Україна
Національний університет біоресурсів
і природокористування України
Кафедра вищої та прикладної математики

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Методичні вказівки
за модулем
«Елементи аналітичної геометрії»

КИЇВ – 2016

УДК 378.022.51

Наведено необхідний теоретичний матеріал та індивідуальні завдання для самостійної роботи студентів за модулем «Елементи аналітичної геометрії» курсу дисципліни «Вища математика»

Рекомендовано Вченою радою ННІ енергетики, автоматики і енергозбереження НУБіП України

Укладач: С.В. Шостак

Рецензенти: канд. фіз.-мат. наук, доцент О.Ю. Дюженкова
канд. фіз.-мат. наук, доцент Я.О. Гуменюк

Навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Методичні вказівки
за модулем
«Елементи аналітичної геометрії»

Укладачі: ШОСТАК Сергій Володимирович

Підписано до друку __.__.2016 р. Зам. №______
Формат 60х90 1/16. Папір офсетний. Друк – різографія.
Наклад 50 пр. Ум. друк. арк. 4,52
Друк «ЦП «КОМПРИНТ», Свідоцтво ДК №4131, від 04.08.2011р.
м. Київ, вул. Предславинська, 28
528-05-42

ЛЕКЦІЯ №1

Найпростіші задачі аналітичної геометрії

Вступ. Аналітична геометрія – це частина математики, яка вивчає властивості геометричних об'єктів методами алгебри і математичного аналізу. При цьому основні геометричні об'єкти (точки, лінії, поверхні) розглядаються в прямокутній системі координат на площині або в просторі і виражаються через алгебраїчні поняття. Цей метод, так званий метод координат, є глибоким і потужним апаратом для дослідження і розв'язку геометричних чисел задач.

Основоположниками аналітичної геометрії вважають видатного французького філософа, математика, фізика, фізіолога Рене (Картезія) Декарта (1596-1650) і французького математика-аматора, юриста за фахом, П'єра Ферма (1601-1665).

Основна ідея Декарта полягає в тому, що геометричній об'єкт – лінія подається рівнянням, яке пов'язує змінні величини. Досліджуючи властивості рівнянь (функцій), ми тим самим дістаємо інформацію і про властивості геометричних об'єктів. Це і дало підставу назвати потім геометрію Декарта **аналітичною.** П.Ферма у своїх роботах (до речі не опублікованих за життя) підійшов до сучасного викладання аналітичної геометрії ближче.

Будемо надалі розглядати геометричні образи – точки, прямі лінії, площини, криві. В основному всі задачі розглядаються з позиції векторної алгебри, ілюструють застосування векторної алгебри до задач аналітичної геометрії.

Вивчення геометричних образів почнемо з найпростішого – точки. Як відомо, при заданій системі координат (на площині чи в просторі) будь-яка точка визначається двома (трьома) числами – координатами цієї точки. Ми розглядатимемо декартову прямокутну систему координат. Таким чином, задана точка M на площині (в просторі) представляється як $M(x,y)(M(x,y,z))$. При цьому існує взаємно однозначна відповідність між парою чисел (x,y) (трійкою чисел (x,y,z)) і точками на площині (в просторі). Тому надалі вважатимемо, що коли точка задана чи точка шукається, то це означає, що задані чи знаходяться координати цієї точки.

Розглянемо найпростіші задачі, що виникають між точками на площині і в просторі.

Задача 1. Віддаль між двома точками. Нехай задано дві точки M і N. Знайти віддаль між ними.

