## Практична робота 11-12

**Тема:** Пряма на площині.

**Мета.** Ознайомити студентів з різними видами рівнянь прямої, розташування на площини; навчити їх методиці розв'язання базових задач.

### План практичних занять

1. Рівняння прямої на площині, різні форми задання.
2. Кут між двома прямими, відстань від точки до прямої.
3. Умови паралельності та перпендикулярності прямих.

### Термінологічний словник ключових понять

***Кутовий коефіцієнт***— коефіцієнт при *x* у рівнянні прямої лінії на площині, розв'язаному відносно *y*.

***Векторне рівняння прямої з нормальним вектором.***

$$\bar{r}_M - \bar{r}_{M_O} \cdot \bar{n} = 0 \qquad (1)$$

***Рівняння прямої, що проходить через задану точку із заданим нормальним вектором.***

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \qquad (2)$$

***Загальне рівняння прямої.***

$$Ax + By + C = 0 \qquad (3)$$

***Канонічне рівнянням прямої***

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \qquad (4)$$

***Параметричні рівняннями прямої.***

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt; \quad -\infty < t < +\infty \qquad (5)$$

***Рівнянням прямої, що проходить через задану точку з кутовим коефіцієнтом.***

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad (6)$$

***Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.***

$$y = kx + b \qquad (7)$$

***Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.***

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \qquad (8)$$

***Рівняння прямої у відрізках на осях.***

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \quad (a \neq 0, \quad b \neq 0) \qquad (9)$$

## Навчальні завдання

**1.** Пряму задано рівнянням $3x - 5y + 15 = 0$. Перевірити, які з точок $A\ (-2, 3)$, $B\ (0, 3)$, $C\ (5, 6)$, належать заданій прямій, знайти її рівняння з кутовим коефіцієнтом і у відрізках на осях.

● Для перевірки того, чи лежать точки $A$, $B$, $C$ на прямій, підставимо їхні координати в рівняння прямої:

$$A\text{:}\ 3\,(-2) - 5 \cdot 3 + 15 \neq 0, \quad B\text{:}\ 3 \cdot 0 - 3 \cdot 5 + 15 = 0,$$
$$C\text{:}\ 3 \cdot 5 - 5 \cdot 6 + 15 = 0.$$

Таким чином, точка $A$ не лежить на прямій, а точки $B$ і $C$ лежать на прямій.

Поділимо рівняння прямої почленно на коефіцієнт при $y$: $\frac{3}{5}x - y + 3 = 0$, а далі запишемо його у вигляді $y = \frac{3}{5}x + 3$ — рівняння з кутовим коефіцієнтом.

Поділивши рівняння почленно на вільний член:

$$\frac{3x}{15} - \frac{5y}{15} + 1 = 0, \text{ або } \frac{x}{-5} + \frac{y}{3} = 1,$$

дістанемо шукане рівняння у відрізках на осях.

**2.** Дано дві вершини трикутника $A\ (2, -3)$, $B\ (5, 1)$, рівняння сторони $BC$: $x + 2y - 7 = 0$ і медіани $AM$: $5x - y - 13 = 0$. Скласти рівняння висоти, опущеної з вершини $C$, обчислити її довжину, знайти кут трикутника при вершині $A$.

● Нехай вершина трикутника $C\ (x_1,\ y_1)$. Тоді точка з координатами $x_2 = \frac{5+x_1}{2}; y_2 = \frac{1+y_1}{2}$ лежить на медіані, тобто виконується рівність $5\left(\frac{5+x_1}{2}\right) - \frac{1+y_1}{2} - 13 = 0$. Крім того, точка $C$ лежить на прямій $BC$. Отже, маємо систему рівнянь для знаходження координат $(x_1, y_1)$:

$$\begin{cases} 5x_1 - y_1 - 2 = 0 \\ x_1 + 2y_1 - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 3. \end{cases}$$

