

# ВИЩА МАТЕМАТИКА

---

для студентів ОКР “Бакалавр”

галузь знань – 12 «Інформаційні технології»

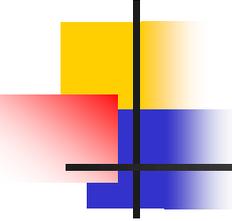
спеціальність – 122 «Комп’ютерні науки та інформаційні технології»

Автор:

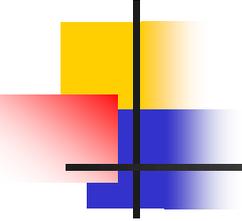
Доцент кафедри вищої та прикладної математики

Шостак Сергій Володимирович

# Тема 14: Особливі границі

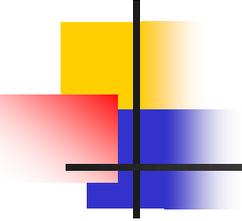
- 
- 
- 1. Перша особлива границя**
  - 2. Друга особлива границя**
  - 3. Еквівалентні нескінченно малі величини**

# Перша особлива границя



---

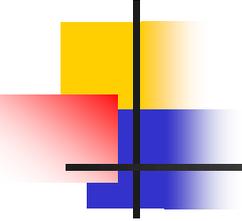
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



# Наслідок 1 з першої особливої границі

---

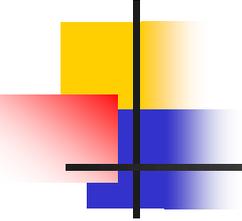
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$



## Наслідок 2 з першої особливої границі

---

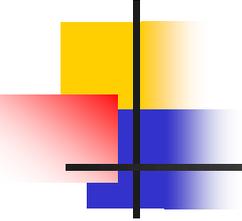
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$



# Наслідок 3 з першої особливої границі

---

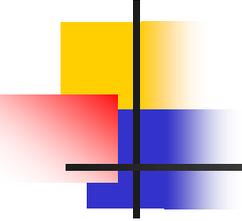
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} = 1$$



# Наслідок 4 з першої особливої границі

---

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$$



# Приклад застосування першої особливої границі

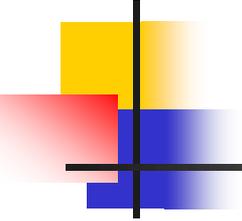
---

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{2 \left( \frac{x}{2} \right)^2} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

# Заміна змінної при використанні першої особливої границі

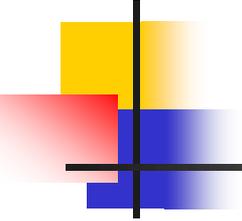
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin \frac{x}{2}}{(\pi - x)^2} &= \left. \begin{array}{l} \pi - x = y \\ x = \pi - y \\ x \rightarrow \pi \\ y \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{y}{2} \right)}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \frac{y}{2}}{y^2} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{y}{4}}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \left( \frac{y}{4} \right)}{16 \left( \frac{y}{4} \right)^2} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

# Друга особлива граница



---

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$$



# Позначення експоненти

---

$$e^x = \exp(x)$$

# Наслідок 1 з другої особливої границі

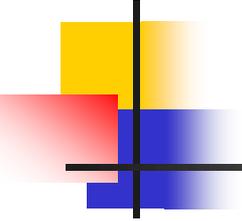
---

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

# Наслідок 2 з другої особливої границі

---

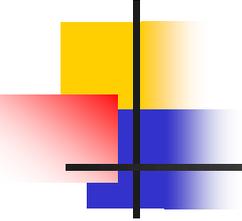
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{a}{x} \right)^{bx} = e^{ab}$$



# Наслідок 3 з другої особливої границі

---

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$



# Наслідок 4 з другої особливої границі

---

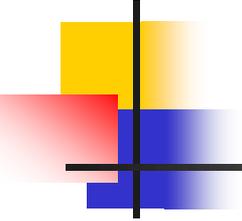
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

# Типи невизначеностей, які розкриваються за 2-ю особливою границею

$$\left[ \frac{0}{0} \right], \left[ 1^\infty \right], \left[ \left( \frac{\infty}{\infty} \right)^\infty \right]$$

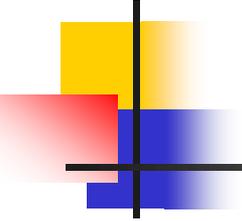
# Приклад розкриття невизначеності виду $\left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right]$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\ln(2x+1)} = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x \cdot 2x \cdot 5x}{5x \cdot \ln(2x+1) \cdot 2x} = \left| \begin{array}{l} \frac{\sin 5x}{5x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \\ \frac{2x}{\ln(2x+1)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \end{array} \right| = \frac{5}{2}$$



# Приклад розкриття невизначеності виду $[1^\infty]$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin 2x)^{\frac{1}{x}} &= [1^\infty] = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin 2x)^{\frac{\sin 2x}{x \sin 2x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( (1 + \sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}} \right)^{\frac{\sin 2x}{x}} = \left| \begin{array}{l} (1 + \sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} e \\ \frac{\sin 2x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2 \end{array} \right| = e^2 \end{aligned}$$



# Приклад розкриття невизначеності виду $\left[ \left( \frac{\infty}{\infty} \right)^\infty \right]$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{x-2} \right)^{2x-1} = \left[ \left( \frac{\infty}{\infty} \right)^\infty \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1 + \frac{3}{x}}{1 - \frac{2}{x}} \right)^{2x-1} = \left[ 1^\infty \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left( 1 + \frac{3}{x} \right)^{2x} \cdot \left( 1 - \frac{2}{x} \right)}{\left( 1 + \frac{-2}{x} \right)^{2x} \left( 1 + \frac{3}{x} \right)} = \frac{e^{3 \cdot 2} \cdot 1}{e^{-2 \cdot 2} \cdot 1} = e^{10}$$

# Еквівалентні нескінченно малі величини одного порядку мализни

---

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \text{const} \neq 0$$

$\alpha(x)$  і  $\beta(x)$

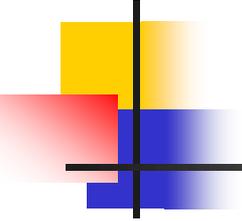
- нескінченно малі величини (н.м.в.)

# Приклад нескінченно малих величин

---

$$\alpha(x) = x \quad \beta(x) = \sin 2x$$

*Н.М.В. одного порядку мализни  
при  $x \rightarrow 0$*

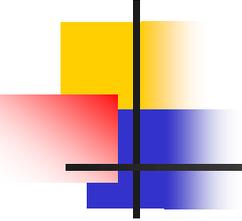


# Еквівалентні нескінченно малі величини вищого порядку мализни

---

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$$

$\alpha(x)$  і  $\beta(x)$  - н.м.в. *вищого порядку  
мализни*

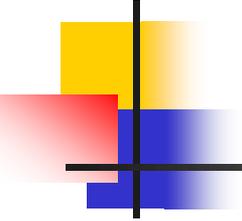


# Еквівалентні н.м.в.

---

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$$

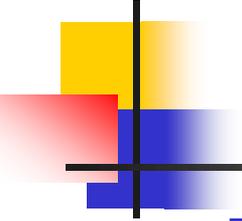
# Низка еквівалентних н.м.в.



---

$$x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim e^x - 1 \sim \ln(x + 1)$$

# Контрольні запитання



---

- Перша особлива границя
- Наслідки з першої особливої границі.
- Друга особлива границя
- Наслідки з другої особливої границі.
- Еквівалентні нескінченно малі величини
- Низка еквівалентних н.м.в.