Україна
Національний університет біоресурсів
і природокористування України
Кафедра вищої та прикладної математики

ЕЛЕМЕНТИ
ВИЩОЇ АЛГЕБРИ

Методичні рекомендації для вивчення дисципліни
"ВИЩА МАТЕМАТИКА"

КИЇВ – 2016

УДК 378.022:51

Методичні рекомендації містять теоретичний матеріал і розгорнуті розв'язки типових прикладів і задач, необхідних для вивчення вищої алгебри. Цей розділ відповідає навчальній програмі з курсу вищої математики для інженерних факультетів аграрних вищих навчальних закладів.

Методичні рекомендації будуть корисними для самостійної роботи студентів, допоможуть виконати індивідуальні завдання. Запропоновано 60 варіантів індивідуальних завдань.

Рекомендовано Вченою радою ННІ енергетики, автоматики і енергозбереження НУБіП України

Укладачі: Ю.Б. Гнучій, С.В. Шостак

Рецензенти: канд. фіз.-мат. наук, доцент О.Ю. Дюженкова
канд. фіз.-мат. наук, доцент Я.О. Гуменюк

Навчальне видання

ЕЛЕМЕНТИ
ВИЩОЇ АЛГЕБРИ

Методичні рекомендації для вивчення дисципліни
"ВИЩА МАТЕМАТИКА"

Укладачі: ГНУЧІЙ Юрій Борисович
ШОСТАК Сергій Володимирович

Підписано до друку __.__.2015 р. Зам. №______
Формат 60x90 1/16. Папір офсетний. Друк – різографія.
Наклад 50 пр. Ум. друк. арк. 6,87
Друк «ЦП «КОМПРИНТ», Свідоцтво ДК №4131, від 04.08.2011р.
м. Київ, вул. Предславинська, 28
528-05-42

СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ. ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1j}x_j+\ldots+a_{1n}x_n=h_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1+\ldots+a_{ij}x_j+\ldots+a_{in}x_n=h_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+\ldots+a_{mj}x_j+\ldots+a_{mn}x_n=h_m. \end{cases}$$

Якщо **не всі праві частини рівняння** h_i (i=1,…,m) – вільні члени, **дорівнюють нулю,** то система називається **неоднорідною.** Якщо всі h_i=0 (i=1,…,m), то система називається **однорідною**.

Розглянемо систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{12}x_2+\ldots+a_{13}x_3=h_1, \\ a_{21}x_1+\ldots+a_{22}x_2+\ldots+a_{23}x_3=h_3, \\ a_{31}x_1+\ldots+a_{32}x_2+\ldots+a_{33}x_3=h_3. \end{cases} \qquad (1)$$

де a_{jk}, h_j (j,k=1,2,3) - числа, x_j – невідомі.

Визначник, складений із коефіцієнта a_{jk} системи (1)

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad (2)$$

називається *головним визначником* цієї системи.

Зауваження. Розв'язування системи неоднорідних та однорідних рівнянь порядку m>3 проводится за тими ж правилами, що і розв'язування систем порядку m=3.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕОДНОРІДНИХ СИСТЕМ ($\Delta \neq 0$)

I. Нехай головний визначник (2) системи (1) **не дорівнює нулю,** тобто, $\Delta \neq 0$.

Тоді існує єдиний розв'язок системи (1).

1. Цей розв'язок можна знайти за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \tag{3}$$

де

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} h_1 & a_{12} & a_{13} \\ h_2 & a_{22} & a_{23} \\ h_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & h_1 & a_{13} \\ a_{21} & h_2 & a_{23} \\ a_{31} & h_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & h_1 \\ a_{21} & a_{22} & h_2 \\ a_{31} & a_{32} & h_3 \end{vmatrix} \tag{4}$$

Визначник Δ_1 дістаємо із головного визначника Δ, замінюючи перший стовпець визначника Δ стовбцем із правих частин заданих рівнянь системи (1). Аналогічно дістаємо визначники Δ_2 та Δ_3, замінюючи відповідно другий і третій стовпці стовпцем із правих частин заданих рівнянь системи (1).

2. Для знаходження розв'язку неоднорідної системи (1) застосовують також **матричний метод**.

Позначимо через А матрицю, складену із коефіцієнтів системи (1), через Х – матрицю-стовпець, складену із невідомих, через Н – матрицю стовпець, складену із правих частин рівнянь системи (1), тобто

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}.$$

Тоді система (1) у матричній формі матиме вигляд:

$$AX=H. \tag{5}$$

Розв'язком матричного рівняння (5) є

$$\mathbf{X=A^{-1}}H , \tag{6}$$

де A^{-1} – матриця, обернена до даної матриці А, складена із алгебраїчних доповнень A_{ij} (i.j=1,2,3) до відповідних елементів визначника Δ матриці А, і має вигляд

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11}A_{21}A_{31} \\ A_{12}A_{22}A_{32} \\ A_{13}A_{23}A_{33} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Обернена матриця A^{-1} задовольняє умову:

$$A^{-1}A=AA^{-1}=E, \tag{8}$$

де Е – це одинична матриця : $E=.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

ПРИКЛАД 1

Розв'язати систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -3, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Головний визначник даної системи дорівнює

$$\Delta = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = -6 + 12 - 3 - 4 - 27 - 2 = -30 \neq 0 .$$

Отже, існує єдиний розв'язок цієї системи.Знайдемо його за формулами Крамера (3).

Знаходимо

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -7 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 12 + 21 + 4 + 27 + 142 = 60,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 1 & -7 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -21 - 18 + 2 - 14 - 18 + 3 = -30,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & -7 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 12 - 28 - 9 - 12 + 4 + 63 = 30.$$

Тоді, використовуючи формули (3), дістаємо

$$x_1 = \frac{60}{-30} = -2, \; x_2 = \frac{-30}{-30} = 1, \; x_3 = \frac{30}{-30} = -1 .$$

Таким чином, роз'язок даної системи має вигляд $x_{1=}$-2, x_2=1, x_3=-1.

Приклад 2

Знайти розв'язок системи:

$$\begin{cases} 10x_1 - 11x_2 + 5x_3 = 36, \\ 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 15. \end{cases}$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

В цьому випадку головний визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10 & 11 & 5 \\ 7 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 40 - 165 - 105 - 50 + 90 + 154 = -36,$$

тобто $\Delta \neq 0$. Знайдемо розв'язок матричним методом.

Маємо

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -11 & 5 \\ 7 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ H = \begin{pmatrix} 36 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи формулу (7), знайдемо матрицю, обернену до матриці A. Знаходимо алгебраїчні доповнення до елементів головного визначника Δ заданої системи. Маємо

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 9 = 13,\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -(14 - 15) = 1,\ A_{13} = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -21 - 10 = -31,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} -11 & 5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -(-22 + 15) = 7,\ A_{22} = \begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 20 - 25 = -5,\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 10 & -11 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -25,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -11 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -33 - 10 = -43,\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = -(30 - 35) = 5,\ A_{33} = \begin{vmatrix} 10 & -11 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 97.$$

Тоді

$$A^{-1} = -\frac{1}{36}\begin{pmatrix} 13 & 7 & -43 \\ 1 & -5 & 5 \\ -31 & -25 & 97 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо, чи виконується рівність (8). Маємо

$$A^{-1} = -\frac{1}{36}\begin{pmatrix} 13 & 7 & -43 \\ 1 & -5 & 5 \\ -31 & -25 & 97 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & -11 & 5 \\ 7 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{36}\begin{pmatrix} -36 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & 0 \\ 0 & 0 & -36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, рівність (8) справжується.

Згідно з формулою (6) дістаємо розв'язок заданої системи:

$$X = -\frac{1}{36}\begin{pmatrix} 13 & 7 & -43 \\ 1 & -5 & 5 \\ -31 & -25 & 97 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 36 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix} = -\frac{1}{36}\begin{pmatrix} 168+105-645 \\ 36-75+75 \\ -1116-375+1455 \end{pmatrix} = -\frac{1}{36}\begin{pmatrix} -72 \\ 36 \\ -36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, $x_1=2$, $x_2=-1$, $x_3=1$ – розв'язок заданої системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

ПРИКЛАД 3

Розв'язати систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$$

за формулами Крамера і матричним методом. Результати порівняти.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Головний визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 12+12+1+9+4-4 = 34 \neq 0.$$

Знайдемо розв'язок за формулами Крамера (3). Обчислюємо визначники

$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 9 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -4+9-3-36=-34, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 9 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 36+1-27+4=68,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 9 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -6+54+18+2=68.$$

Використовуючи формули (3), дістаємо розв'язок даної системи

$$x_1 = \frac{-34}{34} = -1, x_2 = \frac{68}{34} = 2, x_3 = \frac{68}{34} = 2.$$

Знайдемо тепер розв'язок даної системи матричним методом. Маємо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Обернену матрицю A^{-1} до матриці A можна обчислити,оскільки визначник цієї матриці Δ=34 не дорівнює нулю. Використовуємо формулу (7).Знаходимо алгебраїчні доповнення до елементів визначника Δ матриці A. Маємо

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6+2=8, \; A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(2-6)=4, \; A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1-9=-10,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -(4-1)=-3, \; A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4+3=7, \; A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(-2-6)=8$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4+3=7, \; A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4+1)=-5, \; A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6-2=4.$$

Тоді обернена матриця матиме вигляд:

$$A^{-1} = \frac{1}{34}\begin{pmatrix} 8 & -3 & 7 \\ 4 & 7 & -5 \\ -10 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо розв’язок матричного рівняння за формулою (6).Дістаємо

$$\mathrm{X} = \frac{1}{34}\begin{pmatrix} 8 & -3 & 7 \\ 4 & 7 & -5 \\ -10 & 8 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{34}\begin{pmatrix} -27-7 \\ 63+5 \\ 72-4 \end{pmatrix} = \frac{1}{34}\begin{pmatrix} -34 \\ 68 \\ 68 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Отже, x_1=-1, x=-2, x_3=2, розв’язки,знайдені за формулами Крамера та матричним методом ,співпадають.

РОЗВ’ЯЗАННЯ ОДНОРІДНОЇ СИСТЕМИ ДВОХ РІВНЯНЬ З ТРЬОМА НЕВІДОМИМИ

Розглянемо систему двох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + x_{23}x_3 = 0. \end{cases}$$

В заданій системі кількість невідомих більша,ніж кількість рівнянь.

Тому така система має безліч розв’язків. Ці розв’язки мають вигляд:

$$x_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} t,\ x_2 = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} t,\ x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} t, \qquad (9)$$

де t – параметр, який набуває будь-яке числове значення.

ПРИКЛАД 4

Розв’язати систему

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

РОЗВ’ЯЗАННЯ

Рзв’язок заданої системи визначаємо за формулами (9). А саме маємо

$$x_1 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} t = -10t, x_2 = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} t = 13t, x_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} t = 11t.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ ОДНОРІДНОЇ СИСТЕМИ ТРЬОХ РІВНЯНЬ З ТРЬОМА НЕВІДОМИМИ

Така система має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Розв'язок однорідної системи трьох рівнянь з трьома невідомими залежить від того, чи дорівнює нулю головний визначник системи, чи ні.

Якщо головний визначник Δ системи (10) **не дорівнює нулю,** то система (10) **має єдиний розв'язок,** а саме

$$x_1 = 0 , x_2 = 0, x_3=0.$$

Якщо головний визначник системи (10) Δ=0, **то система (10) має безліч розв'язків .** Знайдемо ці розв'язки.

Нехай $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$

Тоді розв'язок системи (10) матиме вигляд (9),або, що те саме ,

$$x_1=A_{31}t, \ x_2=A_{32}t, \ x_{33}=A_{33}t, \tag{11}$$

де A_{31}, A_{32}, A_{33} – алгебраїчні доповнення до елементів a_{31}, a_{32}, a_{33} головного визначника Δ.

ПРИКЛАД 5

Розв'язати систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Задана система – це однорідна система трьох рівнянь з трьома невідомими. Знайдемо головний визначник системи. Маємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, задана система має безліч розв'язків, які знаходимо, використовуючи формули (11) . Маємо

$$x_1 = A_{31}t \Rightarrow x_1 = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} t = 10t,$$

$$x_2 = A_{32}t \Rightarrow x_2 = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} t = 9t,$$

$$x3 = A_{33}t \Rightarrow x3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} t = 7t.$$

ПРИКЛАД 6

Розв'язати систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

РОЗВ’ЯЗАННЯ

Задана система - це однорідна система трьох рівнянь з трьома невідомими. Знайдемо головний визначник системи. Маємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 16 + 9 - 4 - 2 - 24 + 12 = 7$$

Тобто $\Delta \neq 0$, отже, задана система має єдиний розв’язок

$$x_1=0,\ x_2=0,\ x_3=0.$$

РОЗВ’ЯЗАННЯ НЕОДНОРІДНИХ СИСТЕМ (Δ=0)

Ми розглянули знаходження розв’зку неоднорідної системи (1) у випадку, коли головний визначник $\Delta \neq 0$ матричним методом та за формулами Крамера .

II. Розглянемо випадок, коли **головний визначник (2) системи (1) дорівнює нулю, тобто Δ=0.**

В цьому випадку система (1) має або безліч розв’язків, або не має жодного.

Наведемо **схему знаходження розв’язку системи (1) у випадку коли Δ=0.**

1). Вибираємо два рівняння із рівнянь системи (1), наприклад перші два:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = h_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = h_2. \end{cases}$$

Нехай визначник $\Delta^{(1)}$ не дорівнює нулю, тобто

$$\Delta^{(1)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

2). Зафіксуємо $x_3 = x_3^*$ і розглянемо систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = -a_{13}x_3 + h_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = -a_{23}x_3 + h_2. \end{cases} \tag{12}$$

Система (12) – це система двох рівнянь з двома невідомими x_1, x_2.

Головний визначник $\Delta^{(1)}$ цієї системи не дорівнює нулю, отже існує єдиний розв'язок

$x_1^*, x_2^*,$ який має вигляд:

$$x_1^* = \frac{\Delta_1^{(1)}}{\Delta^{(1)}}, x_2 = \frac{\Delta_2^{(1)}}{\Delta^{(1)}}.$$

3).Підставляємо x_1^*, x_2^*, x_3^* у третє рівняння системи (1):

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = h_3. \tag{13}$$

Якщо x_1^*, x_2^*, x_3^* не задовольняють це рівняння, то система (1) **не має жодного розв'язку.**

Якщо x_1^*, x_2^*, x_3^* **задовольняють** третє рівняння системи (1), то система (1) має безліч розв'язків **вигляду**

$$x_1 = x_1^* + x_1, x_2 = x_2^* + x_2, x_3 = x_3^* + x_3,$$

де x_1, x_2, x_3 – розв'язки однорідної системи (10), що відповідає неоднорідній системі (1).

5).Розв'язки неоднорідної системи (1) в цьому випадку матимуть вигляд

$$x_1 = x_1^* + A_{31}t, x_2 = x_2^* + A_{32}t, x_3 = x_3^* + A_{33}t. \tag{14}$$

ПРИКЛАД 7

Знайти розв'язок системи

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 6. \end{cases}$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Головний визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

В цьому випадку задана система або має безліч розв'язків, або не має жодного розв'язку.

Розглянемо систему перших двох рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2. \end{cases}$$

Знайдемо визначник $\Delta^{(1)} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$

Тоді система

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 4 + x_3, \\ x_1 + 2x_2 = 2 + 3x_3. \end{cases}$$

має єдиний розв'язок, якщо зафіксувати x_3. Нехай, наприклад, $x_3^* = 1.$ Тоді із попередньої системи маємо

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 5, \\ x_1 + 2x_2 = 5. \end{cases}$$

Розв'язок цієї системи знаходимо за формулами (3), які в цьому випадку мають вигляд

$$x_1^* = \frac{\Delta_1^{(1)}}{\Delta^{(1)}}, x_2 = \frac{\Delta_2^{(1)}}{\Delta^{(1)}}.$$

де

$$\Delta_1^{(1)} = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 10 + 5 = 15 . \Delta_1^{(1)} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 5 = 5.$$

Тоді

$$x_1^* = \frac{15}{5} = 3, x_2^* = \frac{5}{5} = 1.$$

Підставляємо

$$x_1^* = 3, x_2^* = 1, x_3^* = 1$$

в третє рівняння заданої системи $3x_1 + x_2 - 4x_3 = 6.$

Маємо 3*3+1-4*1=6, 6=6. Отже, знайдені значення

$$x_1^* = 3, x_2^* = 1, x_3^* = 1$$

задовольняють задану систему. Таким чином, задана система має безліч розв'язків.

Запишемо відповідну однородну систему

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0. \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Згідно з формулами (11), маємо розв'язки цієї системи:

$x_1 = A_{31}t$,де $A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 5$, тобто $x_1 = 5t;$

$x_2 = A_{32}t$, де $A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 5$, тобто $x_2 = 5t;$

$x_3 = A_{33}t$, де $A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 5$,тобто $x_3 = 5t.$

Використовуючи формули (14), маємо розв'язки заданої системи:

x_1=3+5t, x_2=1+5t, x_3=1+5t.

ПРИКЛАД 8

Розв’язати систему

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 1. \end{cases}$$

РОЗВ’ЯЗАННЯ

Головний визначник даної системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -5 & 5 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Тому задана система або має безліч розв’язків, або не має жодного розв’язку.

Розглянемо систему перших двох рівнянь із заданої системи. Це – система двох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$$

Знаходимо визначник

$$\Delta_{x1}^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$$

Оскільки визначник не дорівнює нулю, то система

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 2 - 2x_3, \\ 2x_1 - 2x_2 = 3 - 3x_3. \end{cases}$$

має єдиний розв’язок, якщо зафіксувати $\dot{x}_3$. Нехай, наприклад, $\dot{x}_3=0$. Тоді маємо систему двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 2, \\ 2x_1 - x_2 = 3. \end{cases}$$

Згідно з формулами (3), розв’язок цієї системи має вигляд

$$x_1^* = \frac{\Delta_1^{(1)}}{\Delta^{(1)}}, x_2 = \frac{\Delta_2^{(1)}}{\Delta^{(1)}}.$$

де

$$\Delta_1^{(1)} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 7, \Delta_2^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1.$$

Тоді

$$x_1^\bullet = \frac{7}{5}, x_2^\bullet = -\frac{1}{5}.$$

Підставляємо

$$x_1^\bullet = \frac{7}{5}, x_2^\bullet = -\frac{1}{5}, x_3^\bullet = 0.$$

у третє рівняння заданої $3x_1$-$4x_2$+$5x_3$=61. Дістаємо

$$3 \cdot \frac{7}{5} - 4 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) + 5 \cdot 0 = 5;5 \neq 1.$$

Тобто, знайдені значення

$$x_1^\bullet = \frac{7}{5}, x_2^\bullet = -\frac{1}{5}, x_3^\bullet = 0$$

не задовольняють третє рівняння системи. Отже, задана система не має жодного розв’язку.

ВЕКТОРНА АЛГЕБРА. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

1. Поняття вектора як напрямленого відрізка

Під **величиною** розуміють все те, що має числову характеристику. Величини розділяють на скалярні та векторні.

Скалярна величина, або скаляр, це — величина, яка має лише одну числову характеристику. Наприклад, скалярними величинами є числа, довжина відрізка, температура, маса, шлях, робота тощо.

Означення. **Векторною величиною, або вектором (геометричним),** називається величина, яка характеризується числовою характеристикою і напрямом.

Прикладом векторних величин є: сила, швидкість, струм, прискорення, тощо.

Зображається вектор у вигляді напрямленого відрізка AB (рис. 1), де точка A — початок, а точка B — кінець вектора і позначається $\overrightarrow{AB}$.

Числова характеристика вектора $\overrightarrow{AB}$ називається його **модулем:** $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ і дорівнює довжині відрізка AB у вибраній системі одиниць.

Якщо початок A і кінець B вектора $\overrightarrow{AB}$ співпадають, тобто $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$, то такий вектор називається **нульовим.** Його модуль дорівнює нулеві ($\left|\vec{0}\right| = 0$), а напрям будь-який.

Розділ математики, який вивчає дії над векторами, називається **векторною алгеброю.**

Введемо основні поняття, що стосуються векторів.