Знайдемо рівняння прямих $AB$ і $AC$, використовуючи рівняння прямої (2.16), маємо:

$$AB: \ \frac{y+3}{1+3} = \frac{x-2}{5-2} \Rightarrow y = \frac{4}{3}x - \frac{17}{3}; \quad AC: \ \frac{y+3}{3+3} = \frac{x-2}{1-2} \Rightarrow y = -6x + 9.$$

Висота проходить через точку $C$ перпендикулярно до прямої $AB$. Використаємо умову перпендикулярності двох прямих і знайдемо кутовий коефіцієнт висоти $k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{3}{4}$. Використаємо рівняння (2.15) і знайдемо рівняння висоти:

$$y - 3 = -\frac{3}{4}(x - 1) \Rightarrow 3x + 4y - 15 = 0.$$

Довжину висоти знайдемо як відстань від точки $C(1, 3)$ до прямої $AB$.

$$h = \frac{|4 \cdot 1 - 3 \cdot 3 - 17|}{\sqrt{16+9}} = \frac{22}{5} = 4{,}4 .$$

Щоб обчислити кут $A$, скористаємось формулою для знаходження кута між двома прямими (2.18):

$$\operatorname{tg} \hat{A} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{-6 - \frac{4}{3}}{1 - 6 \cdot \frac{4}{3}} = \frac{22}{21}; \ \hat{A} = \operatorname{arctg} \frac{22}{21} .$$

**3.** Паралельні прямі проходять відповідно через точки $O(0, 0)$ і $M(1, 3)$. Знайти їх рівняння, коли відомо, що відстань між ними дорівнює $\sqrt{5}$ .

● Якщо прямі паралельні, то їх кутові коефіцієнти рівні між собою, тому згідно з (2.15) рівняння шуканих прямих можна записати у вигляді $y = kx,\ y - 3 = k(x-1).$ Візьмемо довільну точку, що лежить на першій прямій, наприклад $(1, k)$. Тоді згідно з формулою для відстані точки до прямої запишемо:

$\sqrt{5} = \dfrac{|k - k - k + 3|}{\sqrt{1 + k^2}}$, звідки знайдемо $k_1 = -2,\ k_2 = \dfrac{1}{2}.$ Рівняння прямих: $y = -2x;\ 2x + y - 5 = 0$ або $y = \dfrac{1}{2}x;\ x - 2y + 5 = 0.$

**4.** Записати рівняння бісектрис кутів, утворених прямими $x + 7y - 6 = 0$ і $5x - 5y + 1 = 0.$

● Використаємо відому властивість бісектриси кута про те, що на ній лежить множина точок, рівновіддалених від сторін кута. Нехай $M(x, y)$ — точка, яка належить цій множині. Тоді за формулою відстані від точки до прямої записуємо:

$\dfrac{|x + 7y - 6|}{\sqrt{1+49}} = \dfrac{|5x - 5y + 1|}{\sqrt{25+25}}.$ Звідси маємо два рівняння бісектрис: $x + 7y - 6 = 5x - 5y + 1$ і $x + 7y - 6 = -5x + 5y + 1,$ або, після перетворень: $4x - 12y + 7 = 0,\ 6x + 2y - 5 = 0.$

**5.** Обчислити площу ромба, знаючи одну з його вершин $A(0, -1)$, точку перетину діагоналей $M(4, 4)$ і точку $N(2, 0)$ на стороні $AB$.

● Використовуючи (2.16), запишемо рівняння сторони $AB$:

$\dfrac{y+1}{1} = \dfrac{x}{2}$, або $x - 2y - 2 = 0.$ Знайдемо координати точки $C(x, y)$, яка за властивістю точки перетину діагоналей ромба симетрична точці $A$ відносно точки $M$. Отже, $4 = \dfrac{0 + x}{2};\ 4 = \dfrac{-1 + y}{2}$, звідки $C(8, 9)$. Висоту ромба знайдемо як відстань від точки $C$ до прямої $AB$:

$$h = \frac{|8 - 18 - 2|}{\sqrt{5}} = \frac{12}{\sqrt{5}}.$$

Знайдемо кутовий коефіцієнт діагоналі ромба $AC$: $k = \dfrac{9+1}{8-0} = \dfrac{5}{4}.$ Кутовий коефіцієнт другої діагоналі дорівнює $-\dfrac{4}{5},$ а її рівняння $4x + 5y - 36 = 0.$ Розв’язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} x-2y=2 \\ 4x+5y=36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{82}{13} \\ y=\dfrac{28}{13} \end{cases},$$