Розв'язання. З'єднаємо точки M і N вектором $\overline{MN}$ (рис.1). Тоді

$$d = \left|\overline{MN}\right| \tag{1.1}$$

Перейдемо до системи координат. Якщо точки задані на площині (в R^2), тобто $M(x_1, y_1)$ і $N(x_2, y_2)$, то $\overline{MN} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$ і (1.1) набуває вигляду

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{1.2}$$

Якщо точки задано в просторі (в R^3), тобто $M(x_1, y_1, z_1)$ і $N(x_2, y_2, z_2)$, то $\overline{MN} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$ і (1.1) набуває вигляду:
$\overline{MN} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$ і (1.1) набуває вигляду:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,. \tag{1.3}$$

Зокрема, якщо знаходиться віддаль між початком координат і $O(0;0)$ і точкою $M(x, y)(M(x, y, z))$, то

$$d = \left|\overline{OM}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}\ \left(d = \left|\overline{OM}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) \tag{1.4}$$

Задача 2. **Ділення відрізка в заданому відношенні.** Нехай задано дві точки M і N. Знайти точку C, яка належить відрізку MN і ділить його у заданому відношенні λ (рис.1), тобто $\lambda = \dfrac{MC}{CN}$ (MC, CN – величини відповідних відрізків)

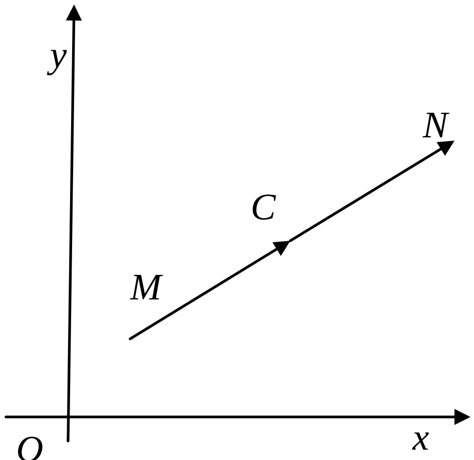


Рис. 1

Розв'язання. Розглянемо вектори $\overline{MC}$ і $\overline{CN}$. Очевидно, що вони колінеарні. Тоді згідно з умовою

$$\overline{MC} = \lambda \overline{CN}. \tag{1.5}$$

Перейдемо тепер до системи координат. Якщо точки задано в R^2, тобто $M(x_1, y_1)$ і $N(x_2, y_2)$ і шукана точка $C(x, y)$, то $\overline{MC} = \{x - x_1; y - y_1\}$, $\overline{CN} = \{x_2 - x; y_2 - y\}$ і рівність (1.5) перейде у такі рівняння:

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x), \qquad y - y_1 = \lambda(y_2 - y),$$

або

$$x + \lambda x = x_1 + \lambda x_2, \qquad y + \lambda y = y_1 + \lambda y_2.$$

Звідки

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \quad (\lambda \neq -1) \tag{1.6}$$

Зокрема, якщо $C(x, y)$ – середина відрізка *MN*, то $\lambda = 1$ і із (1.6) дістанемо

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{2} \tag{1.7}$$

Аналогічно, якщо розглядається задача в R^3 тобто $M(x_1, y_1, z_1)$ і $N(x_2, y_2, z_2)$, то дістанемо

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + z} \quad (\lambda \neq -1) \tag{1.8}$$

і для точки, що є серединою відрізка *MN*, маємо

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{2} \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{2} \tag{1.9}$$

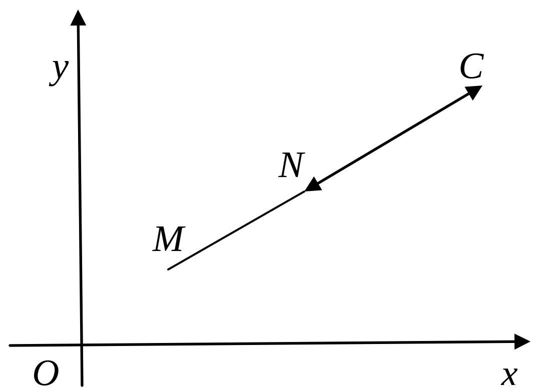


Рис. 2

На рис.2 точка C розташована між точками M і N, тобто вектори $\overline{MC}$ і $\overline{CN}$ спів напрямлені і $\lambda > 0$; точка C ділить відрізок MN внутрішнім чином. Але точка C може знаходитись на тій же прямій, що і $\overline{MN}$, і бути зовні відрізка MN (рис. 2). У цьому випадку вектори $\overline{MC}$ і $\overline{CN}$ протилежно напрямлені і $\lambda < 0$; точка C ділить відрізок MN зовнішнім чином. Звичайно, формули (1.6) і (1.8) зберігаються. Випадок, коли $\lambda = -1$ означає, що $\overline{MC} = -\overline{CN}$, тобто точки M і N співпадають, і задача не має сенсу.