Означення. Два вектори називаються **колінеарними,** якщо вони розташовані на одній або паралельних прямих. Колінеарність векторів $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{CD}$ позначається так: $\overrightarrow{AB} \,||\, \overrightarrow{CD}$.
Якщо два колінеарні вектори мають один і той же напрям, то вони називаються **співнапрямленими,** у протилежному випадку — **протилежно спрямованими.**

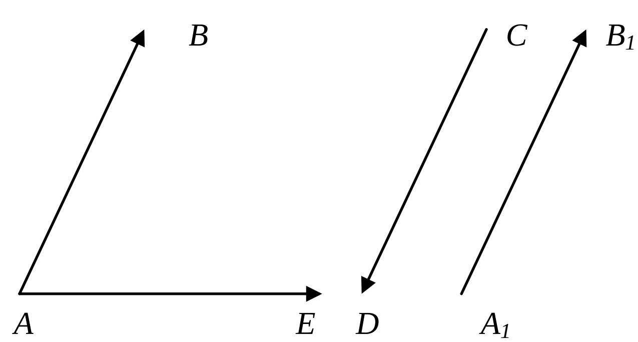


Рис.1

На рис. 1 вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{A_1B_1}$ колінеарні: $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{A_1B_1}$. При цьому $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{A_1B_1}$ — співнапрямлені, а $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ — протилежно спрямовані.

Означення. Два вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{A_1B_1}$ називаються **рівними** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$, якщо вони:

1. мають рівні модулі: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$,
2. колінеарні: $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{A_1B_1}$,
3. співнапрямлені.

На рис. 1 вектори $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{A_1B_1}$ рівні: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$, тому що $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$; $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{A_1B_1}$, і вектори співнапрямлені, а вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AE}$ — не рівні, хоча $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AE}\right|$, але ці вектори не колінеарні. Вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ теж не рівні, хоча $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right|$, $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$, але ці вектори протилежно спрямовані.

Операції порівняння векторів, тобто поняття «більше», «менше», у векторній алгебрі не вводяться.

Очевидно, що із будь-якої точки площини (або простору) можна побудувати вектор, рівний даному. У цьому значенні ми будемо розглядати так звані **вільні вектори** і позначатимемо їх однією літерою: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ тощо. Для того, щоб задати або знайти вектор, потрібно знати дві його характеристики: модуль і напрям.

Означення. Три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називаються **компланарними,** якщо вони лежать в одній або паралельних площинах (рис. 2).

Зауважимо, що якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ лежать у різних паралельних площинах, то завжди можна в одній з них вибрати будь-яку точку O і побудувати три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, що виходять із цієї точки. Отже, не обмежуючи загальності, можна вважати, що компланарні вектори лежать в одній площині.

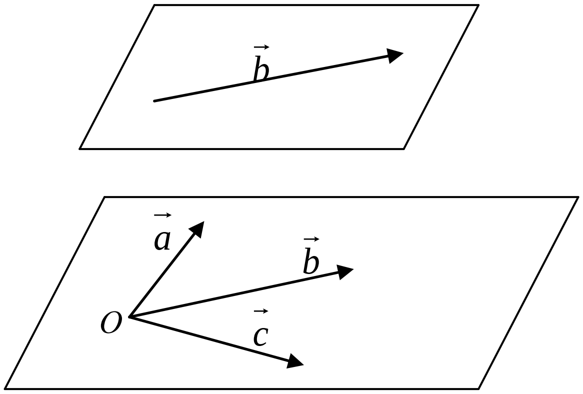


Рис. 2

2. Лінійні операції над векторами.

Лінійними операціями над будь-якими величинами однакової природи називаються **операція їх додавання і операція множення цієї величини на скаляр.**

Означення. **Сумою двох векторів** $\vec{a}$ і $\vec{b}$, розташованих так, що початок вектора $\vec{b}$ збігається з кінцем вектора $\vec{a}$, називається вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, який з'єднує початок вектора $\vec{a}$ з кінцем вектора $\vec{b}$ (рис. 3). Таке правило додавання вектрів називається «правилом трикутника».

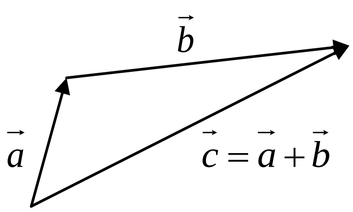


Рис.3

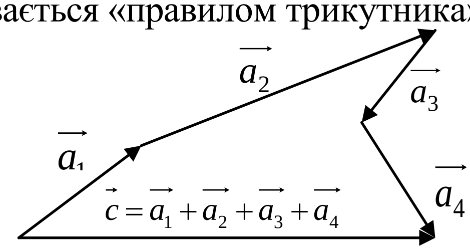


Рис.4

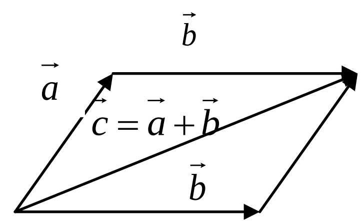


Рис.5

Аналогічно можна визначити суму будь-якої скінченої кількості векторів.

Означення. **Сумою *n*** векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots \overrightarrow{a_n}$ розташованих так, що початок наступного вектора збігається з кінцем попереднього, називається вектор $\vec{c} = \overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \ldots + \overrightarrow{a_n}$, який з'єднує початок першого вектора з кінцем останнього (рис. 4).

Якщо трикутник на рис.3 добудувати до паралелограма, тобто з початку $\vec{a}$ відкласти вектор, що дорівнює $\vec{b}$ (рис. 5), то дістанемо друге правило додавання — «правило паралелограма», яке вводиться тільки для неколінеарних векторів.

Сумою двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, що мають спільний початок, називається вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, який збігається з діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, як на сторонах, і який має початок у спільному початку векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ (рис. 5).

***Означення*. Добутком вектора $\vec{a}$ на дійсний скаляр λ,** називається вектор $\vec{c} = \lambda\vec{a}$ такий, що:

1. модуль вектора $\vec{c}$ дорівнює добутку модулів скаляра λ і вектора $\vec{a}$*:* $|\vec{c}| = \lambda \cdot |\vec{a}|$*;*

2. вектор $\vec{c}$ колінеарний вектору $\vec{a}$: $\vec{c} \parallel \vec{a}$;

3. якщо $\lambda > 0$, то вектори $\vec{c}$ і $\vec{a}$ співнапрямлені, а якщо $\lambda < 0$, то вектори $\vec{c}$ і $\vec{a}$ протилежно спрямовані.

Очевидно, що, якщо $\lambda = 0$, то добуток $\lambda\,\vec{a} = \vec{0}$ — нуль-вектор;

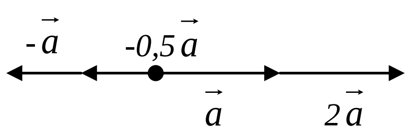


Рис.6

якщо $\lambda = -1$, то добуток $\lambda\,\vec{a} = -\vec{a}$ і дістаємо вектор, **протилежний** вектору $\vec{a}$. На рис. 6 при заданому векторі $\vec{a}$ представлено вектори $2\vec{a}$; $-0{,}5\vec{a}$; $-\vec{a}$.

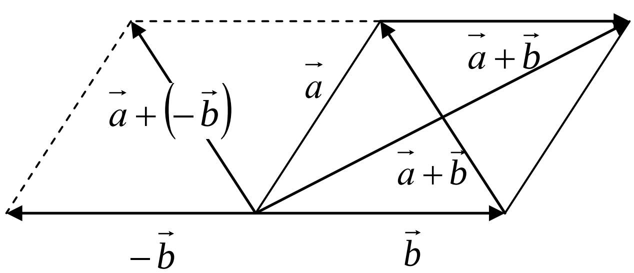


Рис.7

Тепер легко визначити різницю двох векторів. Дійсно: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$, тобто різниця векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є сума вектора $\vec{a}$ і вектора $-\vec{b}$, протилежного $\vec{b}$ (рис. 7). Використовуючи попередні означення суми двох векторів і рис. 7, дістаємо наступне означення.

Означення. **Різницею двох векторів** $\vec{a}$ **і** $\vec{b}$**,** що мають спільний початок, є вектор $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$, який з'єднує кінці цих векторів і напрямлений із кінця від'ємника (вектор $\vec{b}$*)* в кінець зменшуваного (вектор $\vec{a}$).

У паралелограмі, побудованому на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, вектор $\vec{a}-\vec{b}$ співпадає із другою діагоналлю, яка з'єднує кінці векторів $\vec{b}$ і $\vec{a}$ (рис. 7).

Означення. **Лінійною комбінацією *n* векторів** $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots \overrightarrow{a_n}$ називається сума їх добутків на скаляри $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, тобто вектор

$$\vec{c}=\lambda_1\overrightarrow{a_1}+\lambda_2\overrightarrow{a_2}+\ldots+\lambda_i\overrightarrow{a_i}+\ldots+\lambda_n\overrightarrow{a_n}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\overrightarrow{a_i}.$$

Легко переконатися у тому, що у векторній алгебрі мають місце такі самі основні закони лінійних операцій, як і у звичайній алгебрі. А саме:

1) Переставний (комутативний) закон:

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a};$$

2) Сполучний (асоціативний) закон:

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c},$$

$$\lambda_1(\lambda_2\vec{a})=\lambda_2(\lambda_1\vec{a})=\lambda_1\lambda_2\vec{a};$$

3) Розподільний (дистрибутивний) закон :

$$\lambda\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b},$$

$$(\lambda_1+\lambda_2)\vec{a}=\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{a};$$

4) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$; $\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{0}$.

Теорема **(Умова колінеарності векторів).** Два вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ **колінеарні** тоді і тільки тоді, коли має місце співвідношення

$$\vec{a}=\lambda\vec{b},$$

де λ — скаляр, причому $\lambda\neq 0$.

Означення. Вектор $\overrightarrow{a^0}$ називається **одиничним вектором** для вектора $\vec{a}$**,** або **ортом вектора** $\vec{a}$**,** якщо :

1) $|\overrightarrow{a^0}| = 1$

2) $\overrightarrow{a^0} \parallel \vec{a}$

3) $\overrightarrow{a^0}$ співнапрямлений із $\vec{a}$.

Із попереднього випливає, що

$$\overrightarrow{a^0} = \left(1/\left|\vec{a}\right|\right)\vec{a}$$

***Теорема* (Умова компланарності векторів).** Три вектори $\vec{a}$**,** $\vec{b}$**,** $\vec{c}$ **компланарні** тоді і тільки тоді, коли один із них є лінійною комбінацією інших. Наприклад,

$$\vec{c} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b},$$

де λ_1 ,λ_2 — два скаляри, причому хоча б один із них не дорівнює нулеві.

3 Величина напрямленого відрізка. Координатна вісь

***Означення.* Величиною напрямленого відрізка** $\overrightarrow{AB}$**,** розташованого на осі, називається число, яке дорівнює довжині $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ відрізка, взяте із знаком «+», якщо напрям відрізка збігається із напрямом осі, і із знаком «-», якщо напрям відрізка протилежний напряму осі.

Величину відрізка *AB* позначають як *вел.* $\overrightarrow{AB}$ або просто *AB.*

***Теорема* (Основна тотожність між величинами).**

При будь-якому розташуванні точок *A, B, C* на осі *l* величини відрізків *AB, BC, AC* задовольняють співвідношення

$$AC = AB+BC$$

Теорема. Величина напрямленого відрізка $\overrightarrow{AB}$ на координатній осі *Ox* дорівнює різниці координат кінця і початку цього відрізка.

Доведення. Нехай є точки $A(x_1)$ і $B(x_2)$. Тоді величина *AB* відрізка *AB* дорівнюватиме:

$$AB = x_2 - x_1$$

Дійсно, згідно з основною тотожністю між величинами (1) для трьох точок *A, O, B* можна записати:

$$AB = AO+OB = OB - OA=x_2 - x_1$$

Зауважимо, що довжина (або модуль) відрізка *AB* дорівнює:

$$|AB| = |x_2 - x_1|$$

Це ж число (|AB|) визначає віддаль між точками $A(x_1)$ та $B(x_2)$, що лежать на осі Ox.

ПРОЕКЦІЯ ВЕКТОРА НА ВІСЬ

1. Поняття проекції вектора на вісь.

Означення. **Проекцією на вісь *l* точки *M*** називається точка M_1, яка є основою перпендикуляра, опущеного із точки M на вісь l (рис. 1). Позначається це так

$$M_l = пр_l\, M.$$

Означення. **Проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь** l називається величина напрямленого відрізка A_lB_l, розташованого на осі l, тобто

$$Пр_l\, \overrightarrow{AB} = A_lB_l,$$

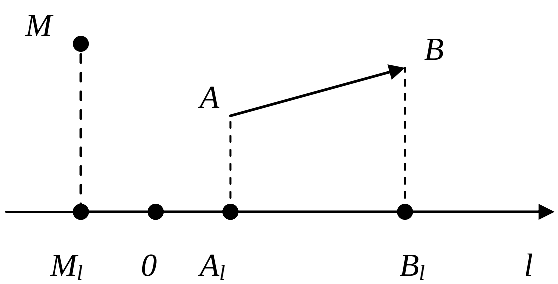


Рис.1

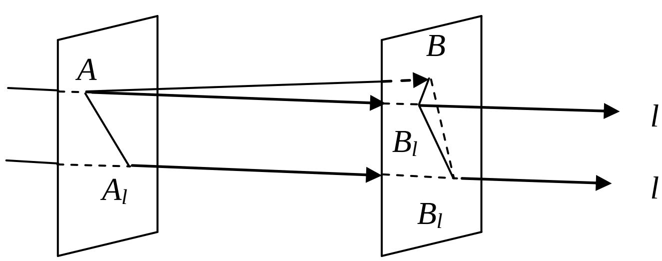


Рис.2

де A_l, B_l — це відповідно проекції початку A та кінця B вектора $\overrightarrow{AB}$ (рис. 1).

Таким чином, проекція вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь є число, яке додатне, якщо напрям $\overrightarrow{A_lB_l}$ збігається з напрямом осі l і від'ємне — в протилежному випадку.

Якщо вектор $\overrightarrow{AB}$ і вісь l не лежать в одній площині (розташовані на перехресних прямих), то для того, щоб спроектувати вектор $\overrightarrow{AB}$ на вісь, потрібно через точки A та B провести площини, перпендикулярні до осі (рис. 2). Точки їх перетину з віссю і будуть відповідно проекціями A_l та B_l точок A та B. Якщо вектор вільний, тобто $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, то його проекція на вісь l позначається так: $a_l = np_l\vec{a}$.

Означення. **Кутом між вектором і віссю** називається найменший кут, на який потрібно повернути вісь так, щоб її напрям збігся з напрямом вектора.

Кут між вектором $\overrightarrow{AB}$ і віссю l позначається так :

$$\left(\overrightarrow{AB}\,\hat{,}\,l\right) = \left(\vec{a}\,\hat{,}\,l\right) = \varphi.$$

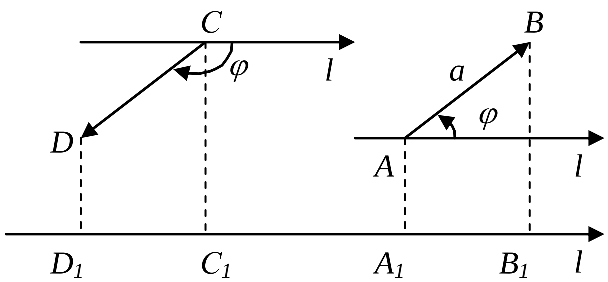


Рис.3

Для того, щоб визначити кут φ, потрібно через початок вектора $\vec{a}$ провести пряму, паралельну осі (рис. 3) (або із будь-якої точки осі побудувати вектор, що дорівнює даному), і кут між вектором $\vec{a}$ і прямою, паралельною осі, і буде φ, при цьому $0 < \varphi < 180°$. На рис. 3 $\varphi = (\overrightarrow{AB}\,\hat{,}\,l) < 90°$, а $\varphi = (\overrightarrow{CD}\,\hat{,}\,l) > 90°$.

Очевидно, якщо φ — гострий кут, то $np_l\vec{a}$ — додатна, а якщо φ — тупий кут, то $np_l\vec{a}$ — від'ємна.

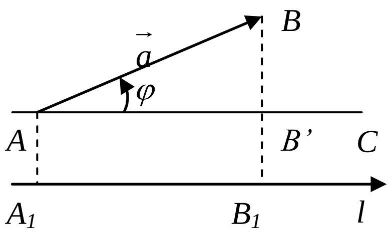
2. Властивості проекцій вектора на вісь

Властивість 1 **(про величину проекції). Проекція вектора на вісь** дорівнює добутку модуля вектора на косинус кута між вектором і віссю:

$$np_l\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|cos(\overrightarrow{AB}\,\hat{,}\,l) = |\overrightarrow{AB}|\,cos\,\varphi,$$

$$np_l\vec{a} = |\vec{a}|\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,l) = |\vec{a}|\,cos\,\varphi. \qquad (1)$$

Для доведення формули (1) розглянемо вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ і його проекцію $\vec{a}_l = \overrightarrow{A_lB_l}$ на вісь l (рис. 4).



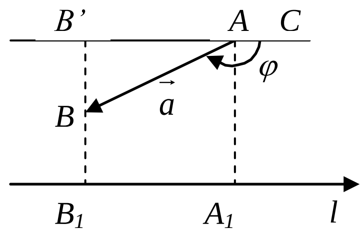


Рис.4

При цьому можливі два випадки $a_l > 0$ (рис. 4. а) і $a_l < 0$ (рис. 4. б).

1) Нехай $пр_l\vec{a} = a_l = A_lB_l > 0$ (рис. 4. а). Проведемо через точку A пряму AC, паралельну осі l, і точку її перетину з перпендикуляром BB_l позначимо B'. Кут $\varphi = (\widehat{AB, l}) = \angle B'AB < 90°$. Користуючись означенням проекції вектора і співвідношеннями у прямокутному трикутнику ABB', дістаємо

$$пр_l\overrightarrow{AB} = A_lB_l = |A_lB_l| = |AB'| = |\overrightarrow{AB}|\cos\varphi.$$

2) Нехай $пр_l\vec{a} = A_lB_l < 0$ (рис. 4. б). Аналогічно попередньому роведемо пряму AC, паралельну осі l. Очевидно, кут $\varphi = (AB,l) = \angle CAB > 90°$, а у $\Delta ABB'$ буде $\angle B'AB = 180° - \varphi$. Користуючись тими ж міркуваннями, що і у випадку 1 маємо

$$пр_l\overrightarrow{AB} = A_lB_l = -|A_lB_l| = -|AB'| = -(|\overrightarrow{AB}|\cos(180° - \varphi)) = |\overrightarrow{AB}|\cos\varphi.$$

Властивість доведена.

Наслідок 1. Із формули (1) дістаємо

$$\cos\varphi = \cos(\widehat{\vec{a}, l}) = пр_l\vec{a}/|\vec{a}| = a_l/|\vec{a}|, \qquad (2)$$

тобто косинус кута між вектором і віссю є відношенням проекції вектора на вісь до його модуля.

Наслідок 2. Рівні вектори мають рівні проекції, тобто якщо $\vec{a} = \vec{b}$, то $a_l = b_l$.

Властивість 2. **Проекція суми векторів** на вісь дорівнює сумі їх проекцій на цю вісь:

$$пр_l(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = пр_l\vec{a} + пр_l\vec{b} + пр_l\vec{c} = a_l + b_l + c_l. \qquad (3)$$

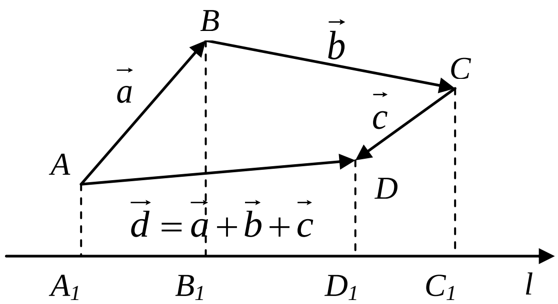


Рис.5

Для доведення розглянемо три вектори, розташовані, наприклад, так, як на рис. 5. Сумою цих векторів є вектор $\vec d$, тобто $\vec d = \vec a + \vec b + \vec c$, або $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$.