знаходимо координати точки $B\left(\frac{82}{13}; \frac{28}{13}\right)$. Довжина сторони ромба $|AB| = \sqrt{\left(\frac{82}{13}\right)^2 + \left(\frac{28}{13}\right)^2} = \frac{41}{13}\sqrt{5}.$

Отже, площа ромба $s = |AB| \cdot h = \frac{41}{13}\sqrt{5} \cdot \frac{12}{\sqrt{5}} = 37\frac{11}{13}$.

**6.** Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи одну з його вершин $A$(2, – 4) і рівняння бісектрис двох його кутів: $x+y-2=0;\ x-3y-6=0.$

● Підставлянням координати точки $A$ в рівняння бісектрис пересвідчимось, що бісектриси не проходять через цю точку. Нехай для визначеності вершина $B$ і вершина $C$ належать відповідно першій і другій бісектрисам. Знайдемо координати точки $A'$, симетричної точці $A$ відносно бісектриси $x+y-2=0$. Ця точка буде лежати на прямій $BC$. Для цього запишемо рівняння перпендикуляра до цієї бісектриси, що проходить через точку $A$. Маємо: $y+4=x-2$, або $x-y-6=0.$ Знайдемо точку перетину бісектриси і перпендикуляра, розв'язуючи систему $\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases}$; координати точки $A'(x,\ y)$ знайдемо з виразів $4=\frac{2+x}{2};\ -2=\frac{-4+y}{2};\ A'(6,0).$ Аналогічно знайдемо координати точки $A''$, симетричної точці $A$, відносно бісектриси $x-3y-6=0.\ A''\left(\frac{2}{5};\ \frac{4}{5}\right).$ Рівняння прямої $BC$ знайдемо з (2.16): $\frac{y}{\frac{4}{5}} = \frac{x-6}{-\frac{28}{5}} \Rightarrow x+7y-6=0.$ Обчислимо координати вершин $B$ і $C$ як координати точок перетину відповідних бісектрис з прямою $BC$: $x+7y-6=0.$ Дістаємо: $B\left(\frac{4}{3};\frac{2}{3}\right);\ C(6;0)$. З (2.16) маємо рівняння сторін відповідно $AB$ і $AC$: $7x+y-10=0$; $x-y-6=0.$

## Завдання для перевірки знань

**1.** Скласти рівняння катетів прямокутного рівнобедреного трикутника, якщо $y = 3x + 5$ — рівняння гіпотенузи, $A$ (4, – 1) — вершина прямого кута.

*Відповідь.* $y=-2x+7;\ y=\frac{1}{2}x-3$.

**2.** Дано вершини трикутника $A$ (4; 6), $B$ (– 4; 0), $C$ (– 1; – 4). Скласти рівняння: а) трьох його сторін; б) медіани, проведеної з вершини $C$; в) бісектриси кута $B$; г) висоти, опущеної з вершини $A$.

**3.** Дано трикутник з вершинами в точках $A\left(-\frac{1}{7}; -\frac{3}{28}\right),\ B(4,\ 3),\ C(2,\ -1)$. Обчислити довжини його висот.

*Відповідь.* $h_A = \frac{27\sqrt{5}}{28}$.

**4.** На осі абсцис знайти точку, яка міститься на відстані $a$ від прямої $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

*Відповідь.* $\left(;\ b \pm \sqrt{a^2+b^2}\right)$

**5.** З точок перетину прямої $3x+5y-15=0$ з осями координат встановлено перпендикуляри до цієї прямої. Знайти їх рівняння.

*Відповідь.* $5x-3y+9=0$; $5x-3y-25=0$.

**6.** Дано дві вершини трикутника $A$ (– 6; 2), $B$ (2; – 2) і $H$ (1; 2) — точку перетину його висот. Обчислити координати третьої вершини.

