 Дослідити виробничий процес продуктивності праці за допомогою класичної моделі виробничої функції Кобба-Дугласа:

* оцінити параметри моделі та перевірити їх на значущість, побудувати інтервали довіри;
* розрахувати коефіцієнт множинної кореляції, детермінації і надати їх інтепретацію;
* перевірити коефіцієнт множинної детермінації на суттєвість за критерієм Фішера;
* розрахувати точковий прогноз обсягу продукції для заданих прогнозних значень обсягу капіталу і обсягу трудових ресурсів.

Щоб виконати поставлене завдання, скористаємося пакетом «Excel».

Для побудови моделі продуктивності праці спочатку ідентифікуємо змінні. Так, *Y* – залежна змінна, результативна ознака, продуктивність праці;  – незалежні, пояснювальні змінні, де  – фондомісткість продукції,  – коефіцієнт плинності ро­бочої сили,  – процент втрат робочого часу,  – стаж роботи.

Таблиця 1

Вихідні та розрахункові дані для побудови економетричної моделі продуктивності праці

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Місяць | Продуктивність праці, гр. од/ людино-год | Фондомісткість продукції, гр. од. | Коефіцієнт плинності робочої сили, % | Рівень втрат робочого часу, % | Стаж, рік |
| 1-й | 52 | 72 | 13,0 | 2,7 | 5,0 |
| 2-й | 53 | 74 | 12,5 | 2,8 | 5,5 |
| 3-й | 50 | 72 | 12,0 | 3,0 | 5,0 |
| 4-й | 51 | 73 | 11,0 | 3,2 | 6,0 |
| 5-й | 54 | 70 | 10,1 | 3,2 | 7,0 |
| 6-й | 55 | 67 | 9,0 | 3,3 | 8,0 |
| 7-й | 57 | 67 | 8,5 | 3,4 | 10,0 |
| 8-й | 52 | 62 | 8,2 | 3,6 | 10,0 |
| 9-й | 60 | 72 | 8,0 | 3,7 | 10,5 |
| 10-й | 60 | 72 | 5,5 | 3,7 | 11,0 |
| 11-й | 62 | 74 | 5,0 | 3,4 | 13,0 |
| 12-й | 64 | 75 | 4,7 | 4,0 | 10,0 |
| 13-й | 65 | 76 | 4,6 | 4,2 | 12,0 |
| 14-й | 67 | 80 | 4,0 | 4,3 | 13,0 |
| 15-й | 67 | 82 | 4,1 | 4,7 | 14,0 |
| 16-й | 62 | 84 | 4,2 | 4,8 | 14,5 |
| 17-й | 63 | 84 | 4,5 | 4,8 | 15,5 |
| 18-й | 66 | 87 | 4,0 | 4,9 | 17,0 |
| 19-й | 68 | 90 | 4,0 | 5,0 | 16,5 |
| 20-й | 70 | 92 | 3,0 | 4,7 | 17,5 |
| 21-й | – | 92 | 4,0 | 5,2 | 17,6 |
| 22-й | – | 93 | 5,0 | 5,3 | 17,7 |
| 23-й | – | 93 | 5,0 | 5,4 | 17,8 |
| 24-й | – | 94 | 6,0 | 5,4 | 17,9 |

Специфікуємо модель:

загальний вигляд моделі продуктивності праці такий:

.

У цій економетричній моделі *u* – стохастична складова, яка враховує вплив випадкових чинників на рівень продуктивності праці.

Аналітичний вигляд цієї функції подамо у двох формах:

1. лінійній ;
2. степеневій .

Відповідно розрахункові функції за вибірковою сукупністю будуть такі:

1. ;

2. ,

 – оцінка *j*-го параметра моделі .

Зауважимо, що степенева функція реалізується як лінійно-логарифмічна, а тому, прологарифмувавши вираз цієї функції ліворуч і праворуч, одержимо:

.

На підставі 17-ти спостережень (*n* = 17), використовуючи   
1 МНК, побудуємо економетричну модель для лінійної і степеневої функцій.