Спроектуємо вектори $\vec a, \vec b, \vec c, \vec d$ на вісь l. Використовуючи означення проекції вектора на вісь і основну тотожність між величинами для чотирьох точок A_l, B_l, C_l, D_l дістанемо

$$np_l(\vec a + \vec b + \vec c) = np_l \vec d = A_lD_l = A_lB_l + B_lD_l = A_lB_l + B_lC_l + C_lD_l = np_l \vec a + np_l \vec b + np_l \vec c.$$

Властивість 3. **Проекція на вісь добутку скаляра на вектор** дорівнює добутку скаляра на проекцію вектора на цю вісь:

$$np_l \lambda \vec a = \lambda np_l \vec a. \qquad (4)$$

Для доведення використаємо властивість 1 (формула (1)). Маємо

$$np_l \lambda \vec a = |\lambda \vec a| \cos(\lambda \vec a, l) = |\lambda|\,|\vec a| \cos(\lambda \vec a, l).$$

Нехай $\lambda > 0$. Тоді $|\lambda| = \lambda$ і вектор $\lambda \vec a$ співнапрямлений вектору $\vec a$, тобто $(\lambda \vec a \,\hat{,}\, l) = (\vec a \,\hat{,}\, l) = \varphi$ (рис. 6. а)).

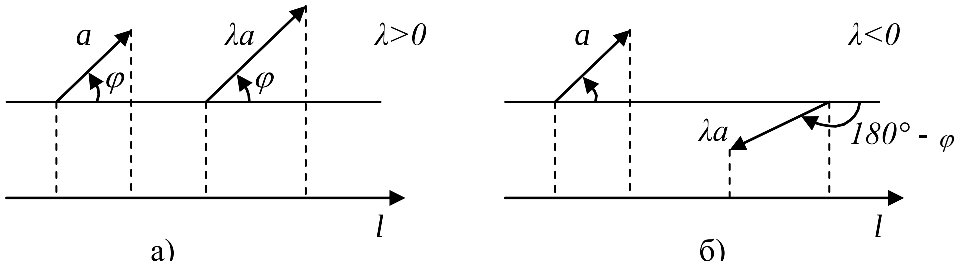


Рис.6

І із останньої рівності дістаємо

$$np_l\,\lambda\vec{a} = \lambda\,|\vec{a}|\cos(\vec{a}, l) = \lambda np_l\,\vec{a}.$$

Якщо $\lambda < 0$ (рис.6. б)), то $|\lambda| = -\lambda$ і вектор $\lambda\vec{a}$ напрямлений протилежно до вектора $\vec{a}$, тобто $(\lambda\vec{a} \,\widehat{,}\, l) = 180° - (\vec{a} \,\widehat{,}\, l) = 180° - \varphi$. Тоді

$$np_l\,\lambda\vec{a} = -\lambda\,|\vec{a}|\cos(180° - (\vec{a} \,\widehat{,}\, l)) = -\lambda|\vec{a}|(-\cos(\vec{a} \,\widehat{,}\, l)) = \lambda|\vec{a}|\cos(\vec{a}, l) =$$
$$= \lambda\, np_l\,\vec{a}.$$

Рівність (4) доведено.

Наслідок. Для колінеарних векторів $\vec{a} \,||\, \vec{b}$ відношення їх проекцій a_l і b_l на вісь l є величина стала, незалежна від положення осі.

Дійсно, якщо $\vec{a} \,||\, \vec{b}$, то $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ і згідно з наслідком 2 із властивості 1 маємо

$$np_l\,\vec{a} = np_l\,\lambda\vec{b} = \lambda\, np_l\,\vec{b},$$

а звідси випливає

$$np_l\,\vec{a}\,/\,np_l\,\vec{b} = a_l\,/\,b_l = \lambda,$$

де λ— скаляр.

Властивості 2 і 3 стосуються лінійних операцій над проекціями векторів і називаються **властивостями лінійності** операції «проекція», їх можна об'єднати в одну, так звану властивість лінійності проекцій: **проекція на вісь *l* лінійної комбінації** декількох векторів дорівнює лінійній комбінації проекцій цих векторів із тими самими скалярами:

$$np_l(\lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} + \lambda_3\vec{c}) = \lambda_1 np_l\,\vec{a} + \lambda_2 np_l\,\vec{b} + \lambda_3 np_l\,\vec{c}$$

Властивість 4. Проекція вектора на координатну вісь дорівнює різниці координат проекцій кінця і початку вектора

$$np_{Ox}\overrightarrow{AB} = A_xB_x = x_2 - x_1, \qquad (5)$$

де $A_x\,(x_1)$ і $B_x\,(x_2)$ — це проекції точок A і B на вісь Ox (рис. 7).

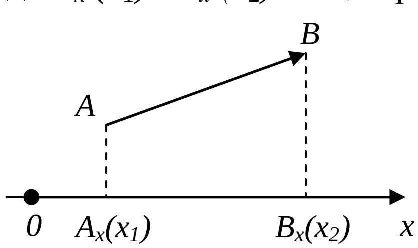


Рис.7

Дійсно, $пр_{Ox}\overrightarrow{AB}$ дорівнює величині A_xB_x напрямленого відрізка A_xB_x. Тоді маємо, що

$$A_xB_x = x_2 - x_1$$

тобто має місце рівність (5).

3.6 Вектор у декартовій системі координат

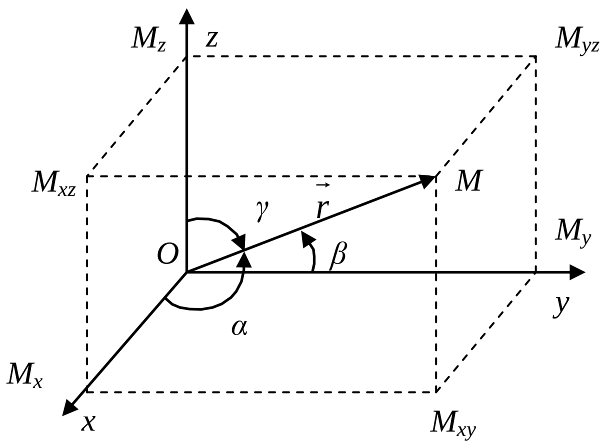


Рис.8

Нехай розглядається декартовий простір.

Означення. **Радіусом-вектором** точки $M(x,y,z)$ називається вектор $\vec{r} = \vec{r}\ (M) = \overrightarrow{OM}$, який з'єднує початок координат з точкою M (рис. 8).

Спроектуємо вектор $\vec{r}$ на координатні осі. Оскільки точка O лежить на всіх осях, досить спроектувати лише точку $M(x,y,z)$. Згідно з означенням проекції вектора на вісь дістаємо

$$пр_{Ox}\vec{r} = r_x = OM_x = x,$$
$$пр_{Oy}\vec{r} = r_y = OM_y = y,$$
$$пр_{Oz}\vec{r} = r_z = OM_Z = z.$$

Тобто проекції радіуса-вектора $\vec{r}\ (M)$ на координатні осі дорівнюють координатам точки М і радіус-вектор записується у декартовій системі так:

$$\vec{r} = \{x;y;z\}.$$

Числа x, y, z називаються **декартовими координатами вектора.**
На відміну від координат точки координати вектора записуються у фігурних дужках.

Очевидно, що кожному вектору $\vec{r}$ відповідає єдина трійка чисел $\{x; y; z\}$ — координати цього вектора у декартовому просторі і, навпаки, кожній упорядкованій трійці $\{x;\ y;\ z\}$ відповідає єдиний вектор $\vec{r}$, проекції якого на осі дорівнюють відповідно числам x, y, z.

Таким чином, існує взаємно однозначна відповідність між радіусом-вектором $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$ і трійкою чисел $\{x;\ y;\ z\}$ — координатами (проекціями) вектора або координатами точки $M(x,y,z)$.

Якщо ж у декартовому просторі взяти довільний вектор $\vec{a}$, то завжди можна побудувати рівний йому радіус-вектор $OM=\vec{r}$ $(\vec{a}=OM)$, координати якого $\{x;\ y;\ z\}$. Оскільки рівні вектори мають і рівні проекції, то і вектор a визначається тією ж трійкою чисел. Звідси випливає друге «аналітичне» означення вектора у декартовому просторі.

Означення. **Вектором** $\vec{a}$ **у декартовому просторі,** або тривимірним вектором, називається величина, що визначається трійкою чисел $\{x;\ y;\ z\}$ — проекціями цього вектора на відповідні координатні осі, і будь-яка упорядкована трійка чисел $\{x;\ y;\ z\}$ є тривимірний вектор з координатами x, y, z.

Будемо надалі позначати будь-який вектор $\vec{a}=\{a_x,\ a_y;\ a_z\}$, а радіус-вектор — $\vec{r}=\{x;\ y;\ z\}$.

Розглянемо тепер вектор $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ з фіксованим початком $A(x_1,y_1,z_1)$ і кінцем $B(x_2,y_2,z_2)$ і визначимо його координати. Для цього спроектуємо AB на координатні осі. Тоді згідно з властивістю 4 проекції вектора на вісь (формула (5)) дістанемо:

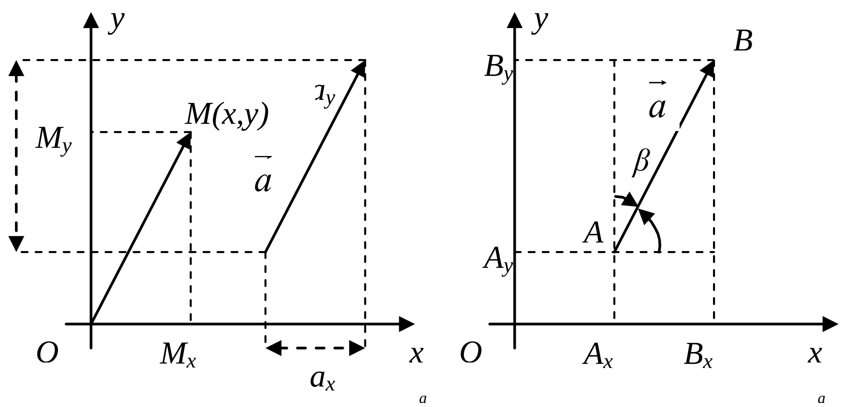
$$a_x=np_{Ox}\overrightarrow{AB}=A_xB_x=x_2-x_1;\quad a_y=np_{Oy}\overrightarrow{AB}=A_yB_y=y_2-y_1,$$
$$a_z=np_{Oz}\overrightarrow{AB}=A_ZB_Z=z_2-z_1.$$

Тобто координати вектора дорівнюють різниці відповідних координат кінця та початку вектора.

Вектор $\overrightarrow{AB}$ згідно зі своїми координатами має вигляд:

$$\overrightarrow{AB}=\{x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1\}.$$

Аналогічно вводиться і вектор $\vec{a}$ на площині (рис. 9).



а) б)

Рис.9

Вектором *a* на декартовій площині або двовимірним вектором називається величина, яка визначається парою чисел $\{x;\, y\}$ — проекціями цього вектора на відповідні координатні осі, і будь-яка упорядкована пара чисел $\{x;\, y\}$ є двовимірний вектор з координатами $x,\ y$.

Радіус-вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ та будь-який вектор $\vec{a}$ чи $\overrightarrow{AB}$ позначаються на площині аналогічно тому, як у просторі. Тобто (рис. 9. а), б)):

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \{x,y\};\ \vec{a} = \{a_x;a_y\};\ AB = \{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1\},$$

де $A(x_1,\, y_1)$ і $B\ (x_2,\, y_2)$ — початок і кінець вектора $\overrightarrow{AB}$.
Отже, викладення достатньо вести лише для тривимірних векторів.

Встановимо зв'язок між означеннями вектора як напрямленого відрізка (геометричного вектора), і тільки що введеним «аналітичним» вектором.

Для простоти міркувань будемо розглядати радіус-вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \{x;y;z\}$ (рис. 8).

Доведемо, що, знаючи координати вектора r, можна завжди визначити його довжину $|\vec{r}\,|$ і напрям. Очевидно, $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ збігається з діагоналлю прямокутного паралелепіпеда, ребрами якого є відрізки OM_x, OM_y, OM_z і, як відомо, в такому паралелепіпеді квадрат діагоналі дорівнює сумі квадратів усіх його ребер:

$$\left|\vec{r}\right| = \left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{(OM_x)^2 + (OM_y)^2 + (OM_z)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (6)$$

тобто модуль вектора дорівнює кореню квадратному із суми квадратів його координат.

Напрям вектора $\vec{r}$ визначається за допомогою косинусів кутів, які утворюються між вектором $\vec{r}$ і відповідними осями: $\alpha = (\widehat{\vec{r}, Ox});$

$\beta = (\vec{r} \,\hat{,}\, Oy)$; $\gamma = (\vec{r} \,\hat{,}\, Oz)$ (див. рис. 8 і рис. 9 б)). Кути α, β, γ називаються напрямними, а їх косинуси: cos α, cos β, cos γ — **напрямними косинусами.** За формулою (2) маємо:

$$\cos(\vec{r} \,\hat{,}\, Ox) = \cos\alpha = x/|\vec{r}|, \ \cos(\vec{r} \,\hat{,}\, Oy) = \cos\beta = y/|\vec{r}|,$$

$$\cos(\vec{r} \,\hat{,}\, Oz) = \cos\gamma = z/|\vec{r}|. \qquad (7)$$

Напрямні косинуси задовольняють співвідношення:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \qquad (8)$$

тобто сума квадратів напрямних косинусів для будь-якого вектора дорівнює одиниці.

У справедливості тотожності (8) легко переконатися, якщо застосувати рівності (7) і (6). Дійсно,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \left(x/\left|\vec{r}\right|\right)^2 + \left(y/\left|\vec{r}\right|\right)^2 + \left(z/\left|\vec{r}\right|\right)^2 =$$

$$= \left(x^2 + y^2 + z^2\right)/\left(\left|\vec{r}\right|\right)^2 = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^2} = 1$$

Отже, всі три кути α, β, γ не можуть бути довільними; знаючи два із них, третій потрібно знаходити із співвідношення (8).

У двовимірному випадку (рис. 9 б)) формула (8) має вигляд

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1.$$

Оскільки cos β = ± sin α, то і дістаємо $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \cos^2\alpha + + \sin^2\alpha = 1$ — відому із тригонометрії формулу.

Таким чином, формули (6) — (7) цілком визначають вектор $\vec{r}$.

Навпаки, знаючи модуль $|\vec{r}|$ і напрям вектора $\vec{r}$, можна завжди знайти його координати або проекції на координатні осі.

Дійсно, якщо вибрано систему координат, то напрям вектора можна задати за допомогою двох кутів, наприклад, α і β між вектором $\vec{r}$ і координатними осями *Ox* і *Oy*. Знайшовши cos α і cos β (наприклад, за таблицею) можна із співвідношення (8) (з точністю до знака) визначити cos γ. А тоді дістаємо:

$$np_{Ox}\vec{r} = x = |\vec{r}|\cos\alpha; \quad np_{Oy}\vec{r} = y = |\vec{r}|\cos\beta; \quad np_{Oz}\vec{r} = z = |\vec{r}|\cos\gamma. \ (9)$$

Отже, знайдено координати вектора $\vec{r} = \{x;\ y;\ z\}$. Еквівалентність двох означень вектора доведено.

Приклад 1. Задано вектор $\vec{a}$ = {1; -2; 2}. Знайти його модуль і напрямні косинуси.

Розв'язання. Згідно з формулами (6) — (7) дістаємо

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3; \quad \cos\alpha = 1/3; \quad \cos\beta = -2/3; \quad \cos\gamma = 2/3.$$

Приклад 2. Відомо, що вектор $\vec{a}$, розташований у площині, утворює з віссю *Ох* кут α = 120° і $|\vec{a}|$= 2. Знайти координати вектора $\vec{a}$.

Розв'язання.

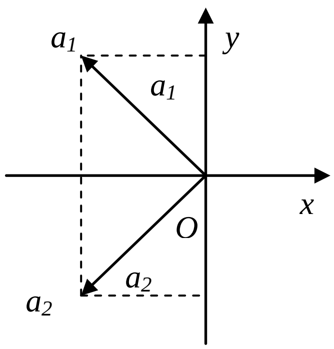


Рис.10

Знаходимо cos α = cos 120° = - cos 60° = - 1/2;
cos β знаходимо із співвідношення (8): $\cos^2\beta = 1 - \cos^2\alpha$;
$\cos^2\beta = 1 - 1/4 = 3/4$,
отже $\cos\beta = \pm\sqrt{3}/2$, і β = 30° або β =150°.
Тоді $a_x = |\vec{a}|\cos\alpha = 2\,(-1/2) = -1$; $a_y = |\vec{a}|\cos\beta = 2\left(\pm\sqrt{3}/2\right) = \pm\sqrt{3}$,
тобто задача має два розв'язки : $\vec{a}_1 = \{-1;\ \sqrt{3}\}$; $\vec{a}_2 = \{-1;\ -\sqrt{3}\}$. На рис. 10 представлено ці вектори.

Зауваження. Якщо вектор $\vec{a}^{\,0}$ — одиничний, тобто $|\vec{a}^{\,0}| = 1$, то згідно з формулою (9) дістаємо $np_{Ox}\,\vec{a}^{\,0} = |\vec{a}^{\,0}|\cos\alpha = \cos\alpha$;

$$np_{Oy}\,\vec{a}^{\,0} = |\vec{a}^{\,0}|\cos\beta = \cos\beta;$$
$$np_{Oz}\,\vec{a}^{\,0} = |\vec{a}^{\,0}|\cos\gamma = \cos\gamma.$$

Отже, $\vec{a}^{\,0} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, і координатами одиничного вектора є напрямні косинуси.

ЛІНІЙНІ ОПЕРАЦІЇ НАД ВЕКТОРАМИ, ЗАДАНИМИ СВОЇМИ КОРДИНАТАМИ

1. Лінійні операції над векторами

Розглянемо деякі поняття векторної алгебри при аналітичному означенні вектора.

Нуль-вектор $\vec{0}$ є вектор, всі координати якого дорівнюють нулеві, тобто $\vec{0}=\{0;\,0;\,0\}$. Очевидно, $|\vec{0}|=0$, а напрям — будь-який.

Два вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ **рівні,** якщо рівні їх координати:

$$\vec{a}=\vec{b} \Leftrightarrow a_x=b_x;\;\; a_y=b_y;\;\; a_z=b_z. \qquad (1)$$

(згідно з наслідком 2 із властивості 1 проекцій вектора), тобто одна векторна рівність еквівалентна трьом скалярним.

Два вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ **колінеарні,** якщо їх відповідні координати пропорційні:

$$\vec{a}\,||\,\vec{b} \Leftrightarrow a_x/b_x = a_y/b_y = a_z/b_z = \lambda \Leftrightarrow \vec{a}=\lambda\vec{b} \qquad (2)$$

Сумою двох векторів $\vec{a}=\{a_x,\, a_y,\, a_z\}$ та $\vec{b}=\{b_x,\, b_y;\, b_z\}$ є вектор $\vec{a}+\vec{b}$, координати якого дорівнюють сумі відповідних координат доданків.

Добутком скаляра λ на вектор $\vec{a}=\{a_x;\; a_y;\; a_z\}$ є вектор $\lambda\,\vec{a}$, координати якого дорівнюють добутку λ на відповідні координати вектора $\vec{a}$.

Отже,

$$\vec{a}+\vec{b}=\{a_x+b_x;\, a_y+b_y;\, a_z+b_z\},$$

$$\lambda\,\vec{a}=\{\lambda a_x;\, \lambda a_y;\, \lambda a_z\}, \qquad (3)$$

$$\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}=\{\lambda_1 a_x+\lambda_2 b_x;\;\; \lambda_1 a_y+\lambda_2 b_y,\, \lambda_1 a_z+\lambda_2 b_z\}$$

Ці формули випливають із властивостей 2 та 3 проекцій векторів (властивості лінійності).

Легко переконатися, що всі закони лінійних операцій мають місце і при означенні цих операцій за формулами (3).

