Практична робота 15-16

Тема: Пряма у просторі. Взаємне розміщення прямої і площини.
Мета. Ввести поняття прямої у просторі, ознайомити студентів з різними видами рівнянь прямої та навчити використовувати їх при розв'язуванні задач.

План практичних занять

1. Пряма у просторі, різні форми рівняння прямої у просторі.
2. Пряма і площина, їх взаємне розміщення, точка перетину прямої і площини, кут між прямою і площиною.

Термінологічний словник ключових понять

1. **Загальними рівняннями прямої у просторі** називають рівняння вигляду

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Пряму тут задано, як лініюперетинудвох площин, які не паралельні і не співпадають.

Будь-який ненульовий вектор, що лежить на даній прямій або паралельний їй називається ***напрямним вектором*** цієї ***прямої.***

2. **Канонічні рівняння прямої** мають вигляд

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \qquad (2)$$

Це рівняння прямої L, що проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ та має напрямний вектор $\bar{a} = (l; m; n)$.

3. **Параметричні рівняння прямої**

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{cases} \qquad (3)$$

являють рівняння *прямої*,що проходитьчерез точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ в напрямі вектора $\bar{a} = (l; m; n)$.

4. **Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки** $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (4)$$

Навчальні завдання

1. Знайти канонічне рівняння прямої

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z - 11 = 0 \\ 2x + y - 3z - 1 = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши систему рівнянь, знайдемо: $x = 10z - 9$; $y = 19 - 17z$. Покладаючи $z_0 = 1$, дістаємо $x_0 = 1$, $y_0 = 2$. Точка A (1, 2, 1) належить шуканій прямій. За формулою (2.33) обчислюємо компоненти напрямного вектора $m = -10$, $n = 17$, $p = -1$. Отже, рівняння шуканої прямої має вигляд: $\frac{x-1}{-10} = \frac{y-2}{17} = \frac{z-2}{-1}$.

2. У площині Oxz знайти пряму, що проходить через початок системи координат і перпендикулярна до прямої

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-5}{1}.$$

Знайдемо напрямний вектор шуканої прямої. Оскільки пряма лежить у площині Oxz, її напрямний вектор перпендикулярний до осі Oy, тобто $\vec{s} = (m,\ 0,\ p)$. З умови перпендикулярності маєм $3m + p = 0$, отже, $m = 1$, $p = -3$. Шукане рівняння має вигляд: $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-3}$.

3. Знайти проекцію точки A (4, –3, 1) на площину $x + 2y - z - 3 = 0$.

Знайдемо рівняння перпендикуляра, опущеного з точки A на площину. Вектор $\vec{N} = (1,\ 2,\ -1)$ перпендикулярний до площини, тому його можна взяти за напрямний вектор перпендикуляра. Маємо рівняння перпендикуляра: $\frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{-1}$. Знайдемо тепер точку перетину цього перпендикуляра з площиною. Перейдемо до параметричного рівняння $x = 4 + t$; $y = -3 + 2t$; $z = 1 - t$ і підставимо в рівняння площини:

$$4 + t + 2(-3 + 2t) - (1 - t) - 3 = 0.$$

Отже, $t^* = 1$. Підставляємо знайдене значення t^* в параметричне рівняння й дістаємо координати проекції (5, – 1, 0).

4. Знайти відстань точки M (7, 9, 7) до прямої $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$.

Для знаходження відстані скористаємось формулою (2.34). Точка A (2, 1, 0) лежить на даній прямій; $\overrightarrow{AM} = (5, 8, 7)$. Далі маємо:

$$\overrightarrow{AM} \times \vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 8 & 7 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -5\vec{i} + 18\vec{j} - 17\vec{k}; \quad \left|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{s}\right| = \sqrt{638}.$$

$$|\vec{s}| = \sqrt{29} \quad d = \frac{\left|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{s}\right|}{|\vec{s}|} = \sqrt{22}.$$

5. Обчислити відстань між прямими

$$\frac{x+3}{4} = \frac{y-6}{-3} = \frac{z-3}{2} \text{ і } \frac{x-4}{8} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+7}{3}.$$

Відстань між двома прямими обчислимо як відстань від першої з прямих до площини, яка паралельна цій прямій і проходить через другу пряму. Нехай $Ax + By + Cz + D = 0$ — шукана площина, тоді, як і у прикладі 2, дістаємо:

$$\begin{cases} 4A - B - 7C + D = 0 \\ 8A - 3B + 3C = 0 \\ 4A - 3B + 2C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = -4 \\ C = -12 \\ D = -100. \end{cases}$$

Рівняння площини має вигляд $3x - 4y - 12z - 100 = 0$. Відстань від точки (–3, 6, 3) до площини знайдемо за відомою формулою:

$$d = \frac{|3(-3) - 4 \cdot 6 - 12 \cdot 3 - 100|}{\sqrt{9 + 16 + 144}} = 13.$$

6. Знайти умову перетину двох прямих у просторі.

