

ВИЩА МАТЕМАТИКА

для студентів ОКР “Бакалавр”

галузь знань – 12 «Інформаційні технології»

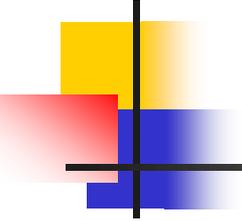
спеціальність – 122 «Комп’ютерні науки та інформаційні технології»

Автор:

Доцент кафедри вищої та прикладної математики

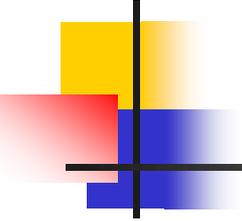
Шостак Сергій Володимирович

Тема 15: Неперервність функції



- 1. Поняття неперервності функції**
- 2. Властивості неперервних функцій**
- 3. Класифікація точок розриву функцій**

Означення неперервності



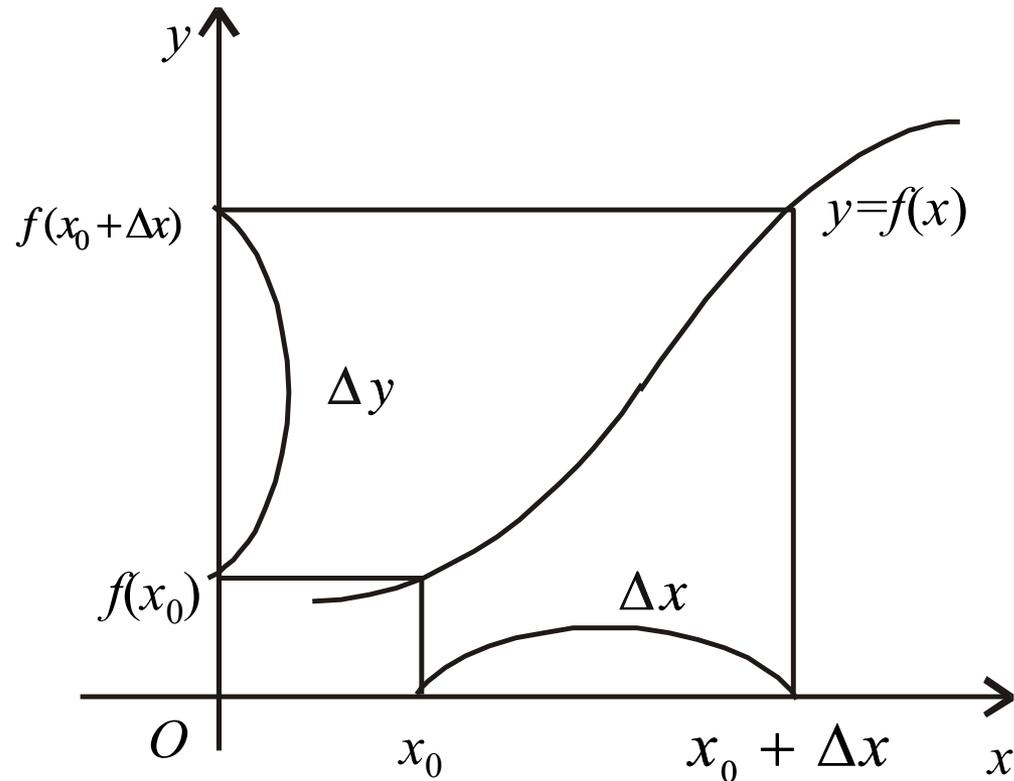
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Означення неперервності на мові кванторів

$$\left(\begin{array}{l} f(x) \text{ — неперервна} \\ \text{при } x = x_0 \end{array} \right) :=$$

$$:= \left((\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon) \right)$$

Приріст функції та приріст аргументу

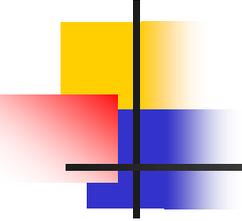


Означення неперервності через прирости

$$\left(\begin{array}{l} f(x) \text{ — неперервна} \\ \text{при } x = x_0 \end{array} \right) :=$$
$$= ((\Delta x = x - x_0 \rightarrow 0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\Delta y = f(x) - f(x_0) \rightarrow 0))$$