Побудова економетричної моделі на основі матричного оператора 1 МНК, пакет «Excel».



;

;

;

; .

Економетрична модель:

.

Запишемо логарифми вихідної інформації:

.



Характеристики дисперсійного аналізу:

.

; .

Результати розрахунку економетричної моделі на основі стандартної програми «Линейн»:

 – лінійна модель

 – степенева модель

Перший рядок результатів розрахунку містить оцінки параметрів моделі.

*Для лінійної моделі:*



*Для степеневої моделі:*



Другий рядок в обох таблицях результатів містить стандартні похибки оцінок параметрів моделі.

*Для лінійної моделі:*



*Для степеневої моделі:*



Третій рядок в обох таблицях результатів містить два показники  і .

*Для лінійної моделі:*

; .

*Для степеневої моделі:*

; .

Четвертий рядок також містить дві характеристики: *F*-кри­терій та ступені свободи .

*Для лінійної моделі:*

; .

*Для степеневої моделі:*

; .

П’ятий (останній) рядок таблиць результатів містить два показники:

1. суму квадратів регресії – ;
2. суму квадратів залишків – .

Зауважимо, що в таблиці результатів степеневої моделі маємо ці характеристики для логарифмів залежної змінної:

1) ;

2) ;

3) результати обчислення економетричної моделі та кількісних характеристик взаємозв’язку на основі стандартної програми «Регресія» (Excel, розділ меню «Сервіс»).

Вивід підсумків

|  |  |
| --- | --- |
| Регресійна статистика | |
| Множинний коефіцієнт кореляції | 0,949622 |
| R-квадрат | 0,901782 |
| Нормована помилка | 0,869043 |
| Стандартна помилка | 2,110562 |
| Кількість спостережень | 17 |

Дисперсійний аналіз

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Показники | *df* | SS | MS | F | Значущість *F* |
| Регресія | 4 | 490,7816 | 122,6954 | 27,54431 | 5,76E-06 |
| Залишок | 12 | 53,45368 | 4,454473 |  |  |
| Разом | 16 | 544,2353 |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Змінні | Коеф. | Ст. пох. | *t*-крит. | Знач. *t* | Нижня межа | Верхня межа |
| Y-переріз | 60,14654 | 10,76299 | 5,588273 | 0,000118 | 36,69599 | 83,59708 |
| Змінна 1 | 0,316353 | 0,130773 | 2,419098 | 0,032371 | 0,031423 | 0,601283 |
| Змінна 2 | –1,93605 | 0,498263 | –3,88559 | 0,002166 | –3,02167 | –0,85042 |
| Змінна 3 | –2,31555 | 2,309234 | –1,00274 | 0,33578 | –7,34694 | 2,715834 |
| Змінна 4 | –0,18151 | 0,512519 | –0,35416 | 0,729367 | –1,29819 | 0,935171 |

Розрахуємо залишки моделі

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Спостереження | Прогноз | Залишки |
| 1 | 50,59577 | 1,404229 |
| 2 | 51,87419 | –1,125811 |
| 3 | 51,83715 | –2,44493 |
| 4 | 53,44493 | –0,0568 |
| 5 | 54,0568 | 0,175671 |
| 6 | 55,19777 | 1,802226 |
| 7 | 55,19777 | –1,73371 |
| 8 | 53,73371 | 3,03786 |
| 9 | 56,96214 | –1,7115 |
| 10 | 61,7115 | –1,64387 |
| 11 | 63,64387 | 0,303757 |
| 12 | 63,69624 | 1,619933 |
| 13 | 63,38007 | 1,605961 |
| 14 | 65,39404 | 2,274593 |
| 15 | 64,72541 | –2,8422 |
| 16 | 64,8422 | –2,8422 |
| 17 | 64,07987 | –1,07987 |

Результати розрахунку за цією програмою дають найбільшу кількість характеристик взаємозв’язку.

Регресійна статистика

 – коефіцієнт кореляції;

 – коефіцієнт детермінації без урахування числа ступенів свободи;

 – коефіцієнт детермінації з урахуванням числа ступенів свободи (формула Амемія):

;

 – стандартна похибка залишків;

 – кількість спостережень.