З точки зору фізики суму векторів можна розглядати як рівнодіючу системи сил — доданків векторів. Так, якщо, наприклад, є система двох сил $\vec{F}_1=\{F_{lx};\, F_{1y},\, F_{lz}\};\; \vec{F}_2=\{F_{2x};\, F_{2y};\, F_{2z}\}$, то рівнодіюча цієї системи — сила $\vec{R}$, дорівнює

$$\vec{R}=\vec{F}_1+\vec{F}_2=\{F_{1x}+F_{2x};\, F_{1y}+F_{2y};\, F_{1z}+F_{2z}).$$

2. Розклад вектора по координатних ортах

Розглянемо радіус-вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, де $\vec{r} = \{OM_x, OM_{y;}\ OM_z\} = \{x; y; z\}$ (рис. 1). Введемо три одиничні координатні вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, які напрямлені по координатних осях, тобто $\vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k}$, і мають модулі, що дорівнюють одиниці: $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$ (рис. 1). Вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ називаються **ортами** відповідно осей *Ox*, *Oy*, *Oz*, або **координатними ортами.**

Покажемо, що вектор $\vec{r} = \{x;\ y;\ z\}$ можна представити у вигляді рівності:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \tag{4}$$

яка називається **розкладом вектора по координатних ортах.**

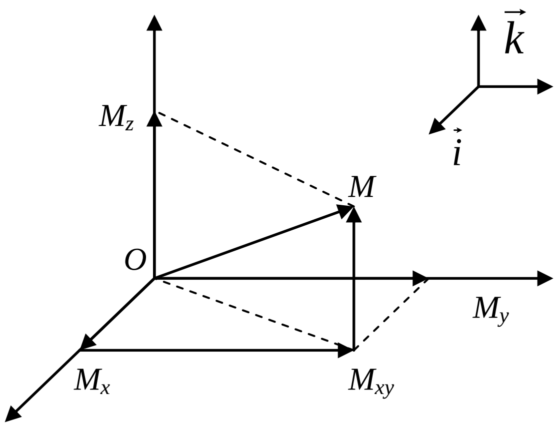


Рис.1

Дійсно, спроектуємо вектор $\overrightarrow{OM}$ на координатні осі. Тоді із рис. 1 видно, що вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, який з'єднує точку *O* з точкою *M,* можна записати у вигляді суми:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}_x + \overrightarrow{M_xM_{xy}} + \overrightarrow{M_{xy}M} = = \overrightarrow{OM}_x + \overrightarrow{OM}_y + \overrightarrow{OM}_z$$

(оскільки $\overrightarrow{M_xM_{xy}} = \overrightarrow{OM}_y$ і $\overrightarrow{M_{xy}M} = = \overrightarrow{OM}$). Вектори $\overrightarrow{OM}_x$, $\overrightarrow{OM}_y$, $\overrightarrow{OM}_z$ називаються складовими вектора $\vec{r}$ по координатних осях. Запишемо кожну складову через орти $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Маємо

$$\overrightarrow{OM}_x = OM_x\,\vec{i}\,; \quad \overrightarrow{OM}_y = OM_y\,\vec{j}\,; \quad \overrightarrow{OM}_z = OM_z\,\vec{k}\,,$$

де OM_x, OM_y, OM_z — це проекції вектора $\overrightarrow{OM}$ на відповідні осі. Множення цих чисел на вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ переводить їх у вектори, напрямлені так само, як і $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ і не змінює величин напрямлених відрізків. Звідси дістаємо

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = OM_x\ \vec{i} + OM_y\ \vec{j} + OM_z\ \vec{k} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Рівність (4) доведена.

Для будь-якого вектора $\vec{a} = \{a_x, a_y; a_z\}$ рівність (4) набуває вигляду

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \qquad (5)$$

і називається розкладом вектора по координатних ортах.

Таким чином, ми одержали 3 еквівалентні представлення вектора у просторі:

1) своїми координатами:

$$\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\};$$

2) розкладом по координатних ортах:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k};$$

3) модулем і напрямними косинусами (напрямом):

$$\vec{a} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$$

3. Скалярний добуток векторів

Існують два види добутків двох векторів: скалярний і векторний. Результатом скалярного добутку двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є скаляр, результатом векторного — вектор. Скалярний добуток позначається так: $\vec{a}\,\vec{b} = (\vec{a}\,\vec{b})$, а векторний: $\vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a}\,\vec{b}]$.

Означення. Кутом між двома векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називається менший із кутів, на який потрібно повернути один із векторів так, щоб його напрям збігся із напрямом другого вектора.

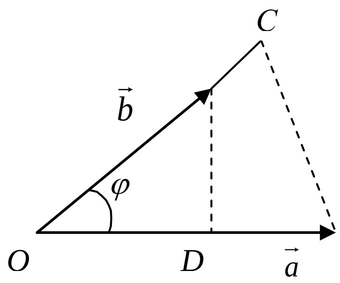


Рис.2

Позначається цей кут так: $(\vec{a} \hat{,} \vec{b})$, якщо поворот іде від $\vec{a}$ до $\vec{b}$ і $(\vec{b} \hat{,} \vec{a})$, якщо поворот іде від $\vec{b}$ до $\vec{a}$. Очевидно, що $(\vec{a} \hat{,} \vec{b}) = (\vec{b} \hat{,} \vec{a}) = \varphi$ (рис. 2) і $0 < \varphi < 180°$.

Означення. Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називається скаляр, що дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними:

$$\vec{a}\ \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\vec{a} \hat{,} \vec{b}) \quad (6)$$

Отже, добуток $\vec{a}\,\vec{b}$ — це число, яке є додатне, якщо $(\vec{a} \hat{,} \vec{b}) < 90°$ і добуток — від'ємне число, якщо $(\vec{a} \hat{,} \vec{b}) > 90°$.

Властивості скалярного добутку

Властивість 1. Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ дорівнює добутку модуля одного із векторів на проекцію другого вектора на напрям першого:

$$\vec{a}\ \vec{b} = |\vec{a}|\,np_{\vec{a}}\,\vec{b} = |\vec{b}|\,np_{\vec{b}}\,\vec{a} \quad (7)$$

Дійсно, спроектуємо, наприклад, вектор $\vec{b}$ на напрям $\vec{a}$ (на рис. 2 $np_{\vec{a}}\,\vec{b}$ = вел. *OD*). Згідно з властивістю 1 проекцій вектора дістаємо

$$np_{\vec{a}}\,\vec{b} = |\vec{b}|\cos\varphi = |\vec{b}|\cos(\vec{a} \hat{,} \vec{b}),$$

а тоді із формули (6) маємо

$$\vec{a}\ \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos,(\vec{a} \hat{,} \vec{b}) = |\vec{a}|\,np_{\vec{a}}\,\vec{b}.$$

Аналогічно, якщо спроектувати $\vec{a}$ на напрям $\vec{b}$ (на рис. 2 $np_{\vec{b}}\,\vec{a}$ = вел. *OC)*, дістаємо

$$\vec{a}\ \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}) = |\vec{b}|\,np_{\vec{b}}\,\vec{a}.$$

Наслідок 1. Проекцію вектора $\vec{a}$ $(\vec{b})$ на вектор $\vec{b}$ $(\vec{a})$ можна визначити за формулою:

$$np_{\vec{b}}\,\vec{a} = \vec{a}\ \vec{b}\,/|\vec{b}|,\ (np_{\vec{a}}\,\vec{b} = \vec{a}\ \vec{b}\,/|\vec{a}|). \qquad (8)$$

Це випливає із формули (7).

Наслідок 2. Косинус кута між двома векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ обчислюється за формулою:

$$\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}) = \cos\varphi = \vec{a}\ \vec{b}/(|\vec{b}||\vec{a}|). \qquad (9)$$

Це випливає із формули (6).

Властивість 2. Для скалярного добутку має місце переставний закон, тобто

$$\vec{a}\ \vec{b} = \vec{b}\ \vec{a}\ .$$

Це випливає із того, що $\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}) = \cos(\vec{b}\,\hat{,}\,\vec{a})$ і формули (9).

Властивість 3. Для скалярного добутку має місце розподільний закон відносно суми векторів, тобто

$$(\vec{a} + \vec{b})\,\vec{c} = \vec{a}\ \vec{c} + \vec{b}\ \vec{c}.$$

Дійсно, використовуючи формулу (7) і властивість 2 проекції суми векторів, можна записати:

$$(\vec{a} + \vec{b})\,\vec{c} = |\vec{c}|\,np_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{c}|(np_{\vec{c}}\,\vec{a} + np_{\vec{c}}\,\vec{b}) =$$
$$= |\vec{c}|\,np_{\vec{c}}\,\vec{a} + |\vec{c}|np_{\vec{c}}\,\vec{b} = \vec{a}\ \vec{c} + \vec{b}\ \vec{c}.$$

Властивість 4. Для скалярного добутку має місце сполучний закон відносно скаляра, тобто

$$\lambda\,(\vec{a}\,\vec{b}) = \lambda\,\vec{a}\,\vec{b} = \vec{a}\ \lambda\vec{b}.$$

Доведення аналогічне доведенню властивості 3. Користуючись формулою (7) і властивістю 3 проекцій вектора, маємо

$$\vec{a}\ \lambda\vec{b} = |\vec{a}|\,np_{\vec{a}}\,\lambda\,\vec{b} = |\vec{a}|\,\lambda\,np_{\vec{a}}\,\vec{b} = \lambda\,|\vec{a}|\,np_{\vec{a}}\,\vec{b} = \lambda\,(\vec{a}\,\vec{b}).$$

Отже, із властивостей 2,3,4 випливає, що скалярний добуток векторів підпорядковується тим самим основним законам, що і добуток скалярів (чисел).

Властивість 5. **(Умова ортогональності двох векторів)**

Вектори $\vec{a}$ та b називаються ортогональними, якщо вони розташовані на перпендикулярних прямих, тобто, якщо $(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}) = 90°$. Те, що $\vec{a}$ та $\vec{b}$ ортогональні, позначається так: $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ ортогональні тоді і тільки тоді, коли їх скалярний добуток дорівнює нулеві:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\,\vec{b}=0. \qquad (10)$$

Дійсно, нехай $\vec{a} \perp \vec{b}$, тоді із (6) випливає

$$\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos 90° = 0.$$

Нехай тепер $\vec{a}\,\vec{b} = 0$. Це можливо (див. (6)) тоді і тільки тоді, коли або cos $(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}) = 0$, тобто $(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}) = 90°$ і $\vec{a} \perp \vec{b}$, або коли $|\vec{a}| = 0$, чи $|\vec{b}| = 0$, тобто коли один із векторів (або обидва) є нульовим. Тоді кут між ними може бути будь-яким, зокрема 90°. Властивість 5 (формула (10)) доведена.

Властивість 6. Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля, тобто

$$\vec{a}\,\vec{a} = \vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2, \text{ або } |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{\vec{a}^{\,2}}. \qquad (11)$$

Дійсно, $(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{a}) = 0°$ і $\cos 0° = 1$. Звідси і із означення скалярного добутку і випливає (11).

Властивість 7. Скалярний добуток векторів, заданих координатами, дорівнює сумі добутків їх відповідних координат, тобто, якщо $\vec{a} = \{a_x;\, a_y,\, a_z\}$ і $\vec{b} = \{b_x;\, b_y,\, b_z\}$, то

$$\vec{a}\,\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \qquad (12)$$

Дійсно, нехай $\vec{a}$ та $\vec{b}$ задано координатами. Тоді можна записати їх розклад (формула (5)) по координатних ортах:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \quad \text{та} \quad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$$

$$\vec{a}\ \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}).$$

В останній рівності виконаємо множення, тобто розкриємо дужки, використовуючи властивості 2 — 4 скалярного добутку векторів. Дістанемо

$$\vec{a}\ \vec{b} = a_xb_x\vec{i}^{\,2} + a_xb_y\vec{i}\ \vec{j} + a_xb_z\vec{i}\ \vec{k} + a_yb_x\vec{j}\ \vec{i} + \alpha_yb_y\vec{j}^{\,2} +$$
$$+ a_yb_z\vec{j}\ \vec{k} + a_zb_x\vec{k}\ \vec{i} + a_zb_y\vec{k}\ \vec{j} + a_zb_z\vec{k}^{\,2}. \qquad (*)$$

Але вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ взаємно ортогональні $\vec{i} \perp \vec{j} \perp k$ і тому із (10) маємо: $\vec{i}\ \vec{j} = \vec{j}\ \vec{i} = \vec{i}\ \vec{k} = \vec{k}\ \vec{i} = \vec{j}\ \vec{k} = \vec{k}\ \vec{j} = 0$. Далі, оскільки $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — одиничні вектори, то , враховуючи (11), дістанемо $\vec{i}^{\,2} = |\vec{i}|^2 = 1$; $\vec{j}^{\,2} = |\vec{j}|^2 = 1$; $\vec{k}^{\,2} = |\vec{k}|^2 = 1$. Підставляючи все це в (*), одержимо (12):

$$\vec{a}\ \vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.$$

Наслідок. (Умова ортогональності векторів заданих своїми координатами). Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ ортогональні тоді і тільки тоді, коли сума добутків їх відповідних координат дорівнює нулеві:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = 0.$$

Це випливає із формул (10) і (12).

Фізичною інтерпретацією скалярного добутку може бути **робота** A сили $\vec{F}$ при переміщенні точки її прикладення із початку вектора $\vec{S}$ в його кінець, тобто

$$A = \vec{F}\ \vec{S} = |\vec{S}|\, np_s\vec{F} = |\vec{F}|\,|\vec{S}| \cos(\vec{F} \hat{,} \vec{S}).$$

Приклад. Знайти внутрішній кут трикутника *ABC*, вершини якого знаходяться в точках *A* (1;—1; 1), *B* (2;—1 ;2), C(2;1;3) (рис.3).

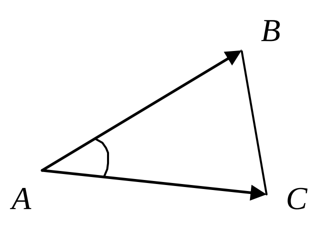


Рис.3

Розв'язання. Кут A трикутника ABC утворюється векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, отже, його можна визначити за формулою (9)

$$\cos A = \cos (\overrightarrow{AB} \,\hat{,}\, \overrightarrow{AC}) =$$
$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \,/(|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|).$$

Для векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ відомі координати точок, які визначають ці вектори. Тоді маємо:

$$\overrightarrow{AB} = \{2 - 1; - 1- (- 1); 2 - 1\} = \{1; 0; 1\},$$
$$\overrightarrow{AC} = \{2 - 1; 1- (- 1); 3 - 1\} = \{1; 2; 2\}.$$

За формулами (12) і (11) знаходимо:

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC} = 1\text{-}1 + 0\text{-}2 + 1\text{-}2 = 3, \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$
$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3 \text{ і } \cos A = 3/\left(3\sqrt{2}\right) = 1/\sqrt{2}\,;\ A = 45°.$$

ВЕКТОРНИЙ ТА МІШАНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

1. Означення векторного добутку векторів та його властивості

Означення. **Векторним добутком двох векторів** $\vec{a}$ і $\vec{b}$, називається вектор $\vec{c}$ такий, що:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, де $\varphi = \left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$;

2) $\vec{c} \perp \vec{a}$ і $\vec{c} \perp \vec{b}$;

3) якщо $\vec{c} \neq 0$, то вектори $\vec{a}$**,** $\vec{b}$ **,**$\vec{c}$, утворюють праву трійку.

Означення. Упорядкована трійка некомпланарних векторів називається **правою,** якщо з кінця третього вектора найкоротший поворот від першого вектора до другого здійснюється проти обертання годинникової стрілки.

Згідно з умовою 1), вектор $\vec{c} = \vec{0}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні. В окремому випадку, коли який-небудь із векторів ($\vec{a}$ чи $\vec{b}$) є нуль-вектором, то вони колінеарні і, як наслідок, $\vec{c} = \vec{0}$. Якщо $\vec{c} \neq \vec{0}$, то $|\vec{c}|$ чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, приведених до спільного початку (рис. 1).

Векторний добуток позначається

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}.$$

Властивості векторного добутку.

1°. *Векторний добуток двох векторів не має комутативної (переставної) властивості. Для векторного добутку справджується рівність*

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}.$$

Рис. 1

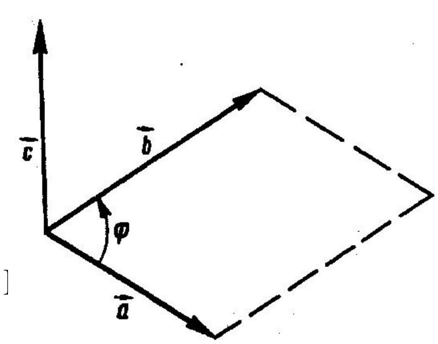
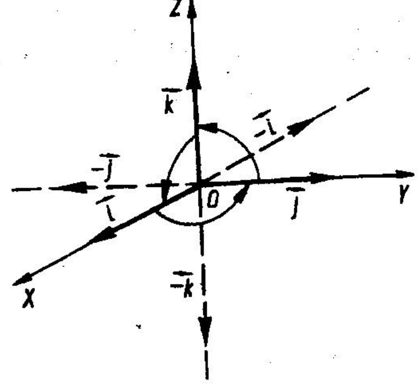


Рис. 2



2°.

Координатних осей (ортів) (рис.1, 2). Згідно з означенням векторного добутку знаходимо

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0,$$
$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\quad \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},$$
$$\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\quad \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i},$$
$$\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j},\quad \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}.$$

3°. *Векторний добуток має розподільну властивість відносно скалярного множника:*

$$\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\left(\lambda\vec{a}\right)\times\vec{b}=\vec{a}\times\left(\lambda\vec{b}\right).$$

4°. *Векторний добуток має розподільну властивість відносно векторного множника:*

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}.$$

5°. *Векторний добуток у координатній формі. Нехай задано вектор*

$$\vec{a}=\left(a_x,a_y,\ldots,a_z\right);\ \vec{b}=\left(b_x,b_y,\ldots,b_z\right)$$

у прямокутній системі координат з ортами $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$.Знайдемо векторний добуток цих векторів:

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\times\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)=$$
$$=a_xb_x\left(\vec{i}\times\vec{i}\right)+a_xb_y\left(\vec{i}\times\vec{j}\right)+a_xb_z\left(\vec{i}\times\vec{k}\right)+$$
$$+a_yb_x\left(\vec{j}\times\vec{i}\right)+a_yb_y\left(\vec{j}\times\vec{j}\right)+a_yb_z\left(\vec{j}\times\vec{k}\right)+$$
$$+a_zb_x\left(\vec{k}\times\vec{i}\right)+a_zb_y\left(\vec{k}\times\vec{j}\right)+a_zb_z\left(\vec{k}\times\vec{k}\right).$$

Враховуючи властивість 2°, дістанемо

$$\vec{c}=a_xb_y\vec{k}-a_xb_z\vec{j}+a_yb_z\vec{i}-a_yb_x\vec{k}+a_zb_x\vec{j}-a_zb_y\vec{i}=$$
$$=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\vec{i}+\left(a_zb_x-a_xb_z\right)\vec{j}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\vec{k}.$$

Отже, проекції вектора $\vec{c}$ на координатні осі дорівнюють

$$c_x=np_x\vec{c}=a_yb_z-a_zb_y=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix},$$

$$c_y=np_y\vec{c}=a_zb_x-a_xb_z=\begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix},$$

$$c_z=np_z\vec{c}=a_xb_y-a_yb_x=\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}.$$

Тоді для знаходження векторного добутку двох даних векторів маємо формулу

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

Приклад 1. Знайти векторний добуток $\vec{a}=(-3,1,2)$ і $\vec{b}=(2,-1,1)$.

Розв'язання. Маємо

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=3\vec{i}+7\vec{j}+\vec{k}.$$

Відповідь. $\vec{c}=(3,7,1)$.

2. Застосування векторного добутку

а) ***Обчислення площі трикутника.***

Нехай дано трикутник з вершинами у точках

$$A(x_1,y_1,z_1),\ B(x_2,y_2,z_2),\text{ і } C(x_3,y_3,z_3)$$

Знайти площу трикутника *ABC* (рис.3).

