ВИЩА МАТЕМАТИКА

для студентів ОКР “Бакалавр”

галузь знань – 12 «Інформаційні технології»

спеціальність – 122 «Комп’ютерні науки та інформаційні технології»

Автор:

Доцент кафедри вищої та прикладної математики

Шостак Сергій Володимирович

Тема14: Особливі границі

1. Перша особлива границя
2. Друга особлива границя
3. Еквівалентні нескінченно малі величини

Перша особлива границя

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Наслідок 1 з першої особливої границі

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$$

Наслідок 2 з першої особливої границі

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

Наслідок 3 з першої особливої границі

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}=1$$

Наслідок 4 з першої особливої границі

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\frac{a}{b}$$

Приклад застосування першої особливої границі

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$$

Заміна змінної при використанні першої особливої границі

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1-\sin\frac{x}{2}}{(\pi-x)^2}=\left|\begin{array}{l}\pi-x=y\\ x=\pi-y\\ x\to\pi\\ y\to 0\end{array}\right|=\lim_{y\to0}\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{y}{2}\right)}{y^2}=\lim_{y\to0}\frac{1-\cos\frac{y}{2}}{y^2}=$$

$$=\lim_{y\to0}\frac{2\sin^2\frac{y}{4}}{y^2}=\lim_{y\to0}\frac{2\sin^2\left(\frac{y}{4}\right)}{16\left(\frac{y}{4}\right)^2}=\frac{1}{8}$$

Друга особлива границя

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$$

Позначення експоненти

$$e^{x} = \exp(x)$$

Наслідок 1 з другої особливої границі

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

Наслідок 2 з другої особливої границі

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}=e^{ab}$$

Наслідок 3 з другої особливої границі

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

Наслідок 4 з другої особливої границі

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Типи невизначеностей, які розкриваються за 2-ю особливою границею

$$\left[\frac{0}{0}\right],\ \left[1^{\infty}\right],\ \left[\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}\right]$$

Приклад розкриття невизначеності виду $\left[\frac{0}{0}\right]$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\ln(2x+1)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x\cdot 2x\cdot 5x}{5x\cdot\ln(2x+1)\cdot 2x}=\left|\begin{array}{l}\dfrac{\sin 5x}{5x}\xrightarrow[x\to 0]{}1\\ \dfrac{2x}{\ln(2x+1)}\xrightarrow[x\to 0]{}1\end{array}\right|=\frac{5}{2}$$

Приклад розкриття невизначеності виду $[1^\infty]$

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}} = [1^\infty] = \lim_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{\sin 2x}{x\sin 2x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left((1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}}\right)^{\frac{\sin 2x}{x}} = \left| \begin{array}{l} (1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}} \xrightarrow[x\to 0]{} e \\ \dfrac{\sin 2x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 2 \end{array} \right| = e^2$$

Приклад розкриття невизначеності виду $\left[\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}\right]$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{2x-1}=\left[\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right)^{2x-1}=\left[1^{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}\cdot\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\left(1+\frac{-2}{x}\right)^{2x}\left(1+\frac{3}{x}\right)}=\frac{e^{3\cdot 2}\cdot 1}{e^{-2\cdot 2}\cdot 1}=e^{10}$$

Еквівалентні нескінченно малі величини одного порядку мализни

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \text{const} \neq 0$$

$$\alpha(x) \text{ і } \beta(x)$$

- нескінченно малі величини (н.м.в.)

Приклад нескінченно малих величин

$$\alpha(x) = x \qquad \beta(x) = \sin 2x$$

н.м.в. *одного порядку мализни*

при $x \to 0$

Еквівалентні нескінченно малі величини вищого порядку мализни

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$$

$\alpha(x)$ і $\beta(x)$ - н.м.в. *вищого порядку мализни*

Еквівалентні н.м.в.

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$$

Низка еквівалентних н.м.в.

$$x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim e^x - 1 \sim \ln(x+1)$$

Контрольні запитання

- Перша особлива границя
- Наслідки з першої особливої границі.
- Друга особлива границя
- Наслідки з другої особливої границі.
- Еквівалентні нескінченно малі величини
- Низка еквівалентних н.м.в.