Практичне заняття 7-8

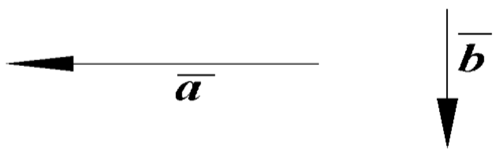
Тема: Вектори в просторі. Лінійні операції з векторами.
Мета: Навчити застосовувати правило трикутника та паралелограма додавання векторів, виконувати дії над векторами в координатному вигляді.

Термінологічний словник ключових понять

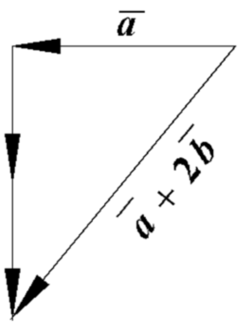
1. ***Вектором*** називається напрямлений відрізок.
2. ***Довжиною*** або ***модулем*** вектора $\overline{AB}$ називається невід'ємне число, яке дорівнює довжині відрізка $\overline{AB}$.
3. Вектор, у якого початок і кінець співпадають, називається ***нульовим***. Цей вектор не має напряму, а його довжина дорівнює нулю.
4. ***Колінеарними*** називаються вектори, які лежать на паралельних прямих. Якщо колінеарні вектори напрямлені в одну сторону, то вони називаються ***співнапрямленими***, а якщо в різні – то ***протилежно напрямленими.***
5. Два вектори називаються ***рівними***, якщо вони мають однакові модулі і співнапрямлені.
6. ***Ортом*** вектора $\overline{a}$ називається такий вектор ($\overline{a}^0$), який має одиничну довжину і співнапрямлений з $\overline{a}$.
7. ***Компланарними*** називають вектори, що лежать в одній площині або в паралельних площинах.

Навчальні завдання

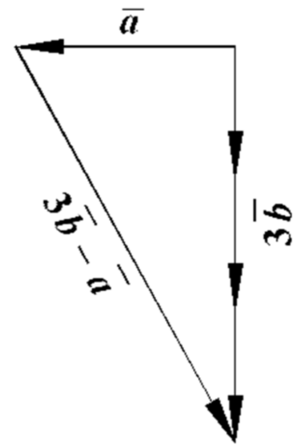
Задача 1. Дано ненульові вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$. Побудувати вектори $\overline{a}+2\overline{b}$, $3\overline{b}-\overline{a}$.



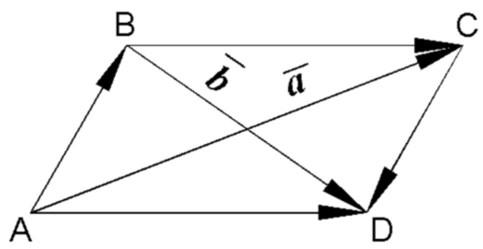
Розв'язання. Знайдемо суму за правилом трикутника $\overline{a}+2\overline{b}$:



і різницю $3\bar{b}-\bar{a}$:



Задача 2. Вектори $\overline{AC}=\bar{a}$, $\overline{BD}=\bar{b}$ - діагоналі паралелограма ***ABCD***. Запишіть вектори $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ і $\overline{DA}$ через $\bar{a}$ і $\bar{b}$.



Розв'язання.

За означенням суми і різниці векторів маємо: $\overline{BC}+\overline{CD}=\bar{b}$, $\overline{BC}-\overline{CD}=\bar{a}$. Додавши ці рівності, дістанемо $\overline{BC}=\dfrac{\bar{a}+\bar{b}}{2}$. Далі знайдемо $\overline{CD}=\bar{b}-\overline{BC}=\bar{b}-\dfrac{\bar{a}+\bar{b}}{2}=\dfrac{\bar{b}-\bar{a}}{2}$; $\overline{AB}=-\overline{CD}=\dfrac{\bar{a}-\bar{b}}{2}$, $\overline{DA}=-\overline{BC}=-\dfrac{\bar{a}+\bar{b}}{2}$.

