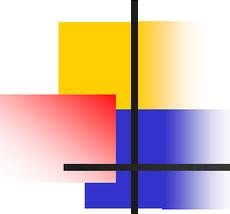


---

- 1. Поняття границі функції**
- 2. Зведення поняття границі функції до границі послідовності**
- 3. Розкриття невизначених виразів для алгебраїчних функцій**

# Означення границі функції

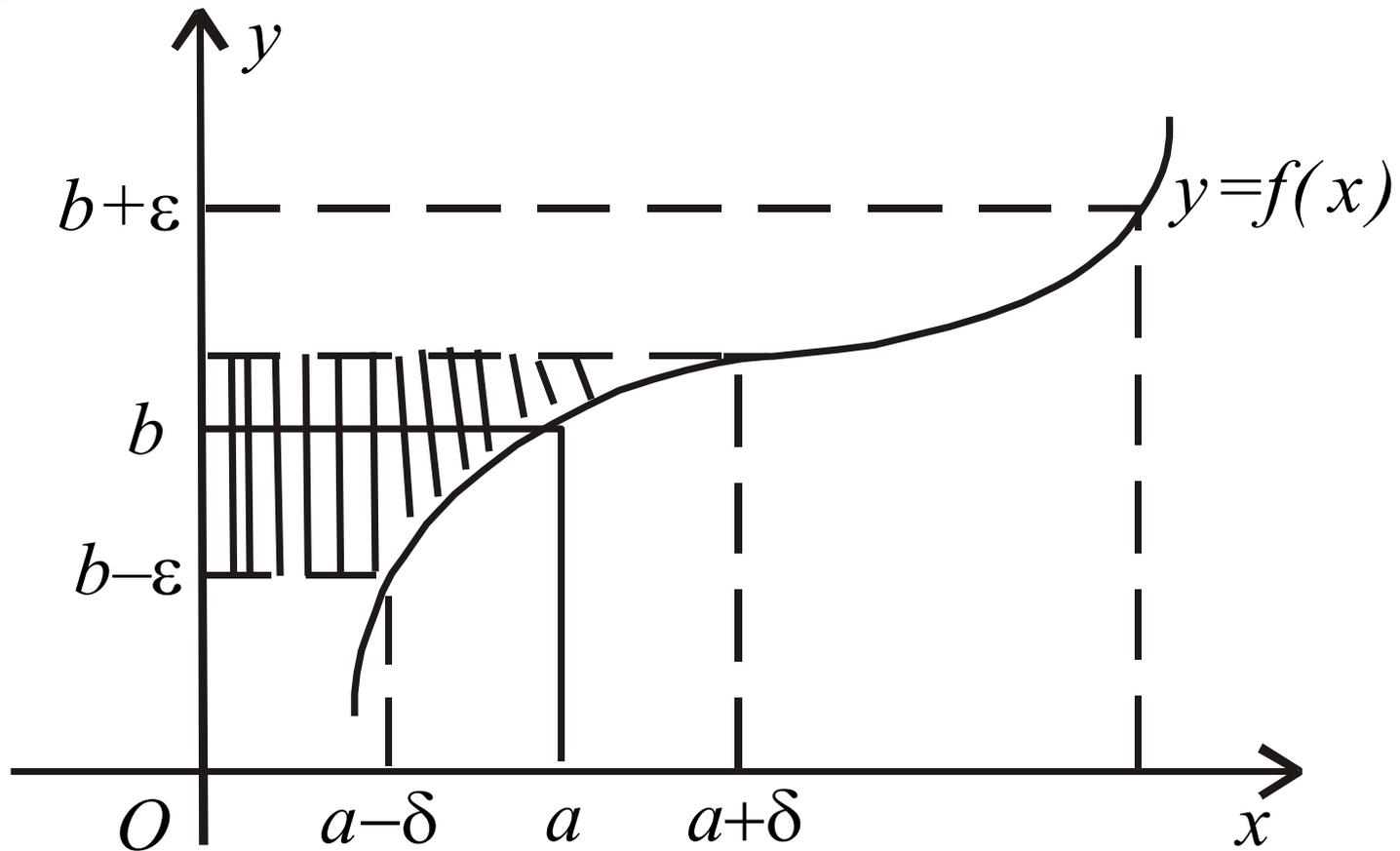
коли  $x \rightarrow a$



---

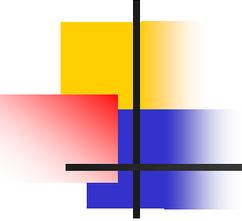
$$\left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \right) := \left( (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |x - a| < \delta, x \neq a) \Rightarrow (|f(x) - b| < \varepsilon) \right).$$