Дисперсійний аналіз містить 5 стовпчиків.

Перший – ступені свободи: ; ; .

Другий – суми квадратів:  – регресії;

 – залишків;

 – залежної змінної.

Третій – дисперсії:  – регресії;

 – залишків.

Четвертий – *F*-критерій: .

П’ятий – рівень значущості *F*-критерію  

Роглянемо оцінки параметрів моделі та перевіремо їх значущість.

Цей блок результатів містить 9 стовпчиків.

Перший і другий – назва та рівень оцінок параметрів моделі:

*Y* – переріз – ;

змінна *Х*1 – ;

змінна *Х*2 – ;

змінна *Х*3 – ;

змінна *Х*4 – .

Третій стовпець – стандартні похибки оцінок параметрів моделі:

; ; ;

; .

Четвертий – *t*-критерії:

; ; ;

; .

П’ятий стовпець – рівень значущості:

; ; ;

; .

Якщо рівень значущості менший за 0,05, то з імовірністю 0,95 можна стверджувати, що оцінені параметри – достовірні. Звідси параметри  і  – недостовірні.

Інші чотири стовпці з імовірністю 0,95 визначають верхні то нижні границі оцінок параметрів моделі, в яких вони існують.

Виведення залишків

У цьому блоці результатів наводяться розрахункові значення залежної змінної та залишки, які визначаються як відхилення розрахункових значень залежної змінної від фактичних.

Отже, економетрична модель продуктивності праці матиме такий вигляд:

1) *у лінійній формі:*

;

2) *у степеневій формі* (зауважимо, що ми її реалізуємо у лінійно-логарифмічній формі):

.

2. Оцінка достовірності моделі продуктивності праці

Використаємо чотири характеристики:

1) коефіцієнт детермінації ;

2) коефіцієнт кореляції ;

3) критерій Фішера (*F*-критерій);

4) критерій Стьюдента (*t*-критерій).

Коефіцієнти детермінації для лінійної і степеневої моделей відповідно дорівнюють:

1) , або 90,18%;

2) , або 90,24%.

Коефіцієнт детермінації для лінійної моделі показує, що варіація продуктивності праці на 90,18% визначається варіацією досліджуваних чинників (фондомісткістю продукції, коефіцієнтом плинності робочої сили, процентом втрат робочого часу і стажем роботи), а для степеневої – на 90,24%.

Для оцінювання достовірності параметрів економетричних моделей обчислюємо коефіцієнти кореляції за формулою: .

Так, *для лінійної моделі*: ;

*для степеневої моделі*: .

Отже (щодо лінійної і степеневої моделей), між продуктивністю праці, з одного боку, та фондомісткістю продукції, коефіцієнтом плинності робочої сили, втратами робочого часу і стажем роботи, з іншого, існує досить тісний зв’язок.

Для того щоб оцінити достовірність економетричної моделі в цілому, обчислимо критерій Фішера (*F*-критерій) за формулою

.

Оскільки коефіцієнт детермінації для обох моделей продуктив­ності праці практично однаковий (0,902), то критерій Фішера

.

Табличне значення *F*-критерію в разі  і  ступенів свободи і коли рівень значущості , дорівнює 5,78.

Оскільки , то гіпотеза про значущість зв’язку приймається й обидві моделі продуктивності праці є статистично значущими.

Зауважимо, що достовірність економетричної моделі може бути досягнута лише за рахунок окремих параметрів, а інші можуть бути не достовірними, тому доцільно оцінити значущість кожного параметра моделей. Для цього обчислимо *t*-критерії (критерії Стьюдента) за формулою :

 (11),

де  – оцінка параметра моделі;  – стандартна похибка параметра.

Обчислимо спочатку *t*-критерії *для лінійної моделі*:

;

;

;

;

*t*-критерії *для степеневої моделі*:

;

;

;

.

Табличне значення *t*-критерію при  і  дорівнює 2,179.

