Практичне заняття 3-4

Тема: Матриці. Дії над матрицями.

Мета: Засвоїти дії з матрицями, навчитися будувати обернені матриці.

План практичних занять

1. Освоєння дій з матрицями.
2. Побудова оберненої матриці.

Термінологічний словник ключових понять

Невироджена матриця — квадратна матриця, визначник якої відмінний від нуля.

Ранг матриці — найвищий порядок відмінного від нуля мінора матриці.

Навчальні завдання

1. Знайти AB, якщо $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

● Добуток AB можна утворити, оскільки матриця A має розмір 2×4, а матриця B — розмір 4×3. Матриця $C=AB$ матиме розмір 2×3. Щоб знайти C_{11}, утворимо алгебраїчну суму добутків елементів першого рядка матриці A на елементи першого стовпця матриці B: $C_{11}=5\cdot(-2)+0\cdot0+3\cdot1+4\cdot(-1)=-11$. Аналогічно:

$$C_{12}=5\cdot2+0\cdot3+3\cdot0+(-1)(-1)=11,\ C_{13}=5\cdot0+0\cdot1+3(-2)+(-1)(-2)=-4;$$
$$C_{21}=(-1)(-2)+2\cdot0+1\cdot1+4\cdot4=19,$$
$$C_{22}=(-1)2+2\cdot3+1\cdot0+4(-1)=0,\ \ C_{23}=(-1)0+2\cdot1+1(-2)+4(-2)=-8.$$

Отже, $C=AB=\begin{pmatrix} -11 & 11 & -4 \\ 19 & 0 & -8 \end{pmatrix}$.

Утворити BA — неможливо.

2. $A=\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Перевірити самостійно, що $C=AB=\begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}$.

3. Побудувати матрицю, обернену до матриці $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

● Обчислимо:

$$\Delta(A)=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 10 & -5 & 0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 3 & -1\\ 10 & -5\end{vmatrix}=15-10=5.$$ $\Delta(A)\neq 0$ — обернена матриця існує.

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 1\\ -1 & 4\end{vmatrix}=5,\ A_{12}=-\begin{vmatrix} -2 & 1\\ 2 & 4\end{vmatrix}=10,\ A_{13}=\begin{vmatrix} -2 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=0,\ A_{21}=-\begin{vmatrix} -1 & 0\\ -1 & 4\end{vmatrix}=4,\ A_{22}=\begin{vmatrix} 3 & 0\\ 2 & 4\end{vmatrix}=12,$$

$$A_{23}=-\begin{vmatrix} 3 & -1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=1,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} -1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1,\ A_{32}=-\begin{vmatrix} 3 & 0\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-3,\ A_{33}=\begin{vmatrix} 3 & -1\\ -2 & 1\end{vmatrix}=1.$$

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 4 & -1\\ 10 & 12 & -3\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5}\\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5}\\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}.$$

Переконаємося, що матриця A^{-1}, побудована нами, справді є оберненою до матриці A. Знайдемо AA^{-1}:

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5}\\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5}\\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Завдання для перевірки знань

1. Обчислити добутки матриць:

а) $\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4\\ 6 & 9 & -5\\ 4 & 7 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5\\ 4 & -1 & 3\\ 9 & 6 & 5\end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1\\ -2 & -1 & 2\\ 3 & -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 70 & 34 & -107\\ 52 & 26 & -68\\ 101 & 50 & -140\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -18 & 10\\ 31 & -17\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

2. Знайти матрицю $A=(2B-3C)D$, якщо

$$B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4\\ 2 & -5 & 0 & 6\\ 3 & 1 & 4 & 2\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1\\ 1 & -3 & 4 & 5\\ 2 & -3 & 4 & 5\end{pmatrix};\quad D=\begin{pmatrix} 2 & 3\\ 1 & 1\\ -1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

3. а) $\begin{pmatrix} 1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix}^3$; б) $\begin{pmatrix} 2 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}^n$.

Відповідь. а) $\begin{pmatrix} 13 & -14\\ 21 & -22\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, якщо n — парне; $\begin{pmatrix} 2 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$, якщо n — непарне.

4. Знайти значення

$$f(A)=3A^2-2A+5 \text{ і } f(B)=B^3-7B^2+13B-5,$$

якщо

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -4 & 1\\ 3 & -5 & 2\end{pmatrix}; \qquad B=\begin{pmatrix}5 & 2 & -3\\ 1 & 3 & -1\\ 2 & 2 & -1\end{pmatrix}.$$

Відповідь. $f(A)=\begin{pmatrix}21 & -23 & 15\\ -13 & 4 & 10\\ -9 & 22 & 25\end{pmatrix}$; $f(B)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

5. Матриці A і B називаються *переставними*, якщо $AB=BA$. Знайти всі матриці, переставні з матрицями:

а) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}7 & -3\\ 5 & -2\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

Відповідь. а) $\begin{pmatrix}\alpha & 2\beta\\ 3\beta & \alpha+3\beta\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}\alpha & 3\beta\\ -5\beta & \alpha+9\beta\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ a & \alpha & \beta\\ 0 & 0 & \alpha\end{pmatrix}$, де α,β,γ — будь-які числа.

6. Знайти матриці, обернені до матриць:

а) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & -5 & -1\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

Результат перевірити множенням.