Практичне заняття 1-2

Тема: Обчислення визначників

Мета: Засвоїти методику обчислення визначників другого та третього порядку.

План практичних занять

1. Обчислення визначників 2-го порядку.
2. Обчислення визначників *3*-го порядку.

Термінологічний словник ключових понять

Транспонування — зміна місцями рядків і стовпців визначника або матриці.

Мінор k-го порядку — визначник, утворений з елементів визначника або матриці, розміщених на перетині *k* рядків і *k* стовпців.

Алгебраїчне доповнення до мінора — визначник, що складається з елементів, котрі не належать тим рядкам і тим стовпцям визначника, з яких утворено мінор, і береться зі знаком $(-1)^{i_1+\ldots+i_k+j_1+\ldots+j_k}$, де i_1 i_2, ..., i_k, j_1, j_2, ..., j_k, — індекси відповідно тих рядків і тих стовпців, які брали участь в утворенні мінора.

Навчальні завдання

1. Обчислити визначник за правилом трикутників.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 5 + (-4)\cdot 4\cdot 2 + 1\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot 3\cdot 1 - 4\cdot 1\cdot 2 -$$

$$-(-4)\cdot 1\cdot 5 = 30 - 32 + 1 - 6 - 8 + 20 = 5.$$

2. Утворити доповняльний мінор другого порядку.

Для визначника Δ запишемо мінор другого порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 2 & 8 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \qquad M_2^1 = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Цей мінор утворено з елементів, які містяться на перетині першого і третього рядків та другого і четвертого стовпців. Викреслимо ці рядки та стовпці з визначника Δ, дістанемо $M_{2д}^1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$ — мінор, доповняльний до мінора другого порядку M_2^1:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 2 & 8 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

3.Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Скориставшись означенням визначника, утворимо алгебраїчну суму добутків елементів, наприклад першого рядка, на їх алгебраїчні доповнення:

$$\Delta = 2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} - 1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+3\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Отже, тепер потрібно обчислити три визначники третього порядку, оскільки визначник, який входить до третього доданка, обчислювати не потрібно. Зрозуміло, що чим більше нулів маємо в рядку або стовпці, за елементами якого утворюється алгебраїчна сума, тим менше визначників (n–1)-го порядку потрібно обчислювати.

Згідно з властивістю 8 утворимо в одному зі стовпців визначника Δ, наприклад в останньому, нулі. Якщо нулі утворюються в стовпці, використовуються елементи рядків, а якщо нулі утворюються в рядках, то навпаки — елементи стовпців. У четвертому стовпці є дві одиниці, одну з них візьмемо як *розв'язувальний елемент* і на підставі властивості 8 виконаємо перетворення:

1) елементи третього (робочого) рядка перепишемо у перетворюваний визначник без змін;

2) помножимо всі елементи третього рядка на –3, додамо до відповідних елементів першого рядка, а результат запишемо в перший рядок;

3) помножимо всі елементи третього рядка на –1, додамо до відповідних елементів другого рядка, а результат запишемо у другий рядок;

4) помножимо всі елементи третього рядка на –2, додамо до відповідних елементів четвертого рядка, а результат запишемо в четвертий рядок.

Після цих перетворень значення визначника не зміниться, але він набере такого вигляду:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -7 & -10 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \\ -4 & -7 & 4 & 0 \end{vmatrix}.$$

Тепер, скориставшись означенням визначника і розклавши його за елементами четвертого стовпця, дістанемо:

$$\Delta = 1\cdot(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} -7 & -10 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \\ -4 & -7 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 7 & 10 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 4 \end{vmatrix}.$$

Останній визначник записано згідно з властивістю 5, і тепер обчислення визначника четвертого порядку звелось до обчислення одного визначника третього порядку. Його можна обчислити за означенням, а можна знову утворити нулі, скажімо, у другому рядку, скориставшись одиницею як розв'язувальним елементом і виконавши дії згідно з властивістю 8 зі стовпцями. Дістанемо:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 7 & -4 & -18 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 18 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 32 - 18 = 14.$$

Зрозуміло, що за такою схемою можна обчислити визначник будь-якого порядку.

Завдання для перевірки знань

1. Скориставшись правилом обчислення визначників 3-го порядку, довести властивості 1—8.

2. Скориставшись властивостями визначників, обчислити:

а) $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & ax_1+bx_2 \\ y_1 & y_2 & ay_1+by_2 \\ z_1 & z_2 & az_1+bz_2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} (a_1+b_1)^2 & a_1^2+b_1^2 & a_1+b_1 \\ (a_2+b_2)^2 & a_2^2+b_2^2 & a_2+b_2 \\ (a_3+b_3)^2 & a_3^2+b_3^2 & a_3+b_3 \end{vmatrix}$.

Відповідь. а) 0; б) 0; в) 0.

3. Скориставшись властивостями визначників, довести тотожності:

а) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x+b_1y+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x+b_2y+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x+b_3y+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ba \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$.

4. Розклавши визначник за рядком або стовпцем, що складається лише з букв, обчислити:

а) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$.

Відповідь. а) $8a+15b+12c-19d$; б) $2a-8b+c+5d$; в) $abcd$.

5. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 35 & 59 & 71 & 52 \\ 42 & 70 & 77 & 54 \\ 43 & 68 & 72 & 52 \\ 29 & 49 & 65 & 50 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix}$.

Відповідь. а) 90; б) 27; в) 52; г) 10; д) 100.

6. Побудувати всі можливі мінори другого порядку визначника:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 9 & 8 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 9 & 8 & 3 & 1 \\ 7 & 7 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

Скільки таких мінорів?