Нехай рівняння прямих задано в канонічній формі

$$\frac{x + x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \text{ і } \frac{x + x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Прямі будуть перетинатися тоді і тільки тоді, коли вони лежать в одній площині і непаралельні. Розглянемо вектори $\vec{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$, $\vec{s}_1 = (m_1,\ n_1,\ p_1)$, $\vec{s}_2 = (m_2,\ n_2,\ p_2)$. Умовою того, що прямі лежать у одній площині, є компланарність цих векторів. Випливає умова перетину двох прямих у просторі:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Завдання для перевірки знань

1. Через точку (2, – 5, 3) провести пряму, паралельну прямій

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0 \\ 5x + 4y - z - 7 = 0. \end{cases}$$

Відповідь. $\frac{x - 2}{-11} = \frac{y + 5}{17} = \frac{z - 3}{13}$.

2. З усіх прямих, що перетинають дві прямі:

$$\frac{x + 3}{2} = \frac{y - 5}{3} = \frac{z}{1} \text{ і } \frac{x - 10}{3} = \frac{y + 7}{4} = \frac{z}{1},$$

знайти ту, яка паралельна прямій $\frac{x + 2}{8} = \frac{y - 1}{7} = \frac{z - 3}{1}$.

Відповідь. $\frac{x}{8} = \frac{y + 8}{7} = \frac{z + 9}{1}$.

3. Визначити кут між двома прямими

$$\begin{cases} 3x - 4y - 2z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} 4x + y - 6z = 2 \\ y - 3z = -2. \end{cases}$$

Відповідь. $\cos\alpha = \frac{98}{195}$.

4. Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $A(2;\ 3;\ 1)$ на пряму $\frac{x + 1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z - 2}{3}$.

Відповідь. $\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-1}{-1}$.

5. Скласти рівняння спільного перпендикуляра до двох прямих $\frac{x-7}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-9}{-1}$ і $\frac{x-3}{-7}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$.

Відповідь. $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+3}{4}$.

6. Чи лежить пряма $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+2}{5}$ на площині $4x+3y-z+$ $+8=0$.

7. Знайти проекцію прямої $\frac{x}{4}=\frac{y-4}{3}=\frac{z+1}{-3}$ на площину $x-y+$ $+3z+8=0$.

Відповідь. $\frac{x+9}{7}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{-1}$.

8. На прямій $\frac{x}{1}=\frac{y+7}{2}=\frac{z-3}{-1}$ знайти точку, найближчу до точки (3, 2, 6).

Відповідь. (3; – 1; 0).

9. Знайти найкоротшу відстань між двома прямими, що не перетинаються $\frac{x-9}{4}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z}{1}$ і $\frac{x}{-2}=\frac{y+7}{9}=\frac{z-2}{2}$.

Відповідь. $d=7$.

10. Записати рівняння площини, що проходить через точку $A(3;\ 1;\ -2)$ і через пряму $\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$.

Відповідь. $8x-9y-22z-59=0$.

11. Провести площину, що проходить через перпендикуляри, опущені з точки $A(-3;\ 2;\ 5)$ на площини $4x+y-3z+13=0$ та $x-2y+z-11=0$.

Відповідь. $4x+5y-2z=0$.

12. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $A(4;\ -3;\ 1)$ і паралельна прямим:

$\frac{x}{6}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-3}$ і $\frac{x+1}{5}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{2}$.

Відповідь. $16x-27y+14z-159=0$.

13. Через точку $A(1;\ 0;\ 7)$ паралельно площині $2x-y+2z=15$ провести пряму так, щоб вона перетинала пряму $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z}{1}$.

Відповідь. $\frac{x-1}{68}=\frac{y}{70}=\frac{z-7}{-67}$.

14. Знайти точку, симетричну точці $A(4;\ 3;\ 10)$ відносно прямої $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}$.

Відповідь. (2; 9; 6).