

Практична робота 13-14

Тема: Площина.

Мета. Ознайомити студентів з різними видами рівнянь площини та навчити використовувати їх при розв'язанні задач.

Термінологічний словник ключових понять

Нормальний вектор площини— вектор $\vec{N} = (A, B, C)$, перпендикулярний до площини.

Напрямний вектор прямої— вектор $\vec{s} = (l, m, p)$, колінеарний прямій у просторі.

1. Рівняння площини, що проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ з вектором нормалі $\vec{N} = (A; B; C)$:

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0. \quad (1)$$

2. Загальне рівняння площини:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (2)$$

$\vec{N} = (A; B; C)$ - нормальний вектор площини

3. Рівняння площини у відрізках на осях:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (3)$$

4. Рівняння площини, що проходить через три точки

$M_0(x_0; y_0; z_0)$, $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, що не лежать на одній прямій:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

5. Відстань від точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$ обчислюється за формулою:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (5)$$

Навчальні завдання

1. Скласти рівняння площини, що проходить через точки

$$M_1(1, -1, 0), M_2(2, 1, -3), M_3(-1, 0, 1).$$

Запишемо рівняння площини, які проходять, скажімо, через точку M_1 .

$$A(x - 1) + B(y + 1) + Cz = 0.$$

Вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$ і $\overrightarrow{M_1M_3}$ лежать у шуканій площині, тому їх векторний добуток буде перпендикулярним до шуканої площини. Координати векторного добутку вважатимемо координатами вектора:

$$\vec{N} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5\vec{i} + 5\vec{j} + 5\vec{k}.$$

Таким чином, $A = 5$; $B = 5$; $C = 5$ і шукане рівняння набирає вигляду $5(x-1) + 5(y+1) + 5z = 0$, або після перетворення, $x + y + z = 0$.

2. Записати рівняння площин, що проходять: 1) паралельно площині Oxz і через точку $(2, -5, 3)$; 2) через вісь Oz і точку $(-3, 1, -2)$; 3) паралельно осі Ox і через точки $(4, 0, -2)$ і $(5, 1, 7)$.

1) Рівняння шуканої площини $Bu + D = 0$ або $y = -\frac{D}{B}$. Точка $(2, -5, 3)$ лежить у площині, тобто задовольняє останнє рівняння: $-5 = -\frac{D}{B}$; остаточно маємо: $y = -5$, або $y + 5 = 0$.

2) Рівняння шуканої площини $Ax + Bu = 0$ або $x + \frac{B}{A}y = 0$. Підставимо координати точки $(-3, 1, -2)$ у це рівняння $-3 + \frac{B}{A} = 0$, $\frac{B}{A} = 3$. Остаточно рівняння шуканої площини набирає вигляду $x + 3y = 0$.

3) Рівняння площини, паралельної осі Ox , має вигляд: $Bu + Cz + D = 0$. Підставляючи в нього по чергово координати точок $(4, 0, -2)$ і $(5, 1, 7)$, дістаємо систему

$$\begin{cases} -2C + D = 0 \\ B + 7C + D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{D}{C} = 2 \\ \frac{B}{C} + \frac{D}{C} = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{D}{C} = 2 \\ \frac{B}{C} = -9 \end{cases}$$

Отже, шукане рівняння має вигляд $9y - z - 2 = 0$.

3. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $(0, 0, 1)$ і $(3, 0, 0)$ і утворює кут $\frac{\pi}{3}$ з площиною Oxy .

Запишемо рівняння шуканої площини у загальному вигляді: $Ax + Bu + Cz + D = 0$, рівняння площини $Oxy - z = 0$, її нормальний вектор $\vec{N}_1 = (0, 0, 1)$. Підставляючи координати точок, що лежать у шуканій площині, і застосовуючи формулу (2.28), дістаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} C + D = 0 \\ 3A + D = 0 \\ \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{D}{C} = -1 \\ \frac{A}{C} = -\frac{1}{3} \\ \left(\frac{A}{C}\right)^2 + \left(\frac{B}{C}\right)^2 + 1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{D}{C} = -1 \\ \frac{A}{C} = -\frac{1}{3} \\ \frac{B}{C} = \pm \frac{\sqrt{26}}{3} \end{cases}$$

Підставимо в рівняння знайдені значення і після перетворень рівняння шуканої площини подамо у вигляді $x \pm \sqrt{26}y + 3z - 3 = 0$.

4. Через точку $M(-5, 16, 12)$ провести дві площини: одна з них проходить через вісь Ox , друга — через вісь Oy . Знайти кут між цими площинами.

Рівняння площини, що проходить через вісь Ox : $B_1y + C_1z = 0$, що проходить через вісь Oy : $A_2x + C_2z = 0$. З умови проходження їх через точку M маємо: $3y - 4z = 0$ і $12x + 5z = 0$. З формули (2.28) дістаємо:

$$\cos \varphi = \frac{-20}{\sqrt{9+16} \cdot \sqrt{144+25}} = -\frac{4}{13}, \quad \varphi = \pi - \arccos \frac{4}{13}.$$

Завдання для перевірки знань

1. Записати рівняння площини, паралельної площині Oxy , що проходить через точку $(2, -5, 3)$.

Відповідь. $z+3=0$.

2. Скласти рівняння площини, якщо відстань її від трьох точок $A(6, 1, -1)$, $B(0, 5, 4)$ і $C(5, 2, 0)$ дорівнює відповідно 1, 2, 0.

Відповідь. $x+2y+2z-9=0$ і $y-2=0$.

3. На осі Oz знайти точку, рівновіддалену від двох площин:

$$x+4y-3z-2=0 \text{ і } 5x+z+8=0.$$

Відповідь. $M_1(0, 0, 3)$, $M_2(0, 0, -\frac{5}{2})$.

4. Знайти точку, симетричну з початком координат відносно площини $6x+2y-9z+121=0$.

Відповідь. $(-12; -4; 18)$.

5. Дано дві точки $A(1; 3; -2)$, $B(7; -4; 4)$. Записати рівняння площини, що проходить через точку B перпендикулярно до \vec{AB} і знайти її відстань від точки A .

Відповідь. $6x-7y+6z-94=0$; 11.

6. Через вісь Oz провести площину, що утворює кут 60° з площиною $2x+y-\sqrt{5}z-7=0$.

Відповідь. $x+3y=0$; $3x-y=0$.

7. На відстані трьох одиниць від площини $3x-6y-2z+14=0$ провести паралельну їй площину.

Відповідь. $3x-6y-2z+35=0$.