Практичне заняття 5-6

Тема: Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Мета: Розв'язування систем *n* рівнянь з *n* невідомими за правилом Крамера, розв'язування систем рівнянь за допомогою оберненої матриці.

Термінологічний словник ключових понять

Правило Крамера — Якщо головний визначник Δ, складений із коефіцієнтів при невідомих системи *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими відмінний від нуля, то така система рівнянь має єдиний розв'язок (сумісна і визначена), який обчислюється за формулами:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ \ldots,\quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

де Δ — головний визначник системи, який утворюється з коефіцієнтів при невідомих у лівій частині системи ;

Δ_j — визначник, який утворюється заміною *j*-го стовпця в головному визначнику на стовпець вільних членів.

Невироджена матриця — квадратна матриця, визначник якої відмінний від нуля.

Обернена матриця —Матриця A^{-1} називається оберненою матрицею до квадратної невиродженої матриці А, якщо виконується співвідношення: $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Навчальні завдання

1. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = -11 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = -4 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = -11 \end{cases}$$

● Складемо й обчислимо спочатку головний визначник цієї системи: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 27.$ Отже, головний визначник системи рівнянь відмінний від нуля. За правилом Крамера така система має єдиний розв'язок. Знайдемо його. Для цього утворимо і обчислимо ще чотири визначники:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}-11 & 1 & -5 & 1\\ -4 & -3 & 0 & -6\\ 0 & 2 & -1 & 2\\ -11 & 4 & -7 & 6\end{vmatrix}=-27,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}2 & -11 & -5 & 1\\ 1 & -4 & 0 & -6\\ 0 & 0 & -1 & 2\\ 1 & -11 & -7 & 6\end{vmatrix}=27,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}2 & 1 & -11 & 1\\ 1 & -3 & -4 & -6\\ 0 & 2 & 0 & 2\\ 1 & 4 & -11 & 6\end{vmatrix}=54,\quad \Delta_4=\begin{vmatrix}2 & 1 & -5 & -11\\ 1 & -3 & 0 & -4\\ 0 & 2 & -1 & 0\\ 1 & 4 & -7 & -11\end{vmatrix}=0.$$

За правилом Крамера маємо розв'язки:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-27}{27}=-1;\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{27}{27}=1;\ x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{54}{27}=2;\ x_4=\frac{\Delta_4}{\Delta}=\frac{0}{27}=0.$$

Отже, $x_1=-1,\ x_2=1,\ x_3=2,\ x_4=0$ — єдиний розв'язок.

2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}3x_1-x_2=1\\ -2x_1+x_2+x_3=-1\\ 2x_2-x_2+4x_3=-4\end{cases}$$

методом оберненої матриці.

- Запишемо систему в матричному вигляді $AX=B,$ де

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 4\end{pmatrix}.$$

Для матриці A обернену ми побудували в попередньому прикладі, тому за формулою (1.7) маємо:

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5}\\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5}\\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\frac{4}{5}+\frac{4}{5}\\ 2-\frac{12}{5}+\frac{12}{5}\\ 0-\frac{1}{5}-\frac{4}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix}.$$

Отже, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$ — розв'язок системи.

3. Розв'язати матричне рівняння $AX=B,$ де

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix};\ X=\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1 & 7\\ 3 & 5\end{pmatrix}.$$

- Щоб побудувати A^{-1}, знайдемо $\Delta(A)=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}=1$. Оскільки $A_{11}=3$, $A_{12}=-4$, $A_{21}=-2$, $A_{22}=3$, маємо: $A^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$. За формулою (1.7) визначаємо $X=A^{-1}B=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -9 & 11 \\ 13 & -13 \end{pmatrix}$. Отже, шукана матриця $X=\begin{pmatrix} -9 & 11 \\ 13 & -13 \end{pmatrix}$.

Завдання для перевірки знань

1. Розв'язати за правилом Крамера системи рівнянь:

а) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+11x_3+5x_4=2 \\ x_1+x_2+5x_3+2x_4=1 \\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_4=-3 \\ x_1+x_2+3x_3+2x_4=-3 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x_1+5x_2+4x_3+x_4=20 \\ x_1+3x_2+2x_3+x_4=11 \\ 2x_1+10x_2+9x_3+7x_4=40 \\ 3x_1+8x_2+9x_3+2x_4=37 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=-3 \\ 3x_1+5x_2+3x_3+5x_4=-6 \\ 6x_1+8x_2+x_3+5x_4=-8 \\ 3x_1+5x_2+3x_3+7x_4=-8 \end{cases}$; г) $\begin{cases} x_1+x_2-6x_3-4x_4=6 \\ 3x_1-x_2-6x_3-4x_4=2 \\ 2x_1+3x_2+9x_3+2x_4=6 \\ 3x_1+2x_2+3x_3+8x_4=-7 \end{cases}$.

Відповідь. а) $x_1=-2$, $x_2=0$, $x_3=1$, $x_4=-1$; б) $x_1=1$, $x_2=x_3=2$, $x_4=0$; в) $x_1=2$, $x_2=-2$, $x_3=1$, $x_4=-1$; г) $x_1=0$, $x_2=2$, $x_3=\frac{1}{3}$, $x_4=-\frac{3}{2}$.

2. Розв'язати системи рівнянь методом оберненої матриці:

а) $\begin{cases} 3x_1-2x_2-5x_3+x_4=3 \\ 2x_1-3x_2+x_3+5x_4=-3 \\ x_1+2x_2-4x_4=-3 \\ x_1-x_2-4x_3+9x_4=22 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x_1-3x_2+x_3+5x_4=7 \\ x_1-2x_2-2x_3-3x_4=3 \\ 3x_1-x_2+2x_3=-1 \\ 2x_1+3x_2+2x_3-8x_4=-7 \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1-2x_2+5x_3=-2 \\ 2x_1-3x_2+4x_3=-8 \\ 4x_1+x_2-3x_4=-13 \end{cases}$ г) $\begin{cases} -4x_1+x_2-5x_3=-8 \\ 2x_1+2x_2+3x_3=7 \\ -2x_1+2x_2+5x_4=6 \end{cases}$

Відповідь. а) $x_1=-1$, $x_2=3$, $x_3=-2$, $x_4=2$; б) $x_1=2$, $x_2=1$, $x_3=-3$, $x_4=1$; в) $x_1=-3$, $x_2=2$, $x_3=1$; г) $x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=1$.

3. Розв'язати матричні рівняння:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}X\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$; г) $X\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$.

Відповідь. а) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.