Задача 3. Площа трикутника. Нехай задано три точки M, N, K, знайти площу трикутника MNK

Розв'язання. Візьмемо два вектори, що співпадають із сторонами трикутника і виходять із однієї (будь-якої) вершини, наприклад, $\overline{MN}$ і $\overline{MK}$. Із векторної алгебри відомо, що

$$S_{\Delta MNK} = \frac{1}{2}\left|\overline{MN} \times \overline{MK}\right| \tag{1.10}$$

Звідси, в R^2 маємо точки $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, $K(x_3, y_3)$ і вектори $\overline{MN} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$, $\overline{MK} = \{x_3 - x_1; y_3 - y_1\}$.

Представимо векторний добуток рівності (1.10) у координатній формі. Дістанемо:

$$S_{\Delta MNK} = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2}\left|\bar{k}\right| \left\| \begin{matrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{matrix} \right\| =$$

$$=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{matrix}\right\| \tag{1.11}$$

оскільки $\left|\bar{k}\right|=1$.

Аналогічно у випадку R^3 маємо

$$S_{\Delta MNK}=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{matrix}\right\| \tag{1.12}$$

Зокрема, якщо із формул (1.11) і (1.12) дістанемо, що $S_\Delta=0$, то точки *M, N, (M, N, K)* лежать на одній прямій.

Задача 4. Центр мас системи матеріальних точок. Нехай задано n матеріальних точок $M_1, M_2, ... M_n$, в яких зосереджені маси $m_1, m_2, ... m_n$. Знайти центр мас цієї системи.

Розв'язання. При розв'язанні цієї задачі використовуємо такі твердження, відомі з механіки:

1. Центром мас системи із двох точок M_1 і M_2 з масами відповідно m_1 і m_2 є точка *C*, що належить відрізку M_1M_2 і ділить його у відношенні λ, обернено пропорційним масам точок, тобто

$$\lambda=\frac{m_2}{m_1}=\frac{M_1C}{CM_2}.$$

2. Центр мас системи із n матеріальних точок $M_1, M_2, ... M_n$ з масами $m_1, m_2, ... m_n$ відповідно співпадає з центром мас системи з двох точок, одна з яких є точка M_n з масою m_n, а друга – центр мас системи з $n-1$ точки $M_1, M_2, ... M_{n-1}$, у якій зосереджена маса $m_1+m_2+...+m_{n-1}$.

Розглянемо задачу в R^2. Із першого твердження для двох точок, M_1 і M_2, користуючись формулами (1.6), дістанемо:

$$x_{c_2} = \frac{x_1 + \frac{m_2}{m_1} x_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2},$$

$$y_{c_2} = \frac{y_1 + \frac{m_2}{m_1} y_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2}{m_1 + m_2}, \quad (1.13)$$