Оскільки в лінійній моделі для перших двох параметрів , то ці параметри моделі продуктивності праці є значущими, а для *а*3 і *а*4 виконується нерівність , тому вони – незначущі.

У степеневій моделі лише для  маємо , що свідчить про достовірність цього параметра, а для інших оцінок параметрів  , тому ці параметри – недостовірні.

Згідно з обчисленими щойно характеристиками (коефіцієнти детермінації, кореляції, критерії Фішера та Стьюдента), які використані для оцінювання достовірності моделі, можна зробити висновок, що побудовані нами моделі відображають тісний зв’язок між продуктивністю праці та чинниками, що впливають на неї.

Оскільки прийняття рішень завжди пов’язане з оцінюванням прогнозного (очікуваного) значення, то дуже важливо визначити прогнозні якості моделі. Для цього з 20-ти спостережень вихідної інформації для побудови моделі продуктивності праці використано 17. Останні три спостереження використаємо, щоб оцінити якість прогнозу на основі моделі.

Для останніх трьох спостережень підставимо значення чинників в отримані моделі продуктивності праці і знайдемо значення продуктивності праці.

На основі *лінійної моделі*:

, ,

.

На основі *степеневої моделі*:

, ,

.

1. Визначимо відхилення між фактичними і розрахунковими значеннями продуктивності праці.

*Лінійна модель*:



;

;

*степенева модель*:

;

;

.

2. Знайдемо похибки прогнозу.

а) середньоарифметична абсолютна похибка:

.

*Лінійна модель*: МАЕ = 0,94; *степенева модель*: МАЕ =1,34;

б) середньоквадратична похибка прогнозу:

.

*Лінійна модель*: МSЕ = 1,17; *степенева модель*; МSЕ = 2,22;

в) відносна похибка прогнозу:

,

*лінійна модель*: МАРЕ = 1,38 %; *степенева модель*: МАРЕ =   
= 1,96 %;

г) коефіцієнт невідповідності Тейла:

;

*лінійна модель*: Кт – 1,08 / (68,02 4 + 67,01) = 1,08/135,1 = 0,008;

*степенева модель*: Кт – 1,49 / (68,02 + 68,60) = 1,49 / 136,62 = 0,011.

Як свідчать похибки прогнозу, моделі продуктивності праці (лінійна і степенева) мають великі прогнозні можливості – абсолютні та відносні похибки незначні за рівнем і свідчать про добру апроксимацію моделі. Коефіцієнти невідповідності Тейла наближаються до нуля, що свідчить також про якісний прогноз. Порівнявши кожну з похибок для лінійної та степеневої моделі, можна помітити, що кожна з них має дещо нижчий рівень для лінійної моделі, але це не означає, що вона має істотні переваги перед степеневою, оскільки лінійна модель дає обернений зв’язок між стажем і продуктивністю праці, що суперечить теоретичним уявленням про цей зв’язок.

3. Визначимо прогноз продуктивності праці на наступні чотири місяці року, задавши очікуване значення чинників на цей період.

|  |  |
| --- | --- |
| *Лінійна модель:* | *Степенева модель:* |
| *Y*21 = 66,27 | *Y*21 = 66,96 |
| *Y*22 = 64,40 | *Y*22 = 63,95 |
| *Y*23 = 64,15 | *Y*23 = 63,77 |
| *Y*24 = 62,51 | *Y*24 = 61,60 |

Визначимо відхилення очікуваного рівня продуктивності праці, отриманого на базі лінійної та степеневої моделей:

;

;

;

.

Як свідчать наведені відхилення, прогнозні рівні продуктивності праці, що їх здобуто на основі лінійної та степеневої моделей, різняться неістотно. Прогнозний рівень продуктивності праці може бути основою для прийняття рішень стосовно зміни цього показника на останній квартал року.

Наведений приклад виробничої функції показує, що ця економетрична модель дає змогу досить широко проаналізувати виробничу діяльність, визначити шляхи її вдосконалення з метою підвищення ефективності. Обґрунтованість такого аналізу повністю залежить від достовірності економетричної моделі, від того, наскільки вона адекватна реальному процесу.