Задача 3. Дано: $\mathbf{пр}_{\bar{l}}\bar{\mathbf{a}}=\mathbf{3}$; $\mathbf{пр}_{\bar{l}}\bar{\mathbf{b}}=-\mathbf{1}$. Обчислити: 1) $\mathbf{пр}_{\bar{l}}\left(3\bar{\mathbf{a}}+2\bar{\mathbf{b}}\right)$; 2) $\mathbf{пр}_{\bar{l}}\left(\bar{\mathbf{a}}-2\bar{\mathbf{b}}\right)$.

Розв'язання. Використавши властивості проекцій, дістанемо:

1) $np_{\bar{l}}\left(3\bar{a}+2\bar{b}\right)=3np_{\bar{l}}\bar{a}+2np_{\bar{l}}\bar{b}=3\cdot 3+2(-1)=7$.

2) $np_{\bar{l}}\left(\bar{a}-2\bar{b}\right)=np_{\bar{l}}\bar{a}-2np_{\bar{l}}\bar{b}=3-2(-1)=5$.

Задача 4. Знайти проекції вектора $\bar{a}$ на вісь ***l***, яка утворює з вектором кут: 1) 45^0, 2) 120^0, 3) 150^0, якщо довжина вектора дорівнює 4.

Розв'язання.

1) $np_{\bar{l}}\bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos\varphi = 4 \cdot \cos 45^0 = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$;

2) $np_{\bar{l}}\bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos\varphi = 4 \cdot \cos 120^0 = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$;

3) $np_{\bar{l}}\bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos\varphi = 4 \cdot \cos 150^0 = 4 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2\sqrt{3}$.

Задача 5. Знайти периметр трикутника, вершинами якого є точки $A(8;0;6)$, $B(8;-4;6)$, $C(6;-2;5)$.

Розв'язання. Знайдемо координати векторів, що створюють трикутник, та їх довжини:

$\overline{AB} = (8-8;-4-0;6-6)$, $\overline{AB} = (0;-4;0)$;

$\overline{AC} = (6-8;-2-0;5-6)$, $\overline{AC} = (-2;-2;-1)$;

$\overline{BC} = (6-8;-2-(-4);5-6)$, $\overline{BC} = (-2;2;-1)$;

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{0^2 + (-4)^2 + 0^2} = 4;$$

$$\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = 3;$$

$$\left|\overline{BC}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3.$$

Тоді периметр трикутника $P = 4 + 3 + 3 = 10$.

Задача 6. Обчислити довжину вектора $3\bar{a} + 2\bar{b}$, якщо $\bar{a} = 2\bar{i}$, $\bar{b} = \bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$.

Розв'язання. Знайдемо координати векторів:

$3\bar{a} = (3 \cdot 2; 3 \cdot 0; 3 \cdot 0)$, $3\bar{a} = (6;0;0)$;

$2\bar{b} = (2 \cdot 1; 2 \cdot 1; 2 \cdot (-1))$, $2\bar{b} = (2;2;-2)$;

$3\bar{a} + 2\bar{b} = (6+2; 0+2; 0-2)$, $3\bar{a} + 2\bar{b} = (8;2;-2)$.

Тоді довжина шуканого вектора дорівнює:

$$\left|3\bar{a} + 2\bar{b}\right| = \sqrt{(8)^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}.$$

Задача 7. Відрізок AB, де $A(7;2;-3)$, . $B(-5;0;4)$, поділений точкою M у відношенні $\lambda = AB : AM = 1:5$. Знайти координати точки M.

Розв'язання.

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} = \frac{7 + \frac{1}{5}(-5)}{1 + \frac{1}{5}} = \frac{6}{\left(\frac{6}{5}\right)} = 5;\quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} = \frac{2 + \frac{1}{5} \cdot 0}{1 + \frac{1}{5}} = \frac{2}{\left(\frac{6}{5}\right)} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3};$$

$$z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} = \frac{-3 + \frac{1}{5} \cdot 4}{1 + \frac{1}{5}} = \frac{\left(-\frac{11}{5}\right)}{\left(\frac{6}{5}\right)} = -\frac{11}{6}.$$

Отже, $M\left(5;\frac{5}{3};-\frac{11}{6}\right)$.

