Практичне заняття 9-10

Тема: Скалярний, векторний і мішаний добутки векторів.
Мета: Ознайомити з скалярним, векторним і мішаним добутками векторів, вказати їх арифметичні та геометричні властивості. Навчити розв'язувати типові задачі.

Термінологічний словник ключових понять

1. ***Скалярним добутком векторів*** називається число, яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними. Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначають символом $\vec{a}\,\vec{b}$. Якщо кут між векторами позначити через (φ), то їх скалярний добуток обчислюється за формулою:

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi).$$

2. **Векторним добутком векторів** $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який задовольняє умови:

- вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;
- довжина вектор $\vec{a}$ дорівнює добутку довжини кожного з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ на синус кута між ними;
- вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють праву трійку векторів, тобто з кінця вектора $\vec{c}$ найменший поворот вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ видно проти годинникової стрілки.

Позначають векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ так: $\bar{a} \times \bar{b}$.

3. **Мішаним добутком векторів** $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ називається число, яке дорівнює скалярному добутку вектора $\vec{a}$ на векторний добуток векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$, тобто

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Навчальні завдання

Задача 1. Знайти скалярний добуток векторів $\bar{a} = 4\bar{k} - \bar{i}$, $\bar{b} = 3\bar{j} + \bar{i} - \bar{k}$.

Розв'язання. Знайдемо координати векторів: $\bar{a}(-1;\ 0;\ 4)$, $\bar{b}(1;\ 3;\ -1)$. Тоді скалярний добуток дорівнює $\bar{a} \cdot \bar{b} = (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) = -1 - 4 = -5$.

Задача 2. Знайти кут між діагоналями паралелограма, який побудований на векторах $\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$, $\bar{b} = 3\bar{j} - \bar{i} - 4\bar{k}$.

Розв'язання. Як відомо, діагоналі паралелограма є $\bar{c} = (\bar{a} + \bar{b})$ та $\bar{d} = (\bar{a} - \bar{b})$. Знайдемо ці вектори:
$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b} = (\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}) + (3\bar{j} - \bar{i} - 4\bar{k}) = 5\bar{j} - 5\bar{k}$;

$\bar{c}=\bar{a}+\bar{b}=(0;\ 5;\ -5)$;

$\bar{d}=\bar{a}-\bar{b}=(\bar{i}+2\bar{j}-\bar{k})-(3\bar{j}-\bar{i}-4\bar{k})=2\bar{i}-\bar{j}+3\bar{k}$;

$\bar{d}=\bar{a}-\bar{b}=(2;\ -1;\ 3)$.

Тоді косинус кута між діагоналями знаходиться за формулою:

$$\cos\left(\bar{c}\ \widehat{,}\ \bar{d}\right)=\frac{\bar{c}\cdot\bar{d}}{|\bar{c}|\cdot|\bar{d}|}=\frac{0\cdot 2+5\cdot(-1)+(-5)\cdot 3}{\sqrt{5^2+(-5)^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}}=\frac{-5-15}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{14}}=\frac{-20}{5\sqrt{2}\cdot\sqrt{2\cdot 7}}=$$

$$=-\frac{20}{10\sqrt{7}}=-\frac{2}{\sqrt{7}}=-\frac{2\sqrt{7}}{7};$$

$$\cos\left(\bar{c}\ \widehat{,}\ \bar{d}\right)=\arccos\left(-\frac{2\sqrt{7}}{7}\right).$$

Задача 3. Задано вектори $\bar{a}=12\bar{i}-3\bar{j}-3\bar{k}$, $\bar{b}=\bar{i}+2\bar{j}+4\bar{k}$, $\bar{c}=\bar{i}-3\bar{j}-2\bar{k}$. Обчислити проекцію вектора $\bar{b}+\bar{c}$ на вектор $\bar{a}$.

Розв'язання. Знайдемо координати векторів $\bar{b}+\bar{c}=(1+1;\ 2-3;\ 4-2)$; $\bar{b}+\bar{c}=(2;\ -1;\ 2)$ та $\bar{c}=(12;\ -3;\ -3)$.