Розв'язання. Розглянемо два вектори $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$ і $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$, що збігаються із сторонами трикутника *ABC*. Модуль векторного добутку $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$, згідно з означенням векторного добутку, дорівнює площі паралелограма *ABCD*. Тоді площа трикутника *ABC*

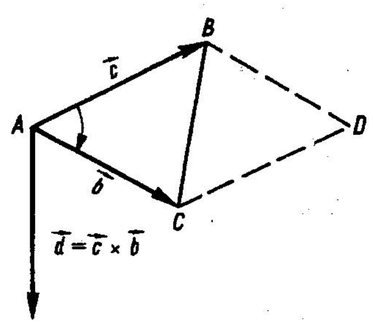


Рис. 3

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\left|\vec{c}\times\vec{b}\right|.$$

Знаючи координати початку і кінця векторів *AB* і *AC*, знайдемо ці вектори:

$$\overrightarrow{AB}=\vec{c}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1),$$
$$\overrightarrow{AC}=\vec{b}=(x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1).$$

Тоді площа трикутника

$$S=\frac{1}{2}\left|\vec{c}\times\vec{b}\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{matrix}\right\|.$$

Розглянемо вектор $\vec{d}$, який дорівнює добутку векторів $\vec{c}$ і $\vec{b}$:

$$\vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ z_3 - z_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Проекціями вектора $\overline{d}$ на координатні осі будуть

$$d_x = \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}, \quad d_y = \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ z_3 - z_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix},$$

$$d_z = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix},$$

а довжина

$$\left|\vec{d}\right| = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}.$$

Тоді площу трикутника можна записати у вигляді

$$S = \frac{1}{2}\left|\vec{d}\right|.$$

Розглянемо окремий випадок, коли трикутник лежить в одній з координатних площин, наприклад у площині xOy. При цьому $z_1 = z_2 = z_3 = 0$, а проекції вектора $\vec{d}$ дорівнюють відповідно

$$d_x = 0, \quad d_y = 0, \quad d_z = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$$

Площа трикутника, який лежить у площині $z = 0$ з вершинами в точках $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, і $C(x_3, y_3)$, дорівнює

$$S_{xy} = \frac{1}{2}\left|d_z\right| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{matrix}\right\|.$$

Визначник другого порядку в останній формулі можна записати у вигляді визначника третього порядку:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Тоді площа трикутника з вершинами у точках $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, і $C(x_3, y_3)$ може бути виражена формулою

$$S_{xy} = \frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right\|.$$

Аналогічно можна записати формули площ трикутників, які лежать у координатних площинах yOz і xOz.

Приклад 2. Знайти площу трикутника, вершини якого розміщені в точках $A(1,1,3)$, $B(3,-1,6)$, і $C(5,1,-3)$.

Розв'язання. Маємо

$$\overrightarrow{AB} = (5-1,1-1,-3-3) = (4,0,-6),$$
$$\overrightarrow{AC} = (3-1,-1-1,6-3) = (2,-2,3),$$

тоді $$S = 0{,}5\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = 0{,}5\sqrt{12^2+24^2+8^2} = 14(\textit{кв.од.}).$$

б)***Умова паралельності (колінеарності або лінійної залежності) двох векторів.***

Два вектори тривимірного простору, що відмінні від нуль-вектора, паралельні тоді і тільки тоді, коли їхній векторний добуток дорівнює нуль-вектору.

1) Нехай вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ паралельні, тоді $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, де λ — деяке дійсне число, або

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda.$$

Тоді

$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}.$$

2) Нехай векторний добуток $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$, тоді $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, тобто $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

б) ***Момент сили відносно полюса.***

Відомо, що момент сили $\overrightarrow{F}$ відносно полюса (точки) O дорівнює векторному добутку радіуса-вектора $\vec{r}$ точки прикладання сили на вектор сили (рис. 4, *а, б*):

$$\vec{m}_0\left(\overrightarrow{F}\right) = \vec{r}\times\overrightarrow{F}.$$

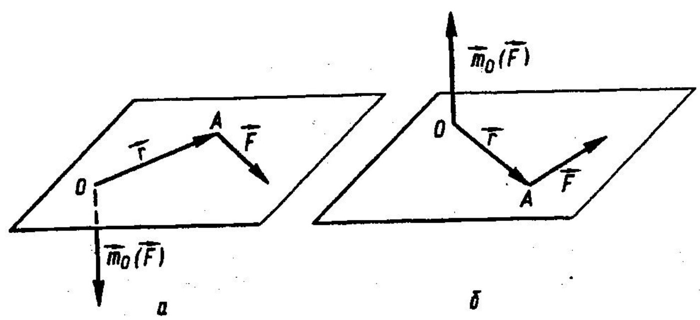


Рис. 4

3. Добуток трьох векторів. Мішаний добуток і його властивості

Послідовне множення трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ можна здійснити різними способами.

1. Можна два перших вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перемножити скалярно, а потім знайдене число помножити на третій вектор $\vec{c}$. При цьому вектор $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}$ буде колінеарним вектору $\vec{c}$, тобто $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c} = \lambda\vec{c}$, де $\lambda = \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$. Очевидно,

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c} = \vec{c}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = \vec{c}\left(\vec{b}\cdot\vec{a}\right).$$

2. Можна вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перемножити векторно і знайдений вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ помножити скалярно на вектор $\vec{c}$:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}.$$

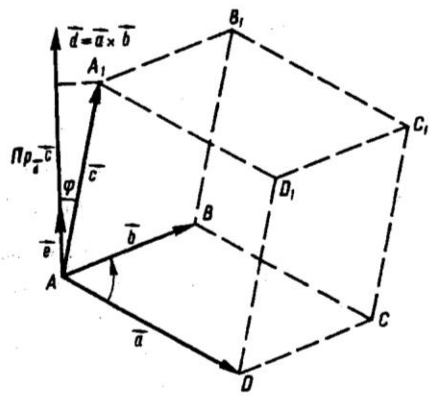


Рис. 5

У результаті цього дістанемо число, яке називається **мішаним добутком трьох векторів.**

3. Можна два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перемножити векторно і знайдений вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ помножити векторно на третій вектор $\vec{c}$. Дістанемо вектор $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\vec{c}$, який називається **подвійним векторним добутком** даних трьох векторів:

$$\vec{d} = \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}.$$

Властивості мішаного добутку.

1°. Розглянемо три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, які не лежать в одній площині (рис. 5).

Побудуємо на цих векторах, як на ребрах, що виходять із однієї точки, паралелепіпед. Знайдемо об'єм цього паралелепіпеда. Відомо, що об'єм паралелепіпеда

$$V = QH,$$

де Q — площа основи, а H — висота.

Згідно з означенням векторного добутку двох векторів,

$$Q = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|.$$

Висота паралелепіпеда H дорівнює модулю проекції вектора $\vec{c}$ на вектор $\vec{d} = \vec{a}\times\vec{b}$:

$$H = \left|пр_{\vec{e}}\vec{c}\right|,$$

де $\vec{e}$ — одиничний вектор векторного добутку $\vec{d}$.

Таким чином,

$$V = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|\left|np_{\vec{e}}\vec{c}\right| = \left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}\right|. \qquad (1)$$

Отже, *геометрично мішаний добуток трьох векторів* $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, *взятий за абсолютною величиною, є об'ємом паралелепіпеда, побудованого на векторах, які перемножаються, як на ребрах, що виходять з однієї точки.*

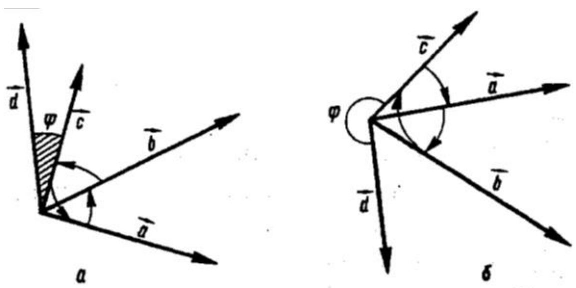


Рис. 6

2°. *Мішаний добуток трьох векторів додатний, якщо розміщення векторів відповідає правій системі координат, і від'ємний, якщо розміщення векторів відповідає лівій системі координат.*

Справді, якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ розміщені так, як показано на рис.6, *а*, то кут φ між векторами $\vec{d} = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$ і $\vec{c}$ гострий, тоді $\vec{d} \cdot \vec{c} > 0$. Якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ розміщені так, як показано на рис.6,*б*, то кут φ між векторами $\vec{d}$ і $\vec{c}$ тупий. Тому в першому випадку скалярний добуток $\vec{d} \cdot \vec{c}$ додатний, а у другому — від'ємний. Таким чином,

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \left(\vec{c} \times \vec{a}\right) \cdot \vec{b} = \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \cdot \vec{a},$$

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right) \cdot \vec{c} = -\left(\vec{c} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{a}.$$

3°. *Три вектори* $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, *відмінні від нуль-вектора, лежать на одній і тій самій площині, тобто є лінійно залежними, тоді і тільки тоді, коли їхній мішаний добуток дорівнює нулю.*

Це випливає з формули (61).

4°. Нехай задано три вектори в координатній формі:

$$\vec{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right), \quad \vec{b} = \left(b_x, b_y, b_z\right), \quad \vec{c} = \left(c_x, c_y, c_z\right).$$

Тоді їхній мішаний добуток

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{d} \cdot \vec{c} = d_x c_x + d_y c_y + d_z c_z.$$

Як відомо,

$$d_x = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, \quad d_y = \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}, \quad d_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

Отже,

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x+\begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} c_y+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Таким чином, мішаний добуток векторів, заданих в координатній формі, дорівнює

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

Користуючись формулою (2), формулу (1) для обчислення об'єму паралелепіпеда можна записати у вигляді

$$V=\pm\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix},$$

де знак «+» треба брати тоді, коли значення визначника додатне, і знак «-» тоді, коли це значення від'ємне.

Якщо вектори $\vec{a}=\overrightarrow{AD}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AA_1}$ (рис. 5) задано координатами їхніх початку і кінця, тобто точками $A(x_0, y_0, z_0)$, $D(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, і $A_1(x_3, y_3, z_3)$, то

$$V=\pm\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \\ x_3-x_0 & y_3-y_0 & z_3-z_0 \end{vmatrix}.$$

Умову компланарності трьох векторів можна записати у вигляді

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0,$$

або

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\pm\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \\ x_3-x_0 & y_3-y_0 & z_3-z_0 \end{vmatrix}=0$$

Аналогічно знаходимо умову належності чотирьох точок $A(x_0, y_0, z_0)$, $B(x_1, y_1, z_1)$, $C(x_2, y_2, z_2)$ і $D(x_3, y_3, z_3)$ тривимірного простору однієї і тієї самої площини (рис. 7).

Дані точки лежать в одній площині, якщо вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ лежать у тій самій площині, а це буде тоді і тільки тоді, коли

$$\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}=0,$$

або

$$\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \\ x_3-x_0 & y_3-y_0 & z_3-z_0 \end{vmatrix}=0. \quad (3)$$

5°. Розглянемо застосування мішаного добутку векторів до обчислення об'єму трикутної піраміди.

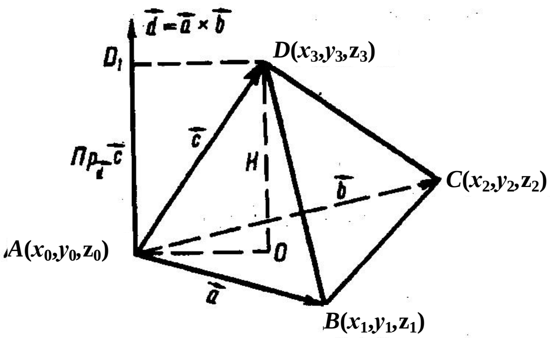


Рис. 7

Нехай вершини трикутної піраміди (рис. 34) лежать у точках $A(x_0,y_0,z_0)$, $B(x_1,y_1,z_1)$, $C(x_2,y_2,z_2)$, і $D(x_3,y_3,z_3)$.

Площу трикутника *ABC* (основи піраміди) позначимо через *Q*, а її висоту $|DO|$ — через *H*. Об'єм піраміди

$$V=\frac{1}{3}QH .$$

Знайдемо вектори:

$$\vec{a}=\overrightarrow{AB}=\left(x_1-x_0,\quad y_1-y_0,\quad z_1-z_0\right),$$
$$\vec{b}=\overrightarrow{AC}=\left(x_2-x_0,\quad y_2-y_0,\quad z_2-z_0\right),$$
$$\vec{c}=\overrightarrow{AD}=\left(x_3-x_0,\quad y_3-y_0,\quad z_3-z_0\right).$$

Тоді

$$Q=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|, \text{ а } H=|OD|=\left|np_{\vec{a}\times\vec{b}}\vec{c}\right|.$$

Таким чином,

$$V=\frac{1}{3}QH=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\left|np_{\vec{a}\times\vec{b}}\vec{c}\right|=\frac{1}{6}\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|.$$

Тобто *об'єм трикутної піраміди дорівнює 1/6 модуля мішаного добутку векторів, які збігаються з ребрами піраміди, що виходять з однієї і тієї самої вершини:*

$$V=\frac{1}{6}\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} x_1-x_0, & y_1-y_0, & z_1-z_0 \\ x_2-x_0, & y_2-y_0, & z_2-z_0 \\ x_3-x_0, & y_3-y_0, & z_3-z_0 \end{matrix}\right\|. \qquad (64)$$

Приклад 3. Визначити, чи будуть лінійно залежними вектори
$\vec{a} = \vec{i} + 9\vec{j} - 11\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$.

Розв'язання. Обчислимо мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 9 & -11 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

тобто дані вектори лінійно залежні.

ЛІНІЙНО ЗАЛЕЖНІ ТА ЛІНІЙНО НЕЗАЛЕЖНІ ВЕКТОРИ. БАЗИС

Як відомо, лінійною комбінацією *n* векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ називається вираз вигляду

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{a}_n, \tag{1}$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — деякі числа (скаляри).

Означення. Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ називаються **лінійно залежними,** якщо існують такі скаляри $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ які не всі дорівнюють нулеві, що лінійна комбінація (1) дорівнює нулеві, тобто

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n, \vec{a}_n = 0,$$

і вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ називаються **лінійно незалежними,** якщо лінійна комбінація (1) дорівнює нулеві лише тоді, коли **всі скаляри дорівнюють** нулеві:

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = \ldots = \vec{a}_n = 0.$$

Означення. Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ називаються **лінійно залежними,** якщо хоча б один із них можна представити як лінійну комбінацію інших, тобто, наприклад, вектор $\vec{a}_n$ можна зобразити у вигляді:

$$\vec{a}_n = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_{n-1} \vec{a}_{n-1} \tag{2}$$

де $\lambda_1 \ldots, \lambda_{n-1}$ — скаляри і вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ називаються **лінійно незалежними,** якщо жоден із них не можна зобразити як лінійну комбінацію інших, тобто для жодного із векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ не можна записати рівність типу (2).

Розберемо зміст введеного поняття. Розглянемо спочатку два вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$, які можуть бути або колінеарними (рис. 1 а)), або неколінеарними (рис. 1 б)).

Теорема 1. Два вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ **лінійно залежні** тоді і тільки тоді, коли вони **колінеарні.**

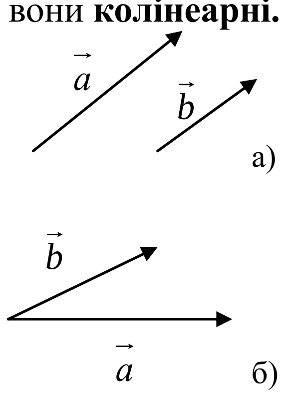


Рис.1

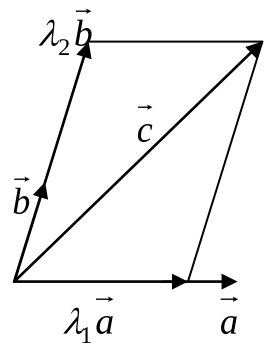


Рис.2

Наслідок 1. Два неколінеарні вектори (рис. 1 б)) лінійно незалежні, тобто не можна жоден із них виразити через другий.

Наслідок 2. Три (і більше) векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$,..., два із яких колінеарні, завжди лінійно залежні.

Дійсно, припустимо, що $\vec{a}\,||\,\vec{b}$, тобто $\vec{a} = \lambda_1\vec{b}$ $(\lambda_1 \neq 0)$. Але тоді $\vec{a} = \lambda_1\vec{b} + \lambda_2\vec{c} + \ldots$, де, наприклад, $\lambda_2 = \ldots = 0$, тобто $\vec{a}$ є лінійною комбінацією векторів $\vec{b}$, $\vec{c}$,... і $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$,... лінійно залежні вектори.

Розглянемо тепер три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, які зведені до спільного початку. Вони можуть бути компланарними (розташовані в одній площині) (рис. 2), або некомпланарними (рис. 3).

Теорема 2. Три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли вони компланарні.

Наслідок 1. Три некомпланарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ завжди лінійно незалежні, тобто жоден із них не можна зобразити у вигляді лінійної комбінації інших.

Наслідок 2. Якщо вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ неколінеарні, то для будь-якого вектора $\vec{c}$ $(\vec{c} \neq \vec{0})$, розташованого з ними в одній площині, існують такі числа λ_1 і λ_2, що

$$\vec{c} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b},$$

причому хоча б одне із чисел λ_1, λ_2 не дорівнює нулеві.

Наслідок 3. Чотири і більша кількість векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$..., три з яких компланарні, завжди лінійно залежні.

Дійсно, нехай $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарні: $\vec{c} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b}$, але тоді $\vec{c} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} + \quad + \lambda_3\vec{d} + \ldots$ при $\lambda_3 = \ldots = 0$, тобто $\vec{c}$ є лінійною комбінацією векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}, \ldots$ і $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \ldots$ — лінійно залежні.
Розглянемо тепер чотири вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ - доведемо таку теорему.
Теорема 3. Будь-які чотири вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ — лінійно залежні.

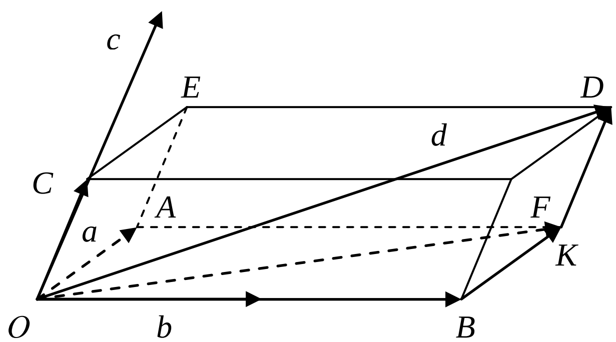


Рис.3

Означення. Сукупність трьох лінійно незалежних векторів називається **базисом** у просторі. Будь-який вектор $\vec{d}$, що не належить до базису, може бути зображений у вигляді лінійної комбінації векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, тобто

$$d = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} + \lambda_3\vec{c}.$$

Цей вираз називається **розкладом вектора** $\vec{d}$ **за базисом** $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, а числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — **координатами** вектора $\vec{d}$ у базисі $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

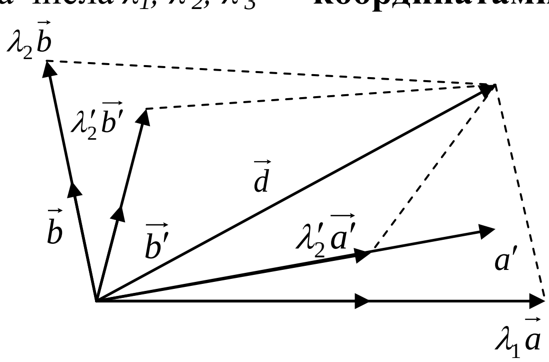


Рис.4

Зауважимо, що у просторі (або на площині) існує множина базисів і координати вектора $\vec{d}$ у різних базисах, очевидно, будуть різними. На рис. 4 зображено два базиси $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{a}\,'$, $\vec{b}\,'$ і розклад вектора $\vec{d}$ за цими базисами

$$\vec{d} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b},$$
$$\vec{d} = \lambda'_1\,\vec{a}\,' + \lambda'_2\,\vec{b}\,'.$$

Базис $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, який складено із взаємно перпендикулярних векторів : $\vec{a} \perp b \perp c$, називається **ортогональним.**

Ортогональний базис $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називається **ортонормованим,** якщо вектори, що його утворюють, мають модулі, які дорівнюють одиниці:
$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1.$

Координатні орти $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, утворюють ортонормований базис: $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — некопланарні вектори, $\vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k}$ і $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$. **Базис** $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ **називається декартовим координатним базисом.** Рівність розкладу вектора за координатними ортами:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

є розкладом вектора за координатним базисом; a_x, a_y, a_z— координати вектора $\vec{a}$ у цьому базисі.