*Відповідь.* $C$ (2; 4).

**7.** Знайти рівняння прямої, що проходить через точку (2; – 1) і утворює з віссю $Ox$ удвічі більший кут, ніж кут, що його утворює з тією самою віссю пряма $x-3y+4=0$.

*Відповідь.* $3x-4y-10=0$.

**8.** Рівняння бічних сторін рівнобедреного трикутника $y = 3$; $x - y + 4 = 0$. Скласти рівняння основи, якщо вона проходить через початок системи координат.

*Відповідь.* $y=\left(1\pm\sqrt{2}\right)x$.

**9.** Скласти рівняння сторін квадрата, якщо $A$(2; – 4) — його вершина, $M$(5; 2) — точка перетину діагоналей.

*Відповідь.* $3x+y=2$; $x-3y=14$; $x-3y=-16$; $3x+y=32$.

**10.** Скласти рівняння сторін трикутника, якщо $A$(3; 5), $B$(6; 1) — його вершини, $M$(4; 0) — точка перетину медіан.

*Відповідь.* $4x+3y=27$, $x=3$, $7x-3y=39$.

**11.** Скласти рівняння прямої, що поділяє відрізок $AB$, $A$(– 3; 2), $B$(5; – 2) навпіл і утворює з відрізком $AB$ кут, удвічі більший, ніж із віссю $Ox$.

*Відповідь.* $x-2y-1=0$.

**12.** Через точку $A$(5; 2) провести пряму, що відтинає рівні відрізки на осях системи координат.

*Відповідь.* $x+y=7$.

**13.** Знайти дотичні до кола $x^2+y^2=29$, що проходить через точку $A$(7; –3).

*Відповідь.* $5x+2y=29$, $2x-5y=29$.

**14.** У трикутнику $A$(1; 2), $B$(3; 7), $C$(5; – 13) обчислити довжину перпендикуляра, опущеного з вершини $B$ на медіану, проведену з вершини $A$.

*Відповідь.* $\frac{25}{\sqrt{34}}$.

**15.** Знайти рівняння прямої, паралельної прямій $12x + 5y - 52 = 0$, що міститься від неї на відстані 2 лін. од.

*Відповідь.* $12x+5y-26=0$, $12x+5y-78=0$.

**16.** Скласти рівняння прямої, що проходить посередині між прямими $4x-6y=3$, $2x-3y=-7$.

*Відповідь.* $8x-12y+11=0$.

**17.** Знайти точку, симетричну точці $A(-2; -9)$ відносно прямої $2x+5y=38$.

*Відповідь.* (10; 21).

**18.** Дано рівняння двох суміжних сторін паралелограма $x - y = 1$, $x - 2y = 0$, $M(3; -1)$ — точка перетину діагоналей. Записати рівняння двох інших сторін паралелограма.

*Відповідь.* $x - y = 7$, $x - 2y = 10$.

**19.** Відоме рівняння $3x + 2y + 6 = 0$ однієї сторони кута і $x - 3y + 5 = 0$ — рівняння його бісектриси. Скласти рівняння другої сторони кута.

*Відповідь.* $6x + 17y = 15$.

**20.** У трикутнику $ABC$ відомі $AB$: $4x+y-12=0$, висота $BH$: $5x-4y=15$, висота $AK$: $2x+2y-9=0$. Записати рівняння сторін $AC$; $BC$.

*Відповідь.* $4x+5y=20$; $x-y=3$.

**21.** Скласти рівняння сторін трикутника, якщо $A(-4; 2)$ — одна з його вершин і $3x-2y+2=0$ і $3x+5y-12=0$ — рівняння двох його медіан.

*Відповідь.* $2x+y=8$; $x-3y=-10$, $x+4y=4$.

**22.** Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи одну з його вершин $A(3; -4)$ і рівняння висот: $7x-2y=1$, $2x-7y=6$.

*Відповідь.* $2x+7y+22=0$, $7x+2y-13=0$, $x-y+2=0$.