Обчислимо проекцію $(\bar{b}+\bar{c})$ на вектор $\bar{a}$ за формулою:

$$np_{\bar{a}}(\bar{b}+\bar{c})=\frac{(\bar{b}+\bar{c})\cdot\bar{a}}{|\bar{a}|}=\frac{2\cdot 12+(-1)\cdot(-3)+2(-3)}{\sqrt{12^2+(-3)^2+(-3)^2}}=\frac{24+3-6}{\sqrt{144+9+9}}=\frac{21}{\sqrt{162}}=\frac{21}{9\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{6}$$

.

Задача 4. Дано трикутник своїми вершинами: $A(2;\ 4;\ 5)$, $B(-3;\ 2;\ 2)$, $C(-1;\ 0;\ 3)$. Покажіть, що $\overline{CA}\perp\overline{CB}$.

Розв'язання. Знайдемо координати векторів:

$\overline{CA}=(2-(-1);\ 4-0;\ 5-3)$; $\overline{CA}=(3;\ 4;\ 2)$;

$\overline{CB}=(-3-(-1);\ 2-0;\ 2-3)$; $\overline{CB}=(-2;\ 2;\ -1)$.

Умова перпендикулярності двох векторів має вигляд: $\overline{CA}\cdot\overline{CB}=0$. Перевіримо виконання цієї умови: $\overline{CA}\cdot\overline{CB}=3\cdot(-2)+4\cdot 2+2\cdot(-1)=-6+8-2=0$.

Доведено, що вектори перпендикулярні.

Задача 5. Знайти площу паралелограма, який побудований на векторах $\bar{a}=\bar{i}+\bar{j}-\bar{k}$, $\bar{b}=2\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}$.

Розв'язання. Модуль векторного добутку двох векторів дорівнює площі паралелограма, який побудований на цих векторах. Знайдемо векторний добуток:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 2\end{vmatrix}=\bar{i}\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}-\bar{j}\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 2\end{vmatrix}+\bar{k}\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=$$

$$=\bar{i}\cdot(2-1)-j\cdot(2+2)+\bar{k}\cdot(-1-2)=\bar{i}-4\bar{j}-3\bar{k}.$$

Площа паралелограма дорівнює:

$$S = \left|\bar{a} \times \bar{b}\right| = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{26}(\textit{кв. од.}).$$

Задача 6. Знайти площу трикутника за координатами його вершин: $A(1;\ -2;\ 8)$, $B(0;\ 0;\ 4)$, $C(6;\ 2;\ 0)$.

Розв'язання. Розглянемо два вектори, на яких побудовано трикутник, наприклад, $\overline{AB}\ \perp\ \overline{AC}$.

$\overline{AB} = (-1;\ 2;\ -4)$, $\overline{AC} = (5;\ 4;\ -8)$.

Векторний добуток дорівнює:

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 2 & -4 \\ 5 & 4 & -8 \end{vmatrix} = \bar{i}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} - \bar{j}\cdot\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 5 & -8 \end{vmatrix} + \bar{k}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{i}\cdot(-16+16) - j\cdot(8+20) + \bar{k}\cdot(-4-10) = -28\bar{j} - 14\bar{k}.$$

Тоді площа трикутника дорівнює:

$$S = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right| = \sqrt{(-28)^2 + (-14)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{5\cdot 14^2} = 7\sqrt{5}(\textit{кв. од.}).$$

Задача 7. Розкрити дужки та спростити вираз:

$$(2\bar{k} \times \bar{j})\cdot(3\bar{i} - \bar{k}) + (\bar{i} \times 2\bar{j})\cdot(\bar{j} - 3\bar{k}).$$

Розв'язання.

$$(2\bar{k} \times \bar{j})\cdot(3\bar{i} - \bar{k}) + (\bar{i} \times 2\bar{j})\cdot(\bar{j} - 3\bar{k}) = (-2\bar{i})\cdot(3\bar{i} - \bar{k}) + 2\bar{k}\cdot(\bar{j} - 3\bar{k}) =$$

$$= -6\bar{i}^2 + 2\bar{i}\cdot\bar{k} + 2\bar{k}\cdot\bar{j} - 6\bar{k}^2 = -6 - 6 = -12.$$

Задача 8. При яких значеннях α і β вектори $\bar{a} = \alpha\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}$, $\bar{b} = 2\bar{i} + 4\bar{j} + \beta\bar{k}$ колінеарні?