Нехай вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ задано у координатному базисі:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k};\quad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k};\quad \vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}.$$

Теорема. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ лінійно незалежні тоді і тільки тоді, коли визначник, складений із їх координат, не дорівнює нулеві, тобто

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (3)$$

Доведення. Дійсно, нехай $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — лінійно незалежні. Згідно з означенням лінійної незалежності векторів a, b, c маємо

$$\lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} + \lambda_3\vec{c} = 0, \qquad (4)$$

де $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Але, згідно з умовою рівності векторів і правилами лінійних операцій над векторами, випливає, що одна векторна рівність (4) рівносильна трьом скалярним, тобто

$$\begin{cases} \lambda_1 a_x + \lambda_2 b_x + \lambda_3 c_x = 0, \\ \lambda_1 a_y + \lambda_2 b_y + \lambda_3 c_y = 0, \\ \lambda_1 a_z + \lambda_2 b_z + \lambda_3 c_z = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Ми дістали лінійну однорідну систему, яка повинна мати єдиний нульовий розв'язок. Тоді визначник системи не дорівнює нулеві, тобто маємо

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} \neq 0$$

Очевидно і обернене. Із нерівності (3) випливає єдиність розв'язку системи (5), і оскільки це — однорідна система, то $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ і вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ лінійно незалежні. Теорема доведена.

Наслідок 1. Три вектори $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$, $\vec{c} = \{c_x; c_y; c_z\}$ утворюють базис тоді і тільки тоді, коли визначник, складений із їх координат, не дорівнює нулеві. Це випливає із означення базису.

Наслідок 2. Якщо три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, що задано у координатному базисі, лінійно залежні, то визначник, складений із їх координат, дорівнює нулеві:

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} = 0 \qquad (6)$$

Зауважимо, що три лінійно залежні вектори — компланарні і умова (6) збігається з умовою компланарності векторів у координатній формі. Але визначник у (6) транспонований по відношенню до головного визначника, що, як відомо, не змінює його значення.

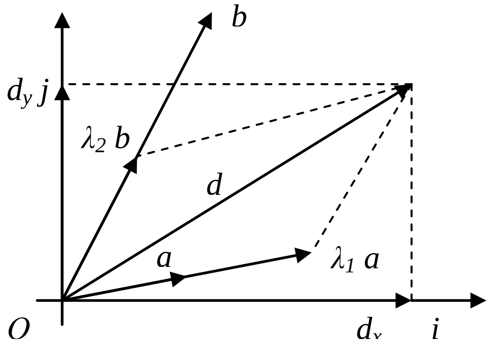


Рис.5

Задача про розклад вектора за довільним базисом.

Нехай вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ задано у координатному базисі, причому $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — лінійно незалежні. Визначити координати $\vec{d}$ у базисі $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Відомо, що $\vec{a} = \{a_x;\ a_y;\ a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x;\ b_y;\ b_z\}$, $\vec{c} = \{c_x;\ c_y;\ c_z\}$. Оскільки $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють базис, то для вектора $\vec{d}$ має місце рівність

$$d = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c},$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — координати $\vec{d}$ у базисі $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (на рис. 5 для простоти умова задачі зображена у випадку трьох компланарних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{d}$ і $\vec{d} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b}$).

Користуючись рівністю векторів $\vec{d}$ і $\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c}$ і правилами виконання лінійних операцій над векторами, які задано координатами, одержимо, що векторна рівність (2) еквівалентна трьом скалярним:

$$\begin{cases} d_x = \lambda_1 a_x + \lambda_2 b_x + \lambda_3 c_x, \\ d_y = \lambda_1 a_y + \lambda_2 b_y + \lambda_3 c_y, \\ d_z = \lambda_1 a_z + \lambda_2 b_z + \lambda_3 c_z. \end{cases} \tag{7}$$

і задача звелася до розв'язання системи (7) трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими λ_1 λ_2, λ_3. Оскільки $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ лінійно незалежні вектори, то згідно з теоремою визначник (3) цієї системи не дорівнює нулеві, і система (7) має єдиний розв'язок. Систему (7) можна розв'язати, наприклад, за правилом Крамера і визначити $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Аналогічно розв'язується задача у випадку базису, утвореного двома векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ і визначається розклад за цим базисом компланарного їм вектора $\vec{d}$ (рис. 5).

Приклад. Перевірити, чи утворюють вектори $\vec{a} = \{1;2\}$ та $\vec{b} = \{-1;\ 1\}$ базис, і знайти координати вектора $\vec{d} = \{4;\ 2\}$ у базисі $\vec{a}$, $\vec{b}$.

Розв'язання. Для того, щоб перевірити, чи утворюють базис вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$, складемо визначник із їх координат:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Отже, вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ лінійно незалежні і тому утворюють базис на площині. Запишемо розклад вектора $\vec{d}$ за базисом $\vec{a}$ та $\vec{b}$:

$$\vec{d} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b}, \qquad \text{або}$$

$$4 = \lambda_1 - \lambda_2,$$
$$2 = 2\lambda_1 + \lambda_2.$$

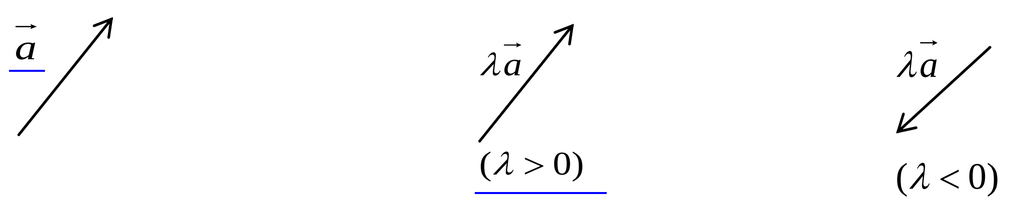
Розв'язуючи цю систему, дістанемо $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$, тобто

$$\vec{d} = 2\vec{a} - 2\vec{b}.$$

КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ З ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

Основні означення

1. *Вектором* називається напрямлений відрізок. Його позначають $\overrightarrow{AB}$ або $\vec{a}$.
2. *Довжиною* або *модулем* вектора $\overrightarrow{AB}$ називається невід'ємне число, яке дорівнює довжині відрізка $\overrightarrow{AB}$.
3. Вектор, у якого початок і кінець співпадають, називається *нульовим*. Цей вектор не має напряму, а його довжина дорівнює нулю.
4. Колінеарними називаються вектори, які лежать на паралельних прямих. Якщо колінеарні вектори напрямлені в одну сторону, то вони називаються співнапрямленими, а якщо в різні – то протилежно напрямленими.
5. Два вектори називаються *рівними*, якщо вони мають однакові модулі і співнапрямлені.
6. *Ортом* вектора $\vec{a}$ називається такий вектор (орт $\overrightarrow{a^0}$), який має одиничну довжину і спів напрямлений з $\vec{a}$.
7. *Компланарними* називають вектори, що лежать в одній площині або в паралельних площинах.



Дії над векторами

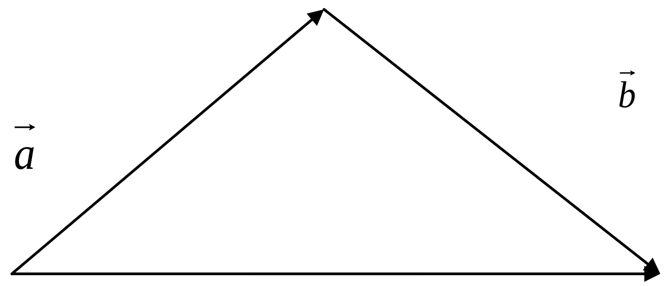
1. *Добутком* вектора $\vec{a}$ на число λ називається вектор, довжина якого дорівнює добутку довжини вектора $\vec{a}$ на число $|\lambda|$, а напрям співпадає з напрямом вектора $\vec{a}$, якщо $\lambda > 0$ або протилежний, якщо $\lambda < 0$.

   Якщо відомі координати вектора $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, то $\vec{b} = \lambda\vec{b} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}$.

З цього означення випливає умова колінеарності:

$$\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}=\lambda$$

2. *Сумою* двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, розміщених так, що кінець вектора $\vec{a}$ співпадає з початком вектора $\vec{b}$, називається вектор $\vec{c}$, який сполучає початок вектора $\vec{a}$ з кінцем вектора $\vec{b}$.



$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$

Якщо відомі координати векторів $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$ і $\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$, то координати вектора $\vec{c}$ шукають за таким правилом:

$$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}=\{a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z\}.$$

3. *Різницею* двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який в сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$. Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ виходять з однієї точки, то вектор $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ має початок в кінці від'ємника, а кінець співпадає з кінцем зменшуваного.

   Координати вектора $\vec{c}$ шукають за правилом:

$$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}=\{a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z\}$$

Проекція вектора на вісь: властивості проекцій

1. *Проекцією* вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l називається величина відрізка $\overrightarrow{A_1B_1}$.

   Кутом нахилу вектора $\overrightarrow{AB}$ до осі l називається кут α між напрямом осі та напрямом вектора, $0\le\alpha\le\pi$.
2. Проекція вектора на вісь дорівнює добутку його довжини на косинус кута нахилу вектора:

$$np_l\,\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cdot\cos\alpha\,.$$

3. Проекція суми двох векторів на вісь дорівнює сумі проекцій цих векторів на вісь:

$$np_l\vec{c} = np_l\vec{a} + np_l\vec{b}; \quad (\vec{c} = \vec{a} + \vec{b})$$

4. Проекція добутку вектора і скаляра на вісь дорівнює добутку скаляра на проекцію вектора на вісь:

$$np_l\lambda \cdot \vec{a} = \lambda \cdot np_l\vec{a}.$$

5. Проекції довільного вектора $\vec{a}$ на осі заданої декартової системи координат звичайно позначають літерами x, y, z. Рівність $\vec{a} = \{x, y, z\}$ означає, що числа x, y, z є проекціями вектора на координатні осі або його декартовими координатами. Якщо відомі координати двох точок $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$, які є відповідно початком і кінцем вектора $\vec{a}$, то його координати шукаються за формулами:
$x = x_2 - x_1, y = y_2 - y_1, z = z_2 - z_1,$
тобто від координат кінця вектора віднімають координати його початку. Довжину вектора $\vec{a}$, коли відомі його координати x, y, z, обчислюють за формулою:

$$\vec{a} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Скалярний добуток векторів

1. Скалярним добутком векторів називається число, яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними. Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначають символом $\vec{a}\,\vec{b}$. Якщо кут між векторами позначити через (φ), то їх скалярний добуток обчислюється за формулою:

$$\vec{a}\vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos(\varphi).$$

Скалярний добуток векторів можна також обчислювати за формулами:

$$\vec{a}\vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot np_{\vec{a}}\vec{b} \qquad \text{або} \qquad \vec{a}\vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot np_{\vec{b}}\vec{a}.$$

2. Скалярний добуток $\vec{a}\,\vec{a}$ називається скалярним квадратом вектора $\vec{a}$ і позначається $\overrightarrow{a^2}$. Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля:

$$\overrightarrow{a^2} = |\vec{a}|^2, \text{ звідки } \left|\vec{a}\right| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

3. Якщо відомі координати векторів $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$ і $\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$, то їх скалярний добуток обчислюється за формулою:
$$\vec{a}\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$
4. Для знаходження кута між двома векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ користуються формулою:
$$\cos(\varphi)=\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$ або, якщо відомі координати векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$,
$$\cos(\varphi)=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}\cdot\sqrt{b_x{}^2+b_y{}^2+b_z{}^2}}.$$
5. Властивості скалярного добутку:
   1) переставна: $\vec{a}\,\vec{b}=\vec{b}\,\vec{a}$,
   2) сполучна: $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda\cdot(\vec{a}\vec{b})$,
   3) розподільна: $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}$,
   4) скалярний квадрат вектора $\vec{a}$: $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^{\,2}$,
   5) умова перпендикулярності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:
   $\vec{a}\vec{b}=0\Rightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$ і навпаки $\vec{a}\perp\vec{b}\Rightarrow\vec{a}\vec{b}=0$.
6. Механічний зміст скалярного добутку:
Робота сили $\vec{F}$, точка прикладання якої переміщюється із початку вектора $\vec{S}$ в його кінець, дорівнює скалярному добутку векторів $\vec{F}$ і $\vec{S}$:
$$A=\vec{F}\vec{S}.$$

Векторний добуток векторів

1. *Векторним* добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який задовольняє умови:

- вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

- довжина вектор $\vec{a}$ дорівнює добутку довжини кожного з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ на синус кута між ними;

- вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють праву трійку векторів, тобто з кінця вектора $\vec{c}$ найменший поворот вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ видно проти годинникової стрілки.

Позначають векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ так: $\bar{a}\times\bar{b}$.

2. Властивості векторного добутку:
    1) антипереставна: $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$,
    2) сполучна: $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$,
    3) розподільча: $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$,
    4) умова колінеарності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:
    $\vec{a}\times\vec{b}=0\Rightarrow\vec{a}\,||\,\vec{b}$ і навпаки $\vec{a}\,||\,\vec{b}\Rightarrow\vec{a}\times\vec{b}=0$.
3. Якщо відомі координати векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$ і $\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$, то їх векторний добуток обчислюється за формулою:
$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$
4. *Геометричний* зміст векторного добутку:
Модуль векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$.
Площа трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, дорівнює половині модуля їх векторного добутку:
$$S_{\text{ТР}}=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|.$$
5. *Механічний* зміст векторного добутку:
Моментом сили $\vec{F}$, прикладеної в точці В відносно точки А, називається вектор $M_A(\vec{F})$, який дорівнює векторному добутку вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\vec{F}$, тобто
$$M_A(\vec{F})=\overrightarrow{AB}\times\vec{F}$$

Мішаний добуток векторів

1. *Мішаним* добутком векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ називається число, яке дорівнює скалярному добутку вектора $\vec{a}$ на векторний добуток векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$, тобто

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

2. Властивості мішаного добутку:

а) Мішаний добуток не змінюється при циклічній перестановці векторів:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$$

б) При перестановці двох сусідніх векторів-співмножників знак мішаного добутку змінюється на протилежний:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c})$$

в) Умова компланарності векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$

Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарні тоді і тільки тоді, коли їх мішаний добуток дорівнює нулю:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0.$$

3. Якщо відомі координати векторів $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, $\vec{c} = \{c_x, c_y, c_z\}$, то їх мішаний добуток можна обчислити за формулою:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

4. Геометричний зміст мішаного добутку:

Модуль мішаного добутку дорівнює об’єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$:

$$V_{парал.} = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|.$$

Об’єм тетраедра обчислюємо за формулою:

$$V_{тетр.} = \frac{1}{6} |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|.$$

Наведемо необхідний теоретичний матеріал із векторної алгебри та вкажемо розділи, знання яких потрібно для виконання типового розрахунку.

I. Як можна задати вектор у просторі:

1) у вигляді напрямленого відрізка $\overrightarrow{AB}$ або $\vec{a}$;

2) за допомогою координат початку $A(x_1;y_1;z_1)$ і кінця $B(x_2;y_2;z_2)$:

$$\vec{a}=\overrightarrow{AB}=\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\};$$

3) за допомогою проекцій вектора на координатні осі – за допомогою координат:

$$\vec{a}=\{a_x;a_y;a_z\};$$

4)у вигляді розкладу за координатними ортами $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, або в системі орт:

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k};$$

5)за допомогою модуля $|\vec{a}|$ та орта $\overrightarrow{a^0}$:

$$\vec{a}=|\vec{a}|\,\overrightarrow{a^0};$$

6)за допомогою модуля і напрямних косинусів:

$$\vec{a}=|\vec{a}|\{\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma\}.$$

II. Теми, які необхідно знати при розвязанні задач №1-5

Задача №1

а) Лінійні операції над векторами в системі координат:

$$\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}=\{\lambda_1a_x+\lambda_2b_x;\lambda_1a_y+\lambda_2b_y;\lambda_1a_z+\lambda_2b_z\}.$$

б) Поняття колінеарності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, ($\vec{a}\parallel\vec{b}$):

$$\vec{a}\parallel\vec{a}\Leftrightarrow\vec{a}=\lambda\vec{b}\Leftrightarrow\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}=\lambda\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=0.$$

Задача №2

а)Модуль вектора $\vec{a}$:

Якщо $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $|\vec{a}|=\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}$.

Якщо $\vec{a}=\alpha\vec{m}+\beta\vec{n},\quad(\vec{m},\vec{n})=\varphi,\quad|\vec{m}|=c_1,\quad|\vec{n}|=c_2$, то $\vec{a}=\sqrt{\vec{a}\vec{a}}$,

$|\vec{a}|=\sqrt{(\alpha\vec{m}+\beta\vec{n})^2}=\sqrt{\alpha^2c_1^2+2\alpha\beta c_1c_2\cos\varphi+\beta^2c_2^2}$.

б) Додавання і віднімання векторів за правилом паралелограма: якщо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ сторони, а $\vec{d}_1$ і $\vec{d}_2$ діагоналі паралелограма, то:

$$\vec{d}_1 = \vec{a} + \vec{b} \qquad \vec{a} = \frac{1}{2}(\vec{d}_1 + \vec{d}_2)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\vec{d}_2 = \vec{a} - \vec{b} \qquad \vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{d}_1 - \vec{d}_2).$$

в) Застосування векторного добутку $\vec{a} \times \vec{b}$ до обчислення площі паралелограма S:

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}),$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

г) Властивості векторного добутку:

розподільна: $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$;

антипереставна: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;

якщо $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, зокрема $\vec{a} \times \vec{a} = 0$.

Задача №3

а) Скалярний добуток векторів $\vec{a}\,\vec{b}$ та його застосування:

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a},^\wedge \vec{b}) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

$$\cos(\vec{a},^\wedge \vec{b}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \Leftrightarrow \cos(\vec{a},^\wedge \vec{b}) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b}{\sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2} \cdot \sqrt{b_x{}^2 + b_y{}^2 + b_z{}^2}}.$$

б) Робота сили $\vec{F}$ при переміщенні одиничної маси з точки B в точку C:

$$A = \vec{F} \cdot \overline{BC}$$

в) Застосування векторного добутку до обчислення $M_C(\vec{F})$ моменту сили $\vec{F}$, прикладеної в точці B, відносно точки C:

$$M_C(\vec{F}) = \overline{CB} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix},$$

$$\overline{CB} = \{b_x - c_x; b_y - c_y; b_z - c_z\} = \{a_x; a_y; a_z\}.$$

г) Властивості скалярного добутку:

переставна: $\vec{a}\,\vec{b}=\vec{b}\,\vec{a}$,

сполучна: $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda\cdot(\vec{a}\vec{b})$,

розподільна: $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}$.