# Геометрична інтерпретація границі функції



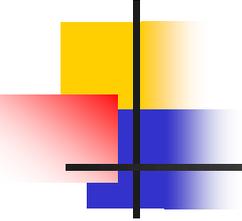
# Означення границі функції

коли  $x \rightarrow \infty$



---

$$\left( \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \right) := \left( \left( \forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, |x| > M \right) \Rightarrow \left( |f(x) - b| < \varepsilon \right) \right).$$



# Нескінченно велика величина (н.в.в.)

---

$$\left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \right) := \left( \left( \forall M > 0, \exists \delta > 0, 0 < |x - a| < \delta \right) \Rightarrow \left( |f(x)| > M \right) \right).$$

# Нескінченно мала величина (Н.М.В.)

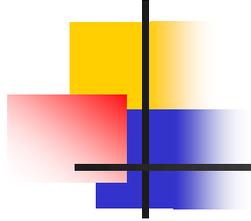
---

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

*при*

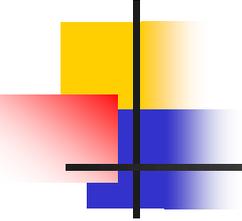
*$x \rightarrow a$*

# Правостороння границя функції



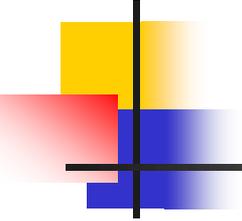
$$\left( \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b \right) := \left( (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, a < x < a + \delta) \Rightarrow (|f(x) - b| < \varepsilon) \right).$$

# Лівостороння границя функції



---

$$\left( \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b \right) := ((\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, a - \delta < x < a) \Rightarrow (|f(x) - b| < \varepsilon)).$$



# Необхідна і достатня умова існування границі

---

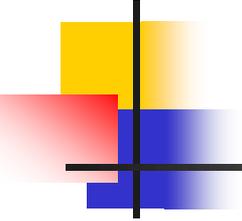
$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b$$

# Границя функції на мові послідовностей

Число  $b$  називається **границею функції**  $f(x)$  при  $x \rightarrow a$ , якщо для будь-якої послідовності значень аргументу  $x_n$ , що має границею число  $a$ , відповідна послідовність значень функції має границею число  $b$

# Типи невизначеностей для алгебраїчних функцій

$$\left[ \frac{0}{0} \right], \left[ \frac{\infty}{\infty} \right], \left[ \infty - \infty \right].$$



# Теорема Безу

---

**Остача від ділення  
многочлена  $P_n(x)$  на  
двочлен типу  $x - a$   
дорівнює значенню  
многочлена при  $x = a$**

# Виділення критичного множника

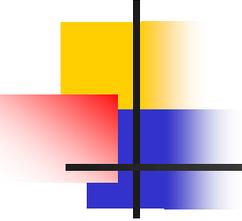
---

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P_n(a)}{Q_m(a)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)P_{n-1}(x)}{(x-a)Q_{m-1}(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{P_{n-1}(x)}{Q_{m-1}(x)}.$$

# Приклад розкриття невизначеності для раціональних функцій

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 + 6x - 5}{x^2 - 1} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 - x + 5)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x + 5}{x+1} = \frac{1-1+5}{1+1} = \frac{5}{2}$$

# Невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$ для ірраціональних функцій



---

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} &= \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-1-4}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{\sqrt{x-1}+2} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

# Розкриття невизначеності

виду  $\left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$

У цьому випадку і чисельник, і знаменник рекомендується поділити на найбільший степінь змінної, що входить як до знаменника, так і до чисельника

# Приклад розкриття невизначеності виду

$$\left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\sqrt{x} + x + 1}{2\sqrt{x^3} + x - 10x} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] =$$

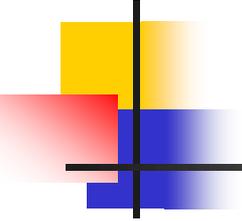
$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x\sqrt{x} + x + 1}{x\sqrt{x}}}{\frac{2\sqrt{x^3} + x - 10x}{x\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x}}}{2\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \frac{10}{\sqrt{x}}} = \frac{1}{2}.$$

# Невизначеність виду $[\infty - \infty]$

Цей тип невизначеності зводиться до невизначеностей  $\left[\frac{0}{0}\right]$  або  $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

# Приклад розкриття невизначеності типу $[\infty - \infty]$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} \right) = [\infty - \infty] = \\ & = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+x-2}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{1-x^2} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} -\frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{x+1} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$



# Контрольні запитання

---

- **Означення границі функції**
- **Нескінченно мала величина**
- **Нескінченно велика величина**
- **Правостороння границя функції**
- **Лівостороння границя функції**
- **Необхідна і достатня умова існування границі функції**
- **Типи невизначеностей**
- **Правила розкриття невизначеностей**