Означення неперервності через односторонні границі

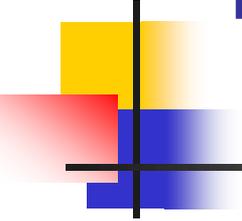
$$\left(\begin{array}{l} f(x) \text{ — неперервна} \\ \text{при } x = x_0 \end{array} \right) := \left(\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0) \right)$$



Приклад знаходження приросту функції

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right)$$

Неперервність суми функцій



$f(x)$ і $g(x)$ неперервні 

$f(x) \pm g(x)$ неперервні

Неперервність добутку функцій

$f(x)$ і $g(x)$ неперервні 

$f(x) \cdot g(x)$ неперервні

Неперервність частки функцій

$f(x)$ і $g(x)$ неперервні 

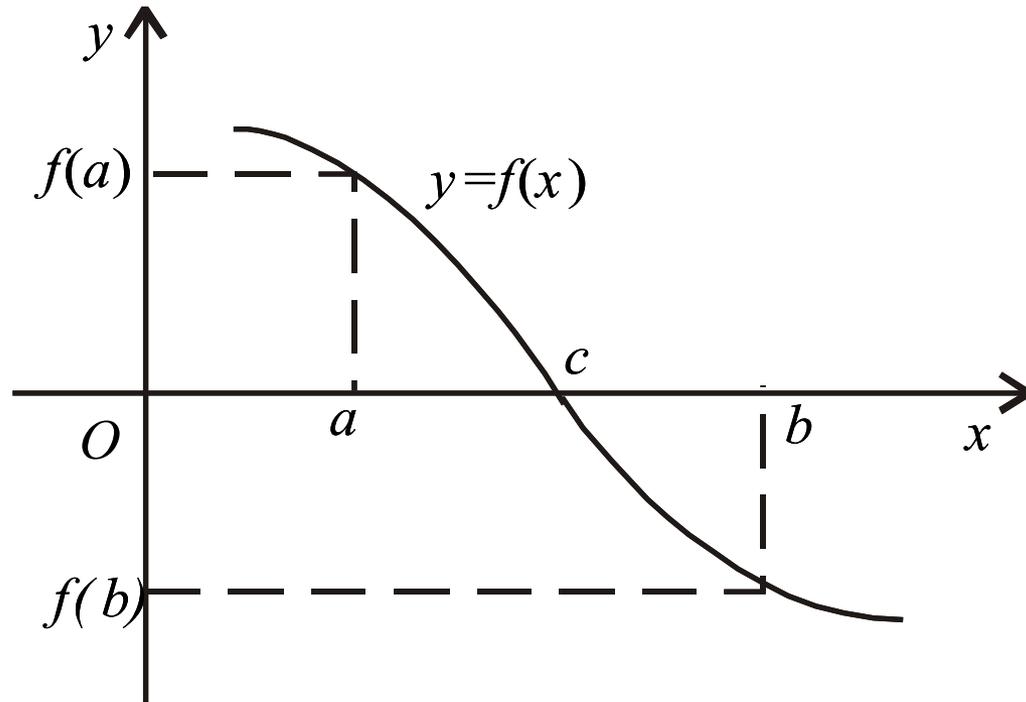
$\frac{f(x)}{g(x)}$ неперервні

Неперервність складеної функції

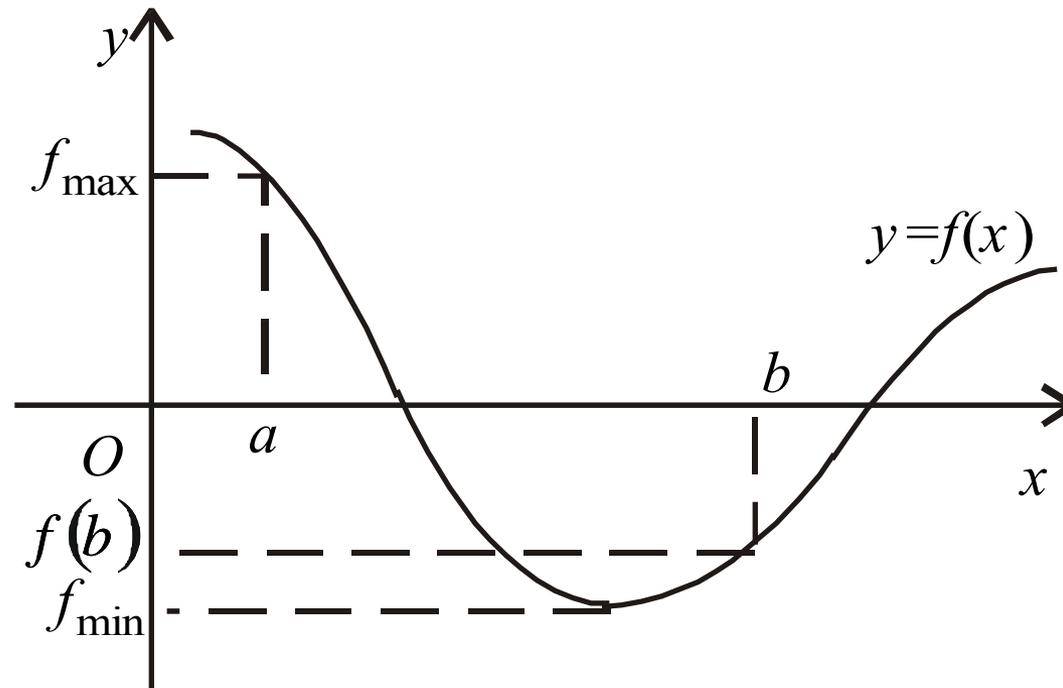
$y = F(u)$ і $y = F(u)$ — неперервні →

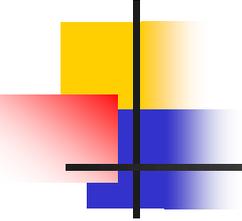
$y = F(\varphi(x))$ — неперервна

Ілюстрація теореми Коші



Ілюстрація теореми Вейєрштрасса



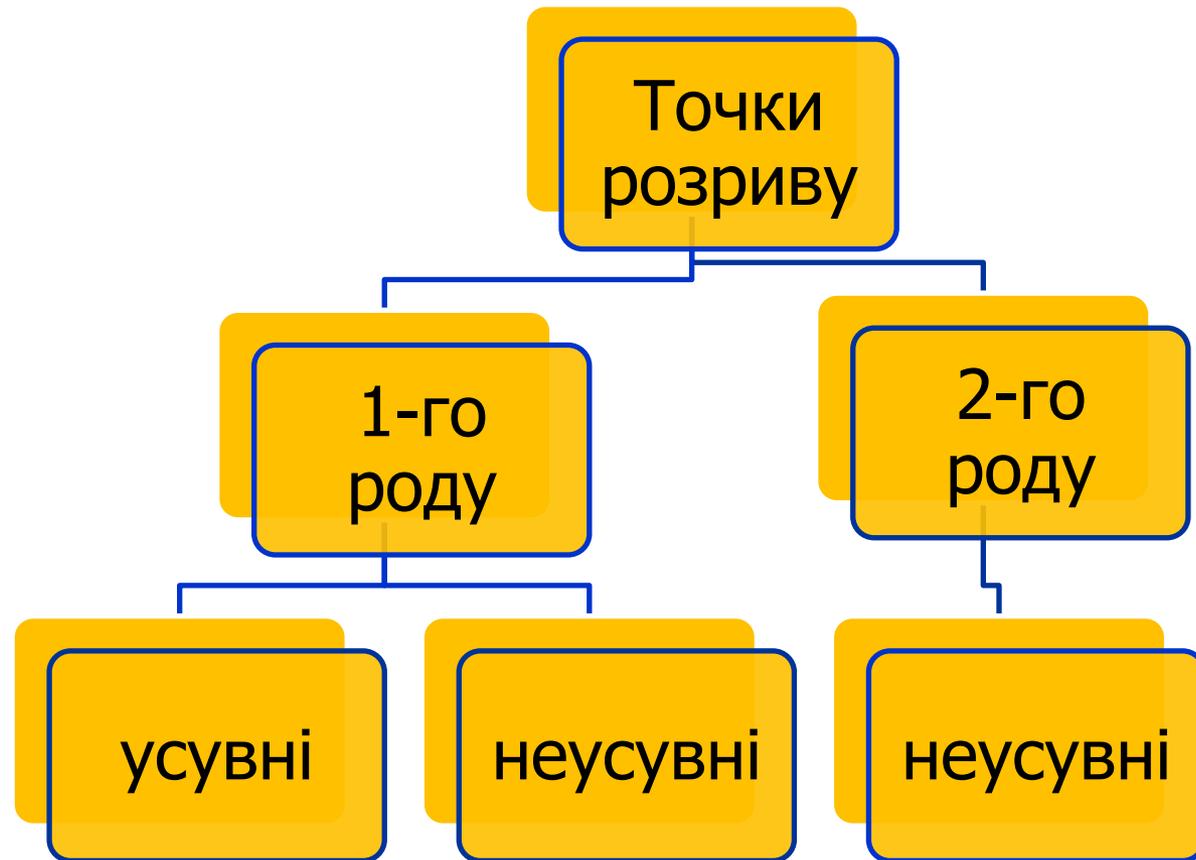