Задача №4

а) Представлення вектора $\vec{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$, заданого координатами, в системі орт:

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}, \qquad a_x=x_2-x_1 \quad a_y=y_2-y_1 \quad a_z=z_2-z_1$$

б) Напрямні косинуси:

$$\cos(\alpha)=\frac{a_x}{|\vec{a}|} \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\alpha)=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^{\ 2}+a_y^{\ 2}+a_z^{\ 2}}},$$

$$\cos(\beta)=\frac{a_y}{|\vec{a}|} \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\beta)=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^{\ 2}+a_y^{\ 2}+a_z^{\ 2}}},$$

$$\cos(\gamma)=\frac{a_z}{|\vec{a}|} \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\gamma)=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^{\ 2}+a_y^{\ 2}+a_z^{\ 2}}}.$$

в) Проекція вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$:

$$np_{\vec{a}}\vec{b}=\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb}{\sqrt{a_x^{\ 2}+a_y^{\ 2}+a_z^{\ 2}}},$$

$$np_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb}{\sqrt{b_x^{\ 2}+b_y^{\ 2}+b_z^{\ 2}}}.$$

г) Застосування мішаного добутку векторів $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ до обчислення об’єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, та об’єму тетраєдра:

$$V_{парал.}=|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,|=\pm\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

$$V_{тетр.}=\frac{1}{6}|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,|=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

д) Застосування векторного добутку до обчислення площі трикутника (грані) ABC:

$$S_{\text{ТР}} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

е) Застосування формули для обєму тетраедра до обчислення його висоти h:

$$V_{тетр.} = \frac{1}{3}S\cdot h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{3V_{тетр.}}{S}; \ \ h = \frac{\vec{a}\vec{b}\vec{c}}{|\vec{a}\times\vec{b}|}.$$

Задача №5

а) Базис в просторі – трійка некомпланарних векторів;

умова некомпланарності:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \neq 0.$$

б) Умова рівності двох векторів в системі координат:

$$\vec{a} = \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad a_x = b_x, \quad a_y = b_y, \quad a_z = b_z.$$

в) Розклад вектора $\bar{d}$ за трійкою базисних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} d_x &= \alpha a_x + \beta b_x + \gamma c_x, \\ a_y &= \alpha a_y + \beta b_y + \gamma c_y, \\ a_z &= \alpha a_z + \beta b_z + \gamma c_z \end{aligned}$$

г) Розв’язання системи трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими α, β, γ, причому $\Delta \neq 0$:

$$\alpha = \frac{\Delta\alpha}{\Delta}; \quad \beta = \frac{\Delta\beta}{\Delta}; \quad \gamma = \frac{\Delta\gamma}{\Delta},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}; \qquad \Delta_\alpha = \begin{vmatrix} d_x & a_y & a_z \\ d_x & b_y & b_z \\ d_x & c_y & c_z \end{vmatrix};$$

$$\Delta_\beta = \begin{vmatrix} a_x & d_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & d_y & c_z \end{vmatrix}; \qquad \Delta_\gamma = \begin{vmatrix} a_x & a_y & d_z \\ b_x & b_y & d_z \\ c_x & c_y & d_z \end{vmatrix}.$$

Індивідуальні завдання по темі Системи лінійних рівнянь.

ВАРІАНТ 1

1. Розв'язати задану систему алгебраїчних рівнянь за формулами Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9, \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 = -11, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$$

2. Систему алгебраїчних рівнянь розв'язати матричним методом

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 10, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -5, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

Розв'язати наступні системи алгебраїчних рівнянь, заданих № 3-6

3. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 4, \\ 8x_1 - 3x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 9, \\ x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -11, \\ 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -2. \end{cases}$$

ВАРІАНТ 2

1. Розв'язати задану систему алгебраїчних рівнянь за формулами Крамера

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -4, \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -11. \end{cases}$$

2. Систему алгебраїчних рівнянь розв'язати матричним методом

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -5, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = -9, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -8. \end{cases}$$

Розв'язати наступні системи алгебраїчних рівнянь, заданих № 3-6

3. $$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - 8x_2 - 6x_3 = 0. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8, \\ 2x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 2, \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 0. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 7, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

ВАРІАНТ 3

1. Розв'язати задану систему алгебраїчних рівнянь за формулами Крамера

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 1, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 9. \end{cases}$$

2. Систему алгебраїчних рівнянь розв'язати матричним
методом

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -6, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 8. \end{cases}$$

Розв'язати наступні системи алгебраїчних рівнянь, заданих № 3-6

3.
$$\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 0. \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$$

6.
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 11. \end{cases}$$

ВАРІАНТ 4

1. Розв'язати задану систему алгебраїчних рівнянь за формулами Крамера

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = -2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

2. Систему алгебраїчних рівнянь розв'язати матричним методом

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 11, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 13, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 6. \end{cases}$$

Розв'язати наступні системи алгебраїчних рівнянь, заданих № 3-6

3.
$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 5x_3 = 0, \\ 7x_1 - 8x_2 - 6x_3 = 0. \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 = 9, \\ x_1 - x_2 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 6. \end{cases}$$

6.
$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 8. \end{cases}$$

ВАРІАНТ 5

1. Розв'язати задану систему алгебраїчних рівнянь за формулами Крамера

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 7, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -3, \\ 7x_1 + x_2 - 2x_3 = 5. \end{cases}$$

2. Систему алгебраїчних рівнянь розв'язати матричним методом

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 10, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

Розв'язати наступні системи алгебраїчних рівнянь, заданих № 3-6

3.
$$\begin{cases} 9x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ 6x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 0. \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ -2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -6, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 8. \end{cases}$$

6.
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$$

ВАРІАНТ 6

1. Розв'язати задану систему алгебраїчних рівнянь за формулами ›амера

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 4, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

2. Систему алгебраїчних рівнянь розв'язати матричним методом

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -3, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

Розв'язати наступні системи алгебраїчних рівнянь, заданих № 3-6

3. $$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 9x_3 = 0, \\ 7x_1 + x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 - 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 9, \\ x_1 - 2x_3 = -2, \\ 3x_1 + x_2 = 6. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = -25. \end{cases}$$

ВАРІАНТ 7

1. Розв'язати задану систему алгебраїчних рівнянь за формулами
ɔамера

$$\begin{cases} 7x_1 + x_2 - 2x_3 = -6, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -3, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 1. \end{cases}$$

2. Систему алгебраїчних рівнянь розв’язати матричним методом

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 6. \end{cases}$$

Розв’язати наступні системи алгебраїчних рівнянь, заданих № 3-6

3. $$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 7x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 0. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} 3x_1 + x_3 = 0, \\ x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 2, \\ x_1 + x_3 = 8, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 2, \\ 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$$

ВАРІАНТ 8

1. Розв'язати задану систему алгебраїчних рівнянь за формулами ɔамера

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -8. \end{cases}$$

2. Систему алгебраїчних рівнянь розв’язати матричним методом

$$\begin{cases} 7x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Розв’язати наступні системи алгебраїчних рівнянь, заданих № 3-6

3. $$\begin{cases} x_1 + 10x_2 - 9x_3 = 0, \\ 2x_1 - 9x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ -2x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9, \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 2, \\ 5x_1 - x_2 - 7x_3 = 0. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

ВАРІАНТ 9

1. Розв'язати задану систему алгебраїчних рівнянь за формулами ɔамера

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 = -8, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5, \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 = -7. \end{cases}$$

2. Систему алгебраїчних рівнянь розв’язати матричним методом

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -7, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

Розв’язати наступні системи алгебраїчних рівнянь, заданих № 3-6

3. $$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_3 = 0, \\ -2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 = 8, \\ 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 = 2, \\ 2x_1 - 6x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ 7x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 3. \end{cases}$$

ВАРІАНТ 10

1. Розв'язати задану систему алгебраїчних рівнянь за формулами
›амера

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -5, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$$

2. Систему алгебраїчних рівнянь розв’язати матричним методом

$$\begin{cases} 7x_1 + x_2 - x_3 = 12, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -4, \\ 2x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 18. \end{cases}$$

Розв’язати наступні системи алгебраїчних рівнянь, заданих № 3-6

3. $$\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + x_3 = 0, \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 6, \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 6, \\ 4x_1 - 6x_2 - 6x_3 = 0. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 5x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 5. \end{cases}$$

ВАРІАНТ 11

1. Розв'язати задану систему алгебраїчних рівнянь за формулами ɔамера

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -7, \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 = -7. \end{cases}$$

2. Систему алгебраїчних рівнянь розв’язати матричним методом

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 9. \end{cases}$$

Розв’язати наступні системи алгебраїчних рівнянь, заданих № 3-6

3. $$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 0, \\ -x_1 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2, \\ 7x_1 - 9x_2 - 3x3 = 6. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 5. \end{cases}$$

ВАРІАНТ 12

1. Розв'язати задану систему алгебраїчних рівнянь за формулами Крамера

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 = -3, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ 5x_1 - 3x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$$

2. Систему алгебраїчних рівнянь розв’язати матричним методом

$$\begin{cases} 7x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -1. \end{cases}$$

Розв’язати наступні системи алгебраїчних рівнянь, заданих № 3-6

3. $$\begin{cases} 8x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 2, \\ 4x_1 - 6x_2 - 8x_3 = 0, \\ 7x_1 + 8x_2 - x_3 = 6. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 3, \\ 51x_1 + 34x_2 + 51x_3 = 115. \end{cases}$$

ВАРІАНТ 13

1. Розв'язати задану систему алгебраїчних рівнянь за формулами ͻамера

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -11, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9, \\ 5x_1 - 7x_2 + 3x_3 = -26. \end{cases}$$

2. Систему алгебраїчних рівнянь розв’язати матричним методом

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 7, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 4, \\ 5x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -1. \end{cases}$$

Розв’язати наступні системи алгебраїчних рівнянь, заданих № 3-6

3. $$\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - 7x_3 = 0. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} 2x_1 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ -2x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} 5x_1 + 5x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ 7x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 17. \end{cases}$$

ВАРІАНТ 14

1. Розв'язати задану систему алгебраїчних рівнянь за формулами эамера

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7, \\ x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -10, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 11. \end{cases}$$

2. Систему алгебраїчних рівнянь розв’язати матричним методом

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = -4, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$$

Розв’язати наступні системи алгебраїчних рівнянь, заданих № 3-6

3.
$$\begin{cases} 9x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 0. \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

6.
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 8, \\ 5x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 5. \end{cases}$$

ВАРІАНТ 15

1. Розв'язати задану систему алгебраїчних рівнянь за формулами)амера

$$\begin{cases} 7x_1 + x_2 - 2x_3 = -13, \\ 8x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -14, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -5. \end{cases}$$

2. Систему алгебраїчних рівнянь розв’язати матричним методом

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -2, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -3, \\ 4x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -11. \end{cases}$$

Розв’язати наступні системи алгебраїчних рівнянь, заданих № 3-6

3. $$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 9x_1 + x_2 - 7x_3 = 0. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1, \\ 5x_1 - 2x_2 - x_3 = 9, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 2. \end{cases}$$

ВАРІАНТ 16

1. Розв'язати задану систему алгебраїчних рівнянь за формулами)амера

$$\begin{cases} 7x_1 + 8x_2 - x_3 = 12, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -19, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -18. \end{cases}$$

2. Систему алгебраїчних рівнянь розв'язати матричним методом

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -5, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 5, \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$$

Розв'язати наступні системи алгебраїчних рівнянь, заданих № 3-6

3. $$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 - 9x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0, \\ 2x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 4, \\ 5x_1 + 5x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 4, \\ x_1 - 12x_2 + 8x_3 = -2. \end{cases}$$

ВАРІАНТ 17

1. Розв'язати задану систему алгебраїчних рівнянь за формулами ɔамера

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -1, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

2. Систему алгебраїчних рівнянь розв’язати матричним методом

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = -5, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв’язати наступні системи алгебраїчних рівнянь, заданих № 3-6

3. $$\begin{cases} 9x_1 - 9x_2 + x_3 = 0, \\ 10x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} 3x_1 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 5. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 - x_3 = 4, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 2. \end{cases}$$

ВАРІАНТ 18

1. Розв'язати задану систему алгебраїчних рівнянь за формулами ɔамера

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = -3, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \\ x_2 - 3x_3 = -3. \end{cases}$$

2. Систему алгебраїчних рівнянь розв’язати матричним методом

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$$

Розв’язати наступні системи алгебраїчних рівнянь, заданих № 3-6

3. $$\begin{cases} 3x_1 - 9x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 7x_3 = 0. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 8. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 2, \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$$

ВАРІАНТ 19

1. Розв'язати задану систему алгебраїчних рівнянь за формулами ɔамера

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 1. \end{cases}$$

2. Систему алгебраїчних рівнянь розв'язати матричним методом

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 = -8. \end{cases}$$

Розв'язати наступні системи алгебраїчних рівнянь, заданих № 3-6

3. $$\begin{cases} 7x_1 + x_2 - 9x_3 = 0, \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 2, \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 3. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 - 6x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

ВАРІАНТ 20

1. Розв'язати задану систему алгебраїчних рівнянь за формулами ɔамера

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -5, \\ 2x_1 - 7x_2 + x_3 = -16. \end{cases}$$

2. Систему алгебраїчних рівнянь розв'язати матричним методом

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -1, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 10, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язати наступні системи алгебраїчних рівнянь, заданих № 3-6

3. $$\begin{cases} 10x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 0, \\ -x_1 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 1. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_3 = 2, \\ 8x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 15. \end{cases}$$

ВАРІАНТ 21

1. Розв'язати задану систему алгебраїчних рівнянь за формулами ɔамера

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 8. \end{cases}$$

2. Систему алгебраїчних рівнянь розв’язати матричним методом

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_3 = 4, \\ 3x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$$

Розв’язати наступні системи алгебраїчних рівнянь, заданих № 3-6

3. $$\begin{cases} 11x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} 2x_1 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 7, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 3, \\ 2x_1 - 4x_2 + 4x_3 = -1. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} 5x_1 + 5x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 2, \\ 4x_1 + 8x_2 - 2x_3 = -1. \end{cases}$$

ВАРІАНТ 22

1. Розв'язати задану систему алгебраїчних рівнянь за формулами ɔамера

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 15, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

2. Систему алгебраїчних рівнянь розв’язати матричним методом

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 9, \\ 2x_1 - x_3 = -3, \\ 5x_2 + x_3 = 11. \end{cases}$$

Розв’язати наступні системи алгебраїчних рівнянь, заданих № 3-6

3. $$\begin{cases} 12x_1 + 13x_2 - x_3 = 0, \\ 9x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

ВАРІАНТ 23

1. Розв'язати задану систему алгебраїчних рівнянь за формулами)амера

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 13. \end{cases}$$

2. Систему алгебраїчних рівнянь розв’язати матричним методом

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$$

Розв’язати наступні системи алгебраїчних рівнянь, заданих № 3-6

3. $$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0, \\ 8x_1 + 3x_2 - 11x_3 = 0. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 4, \\ x_1 - 12x_2 + 8x_3 = 4. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$$

ВАРІАНТ 24

1. Розв'язати задану систему алгебраїчних рівнянь за формулами ɔамера

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 6, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

2. Систему алгебраїчних рівнянь розв’язати матричним методом

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_3 = -2, \\ 3x_2 + 7x_3 = -11. \end{cases}$$

Розв’язати наступні системи алгебраїчних рівнянь, заданих № 3-6

3. $$\begin{cases} 13x_1 - x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 0. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 0, \\ 3x_1 + 7x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 - x_3 = 4, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 5. \end{cases}$$

ВАРІАНТ 25

1. Розв'язати задану систему алгебраїчних рівнянь за формулами эамера

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 = -5, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -5. \end{cases}$$

2. Систему алгебраїчних рівнянь розв’язати матричним методом

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_3 = 4, \\ 3x_2 - x_3 = -5. \end{cases}$$

Розв’язати наступні системи алгебраїчних рівнянь, заданих № 3-6

3. $$\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 7, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 5, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

ВАРІАНТ 26

1. Розв'язати задану систему алгебраїчних рівнянь за формулами ɔамера

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 1{,}0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$$

2. Систему алгебраїчних рівнянь розв’язати матричним методом

$$\begin{cases} 2x_1 - 8x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 = 1, \\ 3x_1 - x_3 = 2. \end{cases}$$

Розв’язати наступні системи алгебраїчних рівнянь, заданих № 3-6

3. $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 7x_3 = 0. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 - 10x_3 = 0, \\ 5x_1 - x_2 - 7x_3 = 0. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$$

ВАРІАНТ 27

1. Розв'язати задану систему алгебраїчних рівнянь за формулами эамера

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

2. Систему алгебраїчних рівнянь розв’язати матричним методом

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = -13, \\ 5x_1 + x_3 = -3, \\ 3x_1 + x_2 = -2. \end{cases}$$

Розв’язати наступні системи алгебраїчних рівнянь, заданих № 3-6

3. $$\begin{cases} 11x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 0. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 7, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

ВАРІАНТ 28

1. Розв'язати задану систему алгебраїчних рівнянь за формулами ɔамера

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 5, \\ 7x_1 + x_2 - 2x_3 = 11. \end{cases}$$

2. Систему алгебраїчних рівнянь розв’язати матричним методом

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_3 = 1, \\ 3x_2 + 4x_3 = -1. \end{cases}$$

Розв’язати наступні системи алгебраїчних рівнянь, заданих № 3-6

3. $$\begin{cases} 9x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - 8x_3 = 0. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 = 0, \\ 2x_1 - 6x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 5. \end{cases}$$

ВАРІАНТ 29

1. Розв'язати задану систему алгебраїчних рівнянь за формулами ɔамера

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + x_3 = 23, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 6. \end{cases}$$

2. Систему алгебраїчних рівнянь розв’язати матричним методом

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 8, \\ 2x_1 + 5x_3 = 14, \\ 3x_2 + 7x_3 = 14. \end{cases}$$

Розв’язати наступні системи алгебраїчних рівнянь, заданих № 3-6

3. $$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ 7x_1 - x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 0, \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 0, \\ 4x_1 - 6x_2 - 6x_3 = 0. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 5x_1 - 8x_2 + 9x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -1. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -1. \end{cases}$$

ВАРІАНТ 30

1. Розв'язати задану систему алгебраїчних рівнянь за формулами
рамера

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 - 3x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -3, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$$

2. Систему алгебраїчних рівнянь розв’язати матричним методом

$$\begin{cases} 8x_1 - 9x_2 + x_3 = 18, \\ 3x_1 - x_3 = 2, \\ 2x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$$

Розв’язати наступні системи алгебраїчних рівнянь, заданих № 3-6

3. $$\begin{cases} 15x_1 - 5x_2 + x_3 = 0, \\ 9x_1 + x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ 7x_1 - 9x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 5x_1 - 8x_2 + 9x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Індивідуальні завдання по темі Вектори

Задача №1. Перевірити, чи колінеарні вектори $\vec{c}$ та $\vec{d}$, що побудовані на даних векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

№	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$	$\vec{d}$
1	{1,-2,-3}	{3,2,-2}	$6\vec{a}-3\vec{b}$	$2\vec{a}-\vec{b}$
2	{2,3,-4}	{1,3,5}	$2\vec{a}-5\vec{b}$	$4\vec{a}-10\vec{b}$
3	{-1,4,5}	{2,4,-1}	$\vec{a}+3\vec{b}$	$3\vec{a}+\vec{b}$
4	{2,3,1}	{0,1,2}	$2\vec{a}-\vec{b}$	$6\vec{a}-3\vec{b}$
5	{3,-1,2}	{1,-1,3}	$3\vec{a}+4\vec{b}$	$9\vec{a}+12\vec{b}$
6	{1,-1,0}	{2,-4,1}	$-5\vec{a}+\vec{b}$	$-5\vec{a}-\vec{b}$
7	{2,-4,3}	{0,3,-2}	$2\vec{a}-4\vec{b}$	$\vec{a}-2\vec{b}$
8	{0,-1,2}	{-4,-1,1}	$-\vec{a}+5\vec{b}$	$\vec{a}-5\vec{b}$
9	{3,1,-2}	{0,1,3}	$-6\vec{a}+2\vec{b}$	$2\vec{a}-3\vec{b}$
10	{-2,1,0}	{1,-1,1}	$-4\vec{a}+3\vec{b}$	$4\vec{a}-3\vec{b}$
11	{3,-1,2}	{0,2,-5}	$2\vec{a}-3\vec{b}$	$-6\vec{a}+9\vec{b}$
12	{1,4,-5}	{3,1,-3}	$4\vec{a}-6\vec{b}$	$-2\vec{a}+3\vec{b}$
13	{3,-1,4}	{-5,4,2}	$2\vec{a}+4\vec{b}$	$\vec{a}-2\vec{b}$
14	{-1,2,3}	{4,3,-1}	$-3\vec{a}+2\vec{b}$	$6\vec{a}-4\vec{b}$
15	{3,2,1}	{-2,-1,1}	$5\vec{a}-3\vec{b}$	$-10\vec{a}+6\vec{b}$
16	{5,-4,3}	{3,-5,4}	$4\vec{a}-\vec{b}$	$\vec{a}-4\vec{b}$
17	{2,4,1}	{-1,4,3}	$6\vec{a}-9\vec{b}$	$-2\vec{a}+3\vec{b}$
18	{1,0,-1}	{2,1,-1}	$-2\vec{a}-4\vec{b}$	$\vec{a}+2\vec{b}$
19	{-2,3,-4}	{3,1,-1}	$-6\vec{a}-2\vec{b}$	$12\vec{a}+4\vec{b}$
20	{4,-3,1}	{1,-3,5}	$-4\vec{a}+2\vec{b}$	$4\vec{a}-2\vec{b}$
21	{0,2,4}	{-2,2,4}	$-\vec{a}-\vec{b}$	$2\vec{a}+4\vec{b}$
22	{-5,3,-2}	{-3,0,2}	$2\vec{a}+3\vec{b}$	$-6\vec{a}-9\vec{b}$
23	{1,-3,-5}	{4,3,-1}	$\vec{a}-5\vec{b}$	$-\vec{a}+5\vec{b}$
24	{3,-2,1}	{2,0,-5}	$-\vec{a}+2\vec{b}$	$2\vec{a}-\vec{b}$
25	{2,-1,3}	{1,4,-3}	$-5\vec{a}+$	$-10\vec{a}+$

			$4\vec{b}$	$8\vec{b}$
26	{0,2,-2}	{2,-1,3}	$4\vec{a}-5\vec{b}$	$5\vec{a}-4\vec{b}$
27	{-1,1,0}	{-2,-3,4}	$3\vec{a}-4\vec{b}$	$-6\vec{a}+8\vec{b}$
28	{-4,3,-2}	{-1,-2,-3}	$6\vec{a}-\vec{b}$	$-12\vec{a}+2\vec{b}$
29	{2,1,-3}	{-4,2,0}	$-\vec{a}+\vec{b}$	$2\vec{a}-2\vec{b}$
30	{3,-5,4}	{5,2,-1}	$5\vec{a}-4\vec{b}$	$4\vec{a}-5\vec{b}$

Задача №2. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$,якщо задано $|\vec{p}|$ та $|\vec{n}|$ та кут $\gamma=(\vec{p},\hat{}\,\vec{n})$.