Задача 8. Відрізок з кінцями $A(-2;4;0)$ і $B(6;12;-4)$, ділиться в точці M навпіл. Знайдіть довжину відрізка MK, де $K(0;10;6)$.

Розв'язання. Знайдемо координати точки M за формулами:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-2+6}{2}=2;\ y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{4+12}{2}=8;\ z=\frac{z_1+z_2}{2}=\frac{0-4}{2}=-2;$$

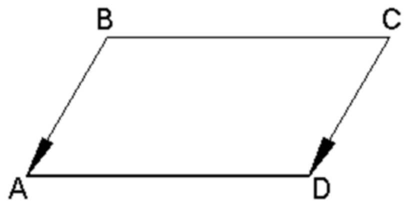
$M(2;8;-2)$.

Тоді координати вектора $\overline{MK}=(0-2;10-8;6-(-2))$, $\overline{MK}=(2;2;8)$.

Довжина вектора $\left|\overline{MK}\right|=\sqrt{(-2)^2+2^2+8^2}=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$.

Задача 9. Точки $A(-3;1;2)$, $B(1;3;2)$, $C(-4;1;0)$ є вершинами паралелограма, причому A і C – протилежні вершини. Знайдіть четверту вершину D.

Розв'язання.



Позначимо координати точки $D(x;y;z)$, тоді $\overline{CD}=(x+4;y-1;z+0)$, $\overline{BA}=(-4;-2;0)$. Оскільки $\left|\overline{CD}\right|=\left|\overline{BA}\right|$, їх координати рівні:

$x+4=-4$; $\quad y-1=-2$; $\quad z=0$;

$x=-8$; $\quad y=-1$; $\quad z=0$.

Четверта вершина паралелограма – точка $D(-8;-1;0)$.

Задача 10. Знайти напрямні косинуси вектора $\overline{a}$, а також кути, що утворює вектор з осями координат, якщо $\overline{a}=\overline{i}-\overline{k}$.

Розв'язання. Знайдемо координати вектора $\overline{a}=(1;0;-1)$ та його довжину $\left|\overline{a}\right|=\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$.

Напрямні косинуси дорівнюють:

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\left|\overline{a}\right|}=\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2};\quad \cos\beta=\frac{a_y}{\left|\overline{a}\right|}=\frac{0}{2}=0;\quad \cos\gamma=\frac{a_z}{\left|\overline{a}\right|}=\frac{-1}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Тоді $\alpha=\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$; $\quad \beta=\arccos(0)=\frac{\pi}{2}$; $\quad \gamma=\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}$.

Завдання для самостійної роботи.

Задача 1. У трикутнику ABC проведено медіану AM. Доведіть, що $2\overline{AM}=\overline{AB}+\overline{AC}$.

Задача 2. Дано вектори $\bar{a}=-2\bar{i}-3\bar{j}$, $\bar{b}=\bar{i}+\bar{j}-4\bar{k}$, $\bar{c}=\bar{k}-2\bar{j}$. Знайти довжини векторів 1) $\bar{a}+2\bar{b}$, 2) $3\bar{c}-\bar{a}$.

Задача 3. Точки $A(1;-2;-1)$, $B(3;4;2)$, $C(3;1;-2)$ є вершинами паралелограма, причому A і C – протилежні вершини. Знайдіть четверту вершину D, а також периметр паралелограму.

Задача 4. Дано: $|\bar{a}|=2$, $|\bar{b}|=4$, кути між віссю l дорівнюють 60^0 і 120^0. Обчислити $np_l(2\bar{b}-\bar{a})$.

Задача 5. Відрізок AB задано координатами своїх кінців $A(3;-2;-5)$ і $B(7;6;-1)$. Знайти довжину вектора $\overline{CD}$, де C – середина відрізка AB, D – точка, яка ділить AB у відношенні $\lambda=\frac{1}{3}$.