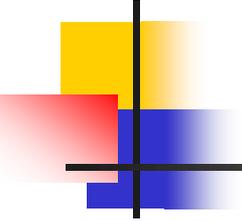
Розривна функція

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$$

якщо порушується хоча б
одна з умов рівності

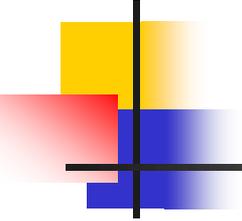
Класифікація точок розриву функції





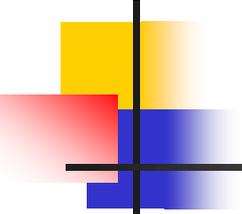
Неусувний розрив 1-го роду

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$$



Усұвний розрив 1-го роду

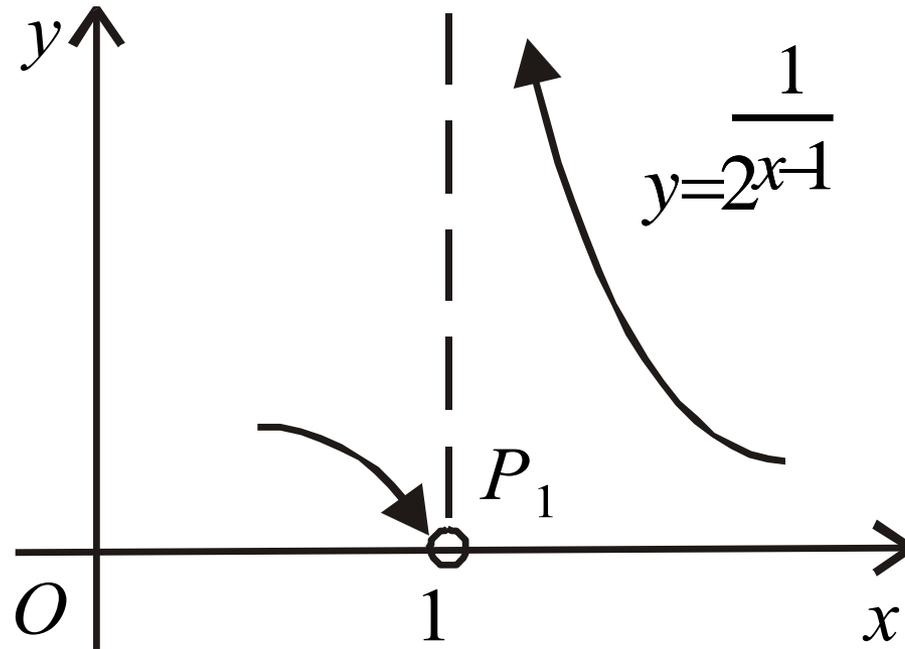
$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0)$$