№	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\lvert\vec{p}\rvert$	$\lvert\vec{n}\rvert$	$\gamma=(\vec{p},\hat{}\,\vec{n})$
1	$\vec{p}-3\vec{n}$	$2\vec{p}-4\vec{n}$	1	2	$3\pi/4$
2	$\vec{p}+2\vec{n}$	$3\vec{p}+5\vec{n}$	3	4	$\pi/3$
3	$\vec{p}-4\vec{n}$	$4\vec{p}-7\vec{n}$	6	0.5	$\pi/2$
4	$3\vec{p}+\vec{n}$	$\vec{p}+3\vec{n}$	2	2.5	$\pi/6$
5	$6\vec{p}-\vec{n}$	$\vec{p}-2\vec{n}$	4	3.5	$2\pi/3$
6	$2\vec{p}-3\vec{n}$	$3\vec{p}-6\vec{n}$	7	1	$\pi/6$
7	$5\vec{p}+\vec{n}$	$8\vec{p}-9\vec{n}$	5	4	$\pi/4$
8	$2\vec{p}+4\vec{n}$	$10\vec{p}-\vec{n}$	8	1.5	$5\pi/6$
9	$2\vec{p}+5\vec{n}$	$\vec{p}-3\vec{n}$	9	2	$\pi/3$
10	$3\vec{p}-\vec{n}$	$2\vec{p}+4\vec{n}$	10	2.5	$2\pi/3$
11	$4\vec{p}-2\vec{n}$	$3\vec{p}+7\vec{n}$	3	6	$\pi/2$
12	$10\vec{p}-\vec{n}$	$\vec{p}+2\vec{n}$	1	7	$\pi/6$
13	$6\vec{p}-8\vec{n}$	$3\vec{p}+\vec{n}$	7	2	$\pi/4$
14	$3\vec{p}-4\vec{n}$	$6\vec{p}-\vec{n}$	2	3.5	$3\pi/4$
15	$4\vec{p}+\vec{n}$	$3\vec{p}-2\vec{n}$	6	0.5	$5\pi/6$
16	$5\vec{p}-2\vec{n}$	$7\vec{p}-3\vec{n}$	3	4	$\pi/6$
17	$6\vec{p}-3\vec{n}$	$9\vec{p}-5\vec{n}$	5	3	$\pi/2$
18	$7\vec{p}-4\vec{n}$	$3\vec{p}+2\vec{n}$	9	2	$\pi/3$
19	$8\vec{p}-5\vec{n}$	$10\vec{p}-9\vec{n}$	4	2.5	$2\pi/3$
20	$9\vec{p}-6\vec{n}$	$7\vec{p}+8\vec{n}$	8	1	$3\pi/4$
21	$10\vec{p}-8\vec{n}$	$6\vec{p}-2\vec{n}$	2	0.5	$5\pi/6$
22	$\vec{p}+2\vec{n}$	$3\vec{p}-5\vec{n}$	1	9	$\pi/6$

23	$2\vec{p}-4\vec{n}$	$5\vec{p}+7\vec{n}$	7	3	$\pi/4$
24	$3\vec{p}-6\vec{n}$	$4\vec{p}-2\vec{n}$	3	14	$\pi/2$
25	$4\vec{p}-8\vec{n}$	$2\vec{p}+\vec{n}$	6	4	$\pi/3$
26	$5\vec{p}-\vec{n}$	$6\vec{p}+2$	4	2.5	$\pi/6$
27	$6\vec{p}-4\vec{n}$	$3\vec{p}-\vec{n}$	5	4	$\pi/4$
28	$7\vec{p}-5\vec{n}$	$4\vec{p}+\vec{n}$	2	7	$3\pi/4$
29	$5\vec{p}-9\vec{n}$	$2\vec{p}-3\vec{n}$	7	1	$\pi/2$
30	$9\vec{p}-10\vec{n}$	$7\vec{p}+6\vec{n}$	9	2	$\pi/3$

б) Знайти довжину векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, якщо задано $|\vec{p}|$, $|\vec{n}|$ та кут $\gamma=(\vec{p},\hat{}\,\vec{n})$

№	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\lvert\vec{p}\rvert$	$\lvert\vec{n}\rvert$	$\gamma=(\vec{p},\hat{}\,\vec{n})$
1	$3\vec{p}-\vec{n}$	$2\vec{p}+5\vec{n}$	1	4	$\pi/6$
2	$2\vec{p}+4\vec{n}$	$3\vec{p}-6\vec{n}$	2	0.5	$2\pi/3$
3	$\vec{p}-3\vec{n}$	$5\vec{p}+\vec{n}$	4	1.5	$\pi/4$
4	$6\vec{p}+\vec{n}$	$2\vec{p}-3\vec{n}$	8	1	$3\pi/4$
5	$2\vec{p}-\vec{n}$	$3\vec{p}+2\vec{n}$	10	2	$5\pi/6$
6	$\vec{p}+2\vec{n}$	$4\vec{p}-7\vec{n}$	3	6	$\pi/3$
7	$\vec{p}-4\vec{n}$	$3\vec{p}+2\vec{n}$	5	3	$\pi/2$
8	$3\vec{p}+\vec{n}$	$\vec{p}-3\vec{n}$	7	1	$2\pi/3$
9	$6\vec{p}-\vec{n}$	$\vec{p}+2\vec{n}$	9	4	$\pi/4$
10	$2\vec{p}-3\vec{n}$	$3\vec{p}+4\vec{n}$	6	2	$3\pi/4$
11	$5\vec{p}+\vec{n}$	$6\vec{p}-4\vec{n}$	4	3	$\pi/6$
12	$2\vec{p}+4\vec{n}$	$2\vec{p}-6\vec{n}$	2	5	$\pi/3$
13	$\vec{p}+5\vec{n}$	$8\vec{p}-10\vec{n}$	1	6	$\pi/2$
14	$3\vec{p}-\vec{n}$	$7\vec{p}+5\vec{n}$	3	2	$5\pi/6$
15	$4\vec{p}-2\vec{n}$	$3\vec{p}+4\vec{n}$	5	4	$\pi/4$
16	$10\vec{p}-\vec{n}$	$\vec{p}+3\vec{n}$	6	1	$\pi/2$
17	$6\vec{p}-8\vec{n}$	$2\vec{p}+\vec{n}$	4	3	$\pi/3$
18	$3\vec{p}-4\vec{n}$	$7\vec{p}+\vec{n}$	7	2	$2\pi/3$
19	$4\vec{p}+\vec{n}$	$3\vec{p}-2\vec{n}$	9	4	$3\pi/4$
20	$5\vec{p}-2\vec{n}$	$6\vec{p}+\vec{n}$	8	1	$5\pi/6$
21	$7\vec{p}-4\vec{n}$	$3\vec{p}-2\vec{n}$	3	2	$\pi/2$
22	$8\vec{p}-5\vec{n}$	$\vec{p}+\vec{n}$	2	1	$\pi/3$
23	$10\vec{p}-8\vec{n}$	$\vec{p}-2\vec{n}$	5	3	$\pi/2$

24	$\vec{p}+2\vec{n}$	$2\vec{p}-3\vec{n}$	1	4	$\pi/4$
25	$2\vec{p}-4\vec{n}$	$3\vec{p}+5\vec{n}$	6	5	$\pi/6$
26	$3\vec{p}-6\vec{n}$	$4\vec{p}+\vec{n}$	9	2	$\pi/3$
27	$4\vec{p}-8\vec{n}$	$2\vec{p}-\vec{n}$	7	1	$\pi/2$
28	$9\vec{p}-6\vec{n}$	$3\vec{p}+2\vec{n}$	3	4	$\pi/6$
29	$6\vec{p}-4\vec{n}$	$2\vec{p}+5\vec{n}$	4	3	$\pi/3$
30	$5\vec{p}-9\vec{n}$	$\vec{p}+2\vec{n}$	2	1	$\pi/4$

Задача №3. Дано точки $\vec{A}$, $\vec{B}$ і $\vec{C}$ та силу $\vec{F}$, прикладену в точці $\vec{B}$.

Знайти:1) косинус кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$;

2) момент сили $\vec{F}$ відносно точки $\vec{B}$;

3) роботу сили $\vec{F}$ при переміщенні з точки $\vec{B}$ в точку $\vec{C}$.

№	A	B	C	$\vec{F}$
1	(1, 2, -3)	(2, -3, 4)	(5, 1, -2)	{-3, -4, 1}
2	(2, -3, 4)	(-3, 4, -5)	(4, 3, 1)	{1, -2, 0}
3	(3, 1, -2)	(1, -1, 0)	(2, 3, -4)	{5, 4, 3}
4	(0, 4, 1)	(2, 1, -3)	(3, 5, -2)	{1, -3, 2}
5	(5, -1, 2)	(3, 0, -1)	(2, -3, 1)	{4, -5, 6}
6	(6, 3, -4)	(2, -1, 0)	(4, 2, -2)	{5, -7, 1}
7	(7, -2, 5)	(5, 3, -2)	(0, 1, 2)	{6, -4, -1}
8	(0, -4, 6)	(2, -2, 3)	(3, 5, -4)	{-2, 6, 3}
9	(8 ,-5 , 7)	(3, -2, 4)	(4, 2, -1)	{1, -3, 5}
10	(9, 6, -3)	(3, 0, -4)	(4, -5, 2)	{5, -4, 1}
11	(-1, 2, 4)	(0, 4, 6)	(3, 5, -2)	{-2, -3, 5}
12	(-2, 5, 6)	(1, -2, 3)	(-3, 4, 1)	{0, 2, -5}
13	(-3, 9, 1)	(2, -3, 5)	(4, -4, -2)	{1, -2, 6}
14	(0, 8, -3)	(-1, 3, 4)	(2, 5, -6)	{2, 4, -5}
15	(-7, 3, -4)	(0, -2, 3)	(1, 4, -5)	{6, 5, 2}
16	(-6, 1, -2)	(1, 3, -4)	(5, 2, -3)	{7, 4, 0}
17	(-5, 2, 3)	(0, 5, -1)	(4, 1, -2)	{-1, 4, -5}
18	(1, 4, 6)	(2, -3, 5)	(3, 0, -4)	{-2, 5, -1}
19	(4, 7, 5)	(-1, 1, 2)	(-2, 3, 0)	{-6, 4, -2}
20	(3, 6, -5)	(-2, 3, 4)	(1, 2, -6)	{2, 1, 0}
21	(2, 3, -6)	(5, 1, -3)	(4, -1, -2)	{3, -4, 1}
22	(0, 1, -4)	(2, 4, 6)	(5, -5, 3)	{-2, 3, 4}
23	(-3, 0, -7)	(1, -3, 5)	(2, -4, 6)	{-1, 1, 2}

24	(-4, 8, 5)	(3, 6, 7)	(0, -1, 2)	{3, -5, 4}
25	(-2, 5, 3)	(-3, 4, -1)	(1, 2, -6)	{2, 4, -6}
26	(2, 4, -2)	(0, 1, -5)	(-1, 3, -2)	{-3, 5, 1}
27	(3, 7, -1)	(4, -2, 6)	(0, -3, 5)	{-4, 1, -2}
28	(6, 9, 0)	(1, -3, 4)	(5, -2, 1)	{-2, 1, 3}
29	(9, 2, -2)	(-1, 3, -5)	(8, -4, 1)	{7, -6, 2}
30	(7, 1, -4)	(-2, 4, -6)	(5, 3, 2)	{4, -2, -3}

Задача №4

Дано координати вершини піраміди ABCD. Потрібно:

1) записати вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ в системі орт;
2) знайти напрямні косинуси векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$;
3) знайти проекцію вектора $\overrightarrow{AD}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$;
4) знайти об'єм піраміди *ABCD* та висоту, опущену із вершини *D* на грань ABC:

№	A	B	C	D
1	(3, 1, -2)	(4, -1, 0)	(14, 3, 8)	(11, 5, 6)
2	(0, 2, -10)	(1, 0, -8)	(11, 4, 0)	(8, 6, -2)
3	(-8, 3, -1)	(-7, 1, 1)	(3, 5, 9)	(0, 7, 7)
4	(-1, -2, -8)	(0, -4, -6)	(10, 0, 2)	(7, 2, 0)
5	(2, -1, -4)	(3, -3, -2)	(13, 1, 6)	(10, 3, 4)
6	(1, -4, 0)	(2, -6, 2)	(12, -2, 10)	(9, 0, 8)
7	(-4, 5, -5)	(-3, 3, -3)	(7, 7, 5)	(4, 9, 3)
8	(-5, 0, 1)	(-4, -2, 3)	(6, 2, 11)	(3, 4, 9)
9	(-2, -3, 2)	(-1, -5, 4)	(9, 1, 12)	(6, 1, 10)
10	(4, -2, 5)	(8, 2, 3)	(6, 9, -5)	(4, 0, 6)
11	(-3, 4, -3)	(-2, 2, -1)	(8, 6, 7)	(5, 8, 5)
12	(3, 3, -3)	(7, 7, -5)	(5, 14, -13)	(3, 5, -2)
13	(5, 0, 4)	(9, 4, 2)	(7, 11, -7)	(5, 2, 5)
14	(0, 4, 3)	(4, 8, 1)	(2, 15, -7)	(0, 6, 4)
15	(9, 3, 0)	(13, 7, 2)	(11, 14, -10)	(9, 5, 1)
16	(-2, 0, -2)	(2, 4, -4)	(0, 11, -12)	(-2, 2, -1)
17	(3, -2, 2)	(7, 2, 0)	(5, 9, -8)	(3, 0, 3)
18	(-4, 2, -1)	(0, 6, -3)	(-2, 13, -	(-4, 4, 0)

			11)	
19	(0, -3, 5)	(4, 1, 3)	(2, 8, -6)	(0, -1, 6)
20	(-1, -1, -5)	(3, 5, -7)	(1, 12, -15)	(-1, 3, -4)
21	(3, 5, -1)	(7, 9, -3)	(5, 16, -11)	(3, 7, 10)
22	(-3, -6, 2)	(1, -2, 0)	(-1, 2, 8)	(-3, -4, 3)
23	(-1, 5, 2)	(3, 9, 0)	(1, 16, -8)	(-1, 7, 3)
24	(1, -4, 3)	(5, 0, -2)	(3, 7, -10)	(-1, -2, 1)
25	(-2, 2, 1)	(2, 6, -1)	(0, 13, -9)	(-2, 4, 2)
26	(5, -1, -4)	(9, 3, -6)	(7, 10, -14)	(5, 1, -3)
27	(0, 2, 0)	(4, 6, -2)	(2, 13, -10)	(0, 4, 1)
28	(0, -1, -1)	(-2, 3, 5)	(1, -5, -9)	(-1, -6, 3)
29	(2, -3, 1)	(6, 1, -1)	(4, 8, -9)	(2, -1, 2)
30	(2, 3, 1)	(4, 1, -2)	(6, 3, 7)	(7, 5, -3)

Задача №5

Дано координати векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ в базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Знайти координати α, β, γ вектора $\vec{d}$ в базисі $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ($\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$).

№	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$	$\vec{d}$
1	{-3, 4, -2}	{2, -5, 3}	{3, 2, 5}	{-7, -5, -7}
2	{6, 5, -4}	{4, 3, -2}	{3, 2, 1}	{-1, 0, -3}
3	{2, 3, 1}	{5, -2, 1}	{4, -3, -2}	{1, 2, -2}
4	{-2, -3, -5}	{-1, 2, -3}	{4, 2, 3}	{2, -8, -1}
5	{3, 2, 2}	{-4, 1, 2}	{2, 5, 3}	{0, -2, 5}
6	{-1, -3, 5}	{2, 1, 1}	{2, 3, 1}	{6, -4, -8}
7	{4, 2, 3}	{-3, 1, -2}	{6, 3, 1}	{5, 5, -3}
8	{1, -2, 1}	{2, 1, 3}	{1, 3, -2}	{3, -6, 7}
9	{3, 1, 2}	{-3, 3, -1}	{1, 2, 3}	{8, 2, 9}
10	{1, -2, -4}	{3, 2, 1}	{2, 1, 3}	{2, -2, 1}
11	{1, -2, 3}	{1, 3, -2}	{2, -2, 3}	{2, 11, 18}
12	{2, -3, 4}	{2, 2, 3}	{3, -1, 2}	{-1, 8, 4}
13	{3, 2, 4}	{-5, -3, 1}	{3, 2, 2}	{19, 12, 6}

14	{-5, -2, -2}	{2, 3, 2}	{4, 3, -1}	{-7, -2, 1}
15	{3, 2, 1}	{-1, 3, -2}	{2, -1, 3}	{0, -6, 4}
16	{2, 3, 4}	{-4, -2, 5}	{5, 3, -2}	{-3, -5, -5}
17	{-3, -2, -5}	{4, 5, 3}	{2, 3, 4}	{3, 5, -3}
18	{-4, 2, -1}	{-3, 1, 2}	{2, 3, 1}	{3, -2, 3}
19	{5, 2, 4}	{3, 2, 1}	{4, -3, 2}	{3, 5, 5}
20	{-2, -4, -3}	{5, 3, 2}	{3, -5, 4}	{0, -6, 5}
21	{4, 2, 3}	{2, 3, -4}	{-2, -4, 5}	{-10, -9, 0}
22	{5, 6, 4}	{-2, -3, -4}	{-1, -2, 3}	{7, 7, 7}
23	{4, 5, 2}	{5, -4, 1}	{-3, 4, -1}	{5, 1, 3}
24	{-2, -1, -3}	{6, 3, 5}	{5, 4, 3}	{3, 3, 4}
25	{4, 2, 3}	{-4, -1, -3}	{-5, -8, -1}	{-1, -5, 2}
26	{3, 4, 5}	{-4, 2, 2}	{4, -1, 3}	{-2, -8, -2}
27	{5, -2, 3}	{-2, 3, -4}	{4, 3, 5}	{3, -8, 2}
28	{3, 2, 2}	{-4, 3, -2}	{3, 2, -4}	{7, -1, -8}
29	{2, 1, 3}	{3, -4, 2}	{3, 2, -5}	{-5, -9, 9}
30	{-6, -8, -5}	{5, 3, 4}	{2, -4, 3}	{-2, 2, 0}

Список рекомендованої літератури

1. Бугров Я.С., Никольський С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Наука, 1988.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І., Вища математика. –К.: 1988 А.С.К.,2001.
3. Суліма І.М., Ковтун І.І., Радчик І.А. Вища математика. Частина перша. Лінійна та векторна алгебра. Аналітична геометрія. – К.:Видавничий центр НАУ,2006.
4. Суліма І.М., Ковтун І.І., Батечко Н.Г., Нікітіна І.А., Яковенко В.М., Збірник задач-К.: Видавничий центр НАУ, 2006.
5. Суліма І.М., Ковтун І.І., Батечко Н.Г., Нікітіна І.А., Яковенко В.М., Вища математика у задачах і вправах. Частина перша. –К.: Видавничий центр НАУ, 2005.