Розв'язання. Умова колінеарності двох векторів має вигляд:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}; \qquad \frac{\alpha}{2} = \frac{-3}{4} = \frac{1}{\beta}.$$

Звідки

$$\alpha = \frac{2\cdot(-3)}{4} = -\frac{3}{2};\ \beta = \frac{4\cdot 1}{-3} = -\frac{4}{3}.$$

Задача 9. Обчислити об'єм паралелепіпеду і піраміди, які побудовані на векторах $\bar{a} = 3\bar{i} - 4\bar{j}$, $\bar{b} = \bar{k} - 3\bar{j}$, $\bar{c} = 2\bar{j} + 5\bar{k}$.

Розв'язання. Об'єм паралелепіпеду дорівнює модулю мішаного добутку векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot(-15-2) = -51.$$

Тоді об'єми паралелепіпеду і піраміди дорівнюють:

$$V_{пар} = \left|\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right| = \left|-51\right| = 51(куб.\ од.);$$

$$V_{піраміди} = \frac{1}{6}\left|\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right| = \frac{1}{6}V_{пар} = \frac{51}{6} = \frac{17}{2} = 8{,}5(куб.\ од.).$$

Задача 10. Довести, що точки $A(2;\ -1;\ -2)$, $B(1;\ 2;\ 1)$, $C(2;\ 3;\ 0)$, $D(5;\ 0;\ -6)$ лежать в одній площині.

Розв'язання. Щоб довести, що ці чотири точки лежать в одній площині, доведемо, що в одній площині лежать вектори $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, тобто ці три вектори компланарні.

Умова компланарності трьох векторів має вигляд:

$$\overline{AB}\ \overline{AC}\ \overline{AD} = 0.$$

Знайдемо координати векторів:

$$\overline{AB} = (-1;\ 3;\ 3);\ \overline{AC} = (0;\ 4;\ 2);\ \overline{AD} = (3;\ 1;\ -4).$$

Обчислимо мішаний добуток векторів:

$$\overline{AB}\ \overline{AC}\ \overline{AD} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -1(-16-2) + 3\cdot(6-12) = 18 - 18 = 0$$

.

Таким чином, точки A, B, C, D лежать в одній площині.

Завдання для самостійної роботи.

Задача 1. Знайти кут між векторами $\overline{a} = -\overline{i} + \overline{j}$ і $\overline{b} = \overline{i} - 2\overline{j} + 2\overline{k}$, а також площу паралелограма, побудованого на них.

Задача 2. Обчислити проекцію вектора $\overline{a} - \overline{c}$ на вектор $\overline{b}$, якщо $\overline{a} = 2\overline{i} - \overline{k}$, $\overline{b} = \overline{i} + 3\overline{j}$, $\overline{c} = 3\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}$.

Задача 3. Дано вектори: $\overline{a} = 2\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k}$, $\overline{b} = 3\overline{i} + 2\overline{j} - 2\overline{k}$, $\overline{c} = 6\overline{i} - 6\overline{j} + 3\overline{k}$. Довести:

1) вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ перпендикулярні;
2) вектори $\overline{a}$ і $\overline{c}$ колінеарні;
3) вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ компланарні.

Задача 4. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах: $\overline{a} = \overline{i} - \overline{k}$, $\overline{b} = 3\overline{j} + 2\overline{k}$, $\overline{c} = \overline{i} - \overline{j} - 2\overline{k}$.

Задача 5. Дано координати вершин піраміди:: $\boldsymbol{O}(0;\ 0;\ 0)$, $\boldsymbol{A}(1;\ 2;\ -1)$, $\boldsymbol{B}(-2;\ 3;\ 4)$, $\boldsymbol{C}(1;\ 0;\ -2)$. Обчислити:

1) кут $\boldsymbol{ABC}$;
2) площу грані $\boldsymbol{ABC}$;
3) об'єм піраміди $\boldsymbol{OABC}$.