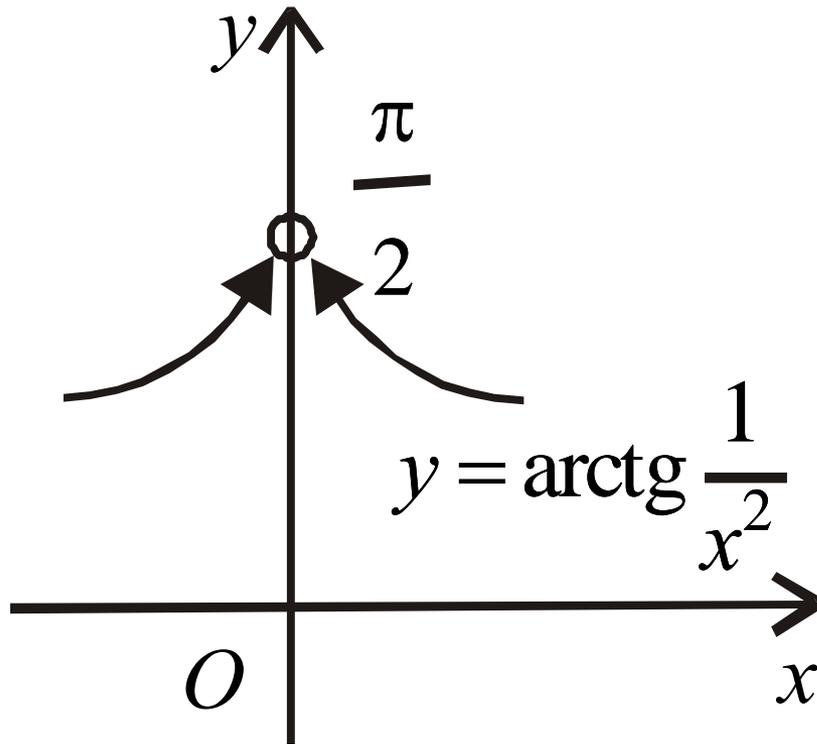
Методика дослідження функцій на неперервність

1. Знайти область визначення функції
2. Дослідити функцію на неперервність у відкритих проміжках
3. Визначити скінченні граничні точки (с.г.т.) і обчислити односторонні границі функції у цих точках
4. Зробити висновок про характер точок розриву (якщо вони є) і побудувати графік функції поблизу цих точок

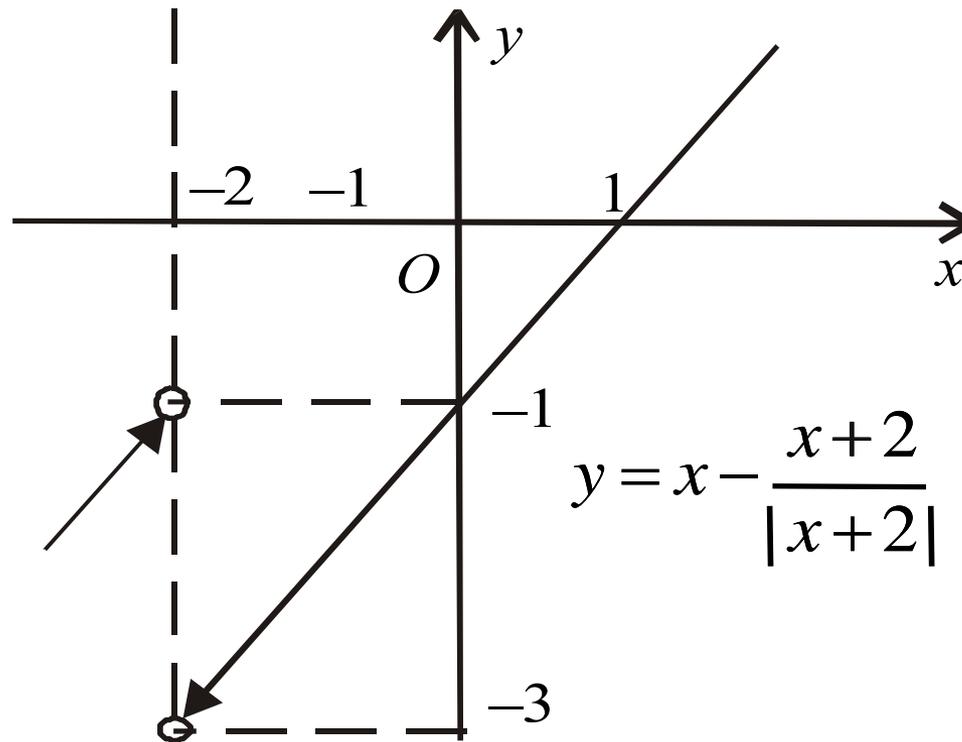
Приклад функції з точкою розриву 2-го роду



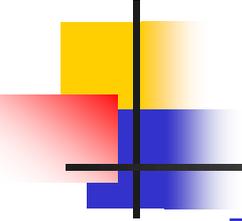
Приклад функції з точкою розриву 1-го роду (розрив усувний)



Приклад функції з точкою розриву 1-го роду (розрив неусувний)



Контрольні запитання



- Означення функції розривної в точці
- Означення точки розриву 1-го роду
- Означення точки розриву 2-го роду
- Схема дослідження функцій на неперервність