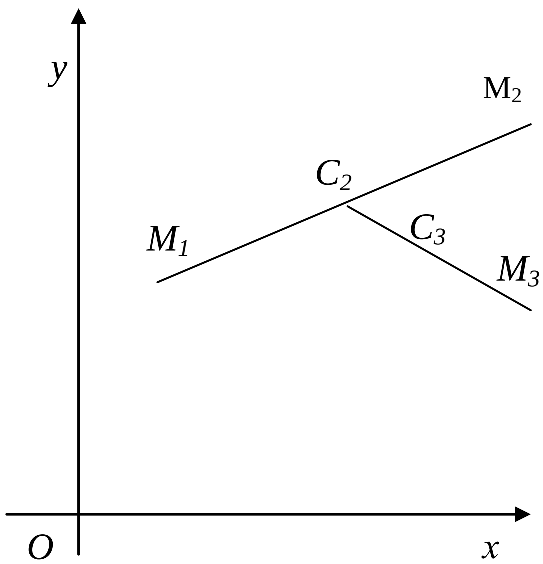


Рис. 3

тобто центр мас знаходиться у точці $C_2(x_2, y_2)$ (рис.). Візьмемо тепер три точки M_1, M_2, M_3 із масами відповідно m_1, m_2, m_3. Згідно із другим твердженням замінимо систему із двох точок M_1 і M_2 точкою $C_2(x_2, y_2)$ із масою $m_1 + m_2$ і розглянемо систему із двох точок C_2 і M_3. Для центра мас $C_3(x_3, y_3)$ цієї системи згідно із формулами (1.13) дістанемо

$$x_{c_3} = \frac{(m_1 + m_2)\frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2} + m_3 x_3}{(m_1 + m_2) + m_3} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \quad (1.14)$$

$$y_{c_3} = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + y_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Користуючись методом індукції, для центра мас $C_n(x_{C_n}, y_{C_n})$ системи n матеріальних точок, дістаємо

$$x_{C_n} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + ... + x_n m_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n}, \; y_{C_n} = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + ... + y_n m_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n}. \quad (1.15)$$

Якщо точки $M_1, M_2, ...M_n$ розташовані в R^3, то до формул (1.15) додається ще одна

$$z_{C_n} = \frac{z_1 m_1 + z_2 m_2 + ... + z_n m_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n}$$

ЛЕКЦІЯ №2

Рівняння прямої лінії на площині

2.1. Рівняння лінії на площині

Нехай на площині задана декартова система координат xOy і задана деяка лінія L. Будь-яка лінія – це геометричне місце точок на площині, які мають деяку загальну властивість. Аналітичний вираз цієї властивості, як зв'язок між координатами x, y точок, що лежать на лінії, представляє рівняння з двома змінними x, y, загальний вигляд якого:

$$F(x, y) = 0$$

Означення 2.1. Рівняння $F(x, y) = 0$ називається рівнянням лінії L (при заданій системі координат), якщо йому задовольняють координати x, y будь-якої точки, що лежить на L і не задовольняють точок, що не лежать на L. Говорять, що рівняння $F(x, y) = 0$ визначає лінію L.

Будь-яку лінію L на площині можна представити рівнянням $F(x, y) = 0$, що виражає загальну властивість точок тільки цієї лінії і якому задовольняють координати тих і лише тих точок, які належать цій лінії.

Таким чином, виникають дві задачі:

1. По заданому рівнянню $F(x, y) = 0$ визначити вигляд лінії L і її властивості.
2. Скласти рівняння лінії за заданою загальною властивістю всіх точок цієї лінії.

Наприклад, нехай задано рівняння лінії $y = x$. Яку лінію на площині воно визначає? Це рівняння, очевидно, представляє множину точок, у яких абсциса дорівнює ординаті. Таку властивість мають лише точки, розташовані на бісектрисі першого і третього координатних квадрантів.

Задачі I-го типу в основному розв’язуються в математичному аналізі. В аналітичній геометрії розглядаються задачі 2-го типу.

Нехай, наприклад, відомо, що лінія L на площині є геометричне місце точок, що знаходяться на віддалі R від заданої точки $C(x_0, y_0)$. Для того, щоб скласти рівняння цієї лінії, позначимо через $M(x, y)$ яку-небудь точку, що належить заданому геометричному місцю точок. З однієї сторони, віддаль між точками M і C (див (1.2)) буде

$$d = |CM| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

З іншої сторони, за умовою $d = R$. Отже,

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R,$$

або

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \qquad (2.1)$$

Як відомо із шкільного курсу, сформульована в умові властивість визначає коло з центром в точці C і радіусом R. Тому (2.1) – це рівняння кола радіуса R з центром в точці $C(x_0, y_0)$. Зокрема, коли центром кола є початок координат, тобто точка $O(0,0)$, із (2.1) одержуємо

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (2.2)$$

рівняння кола з центром в початку координат.

Означення 2.2. Будь-яка точка $M(x, y)$, що належить лінії L , називається біжучою точкою цієї лінії, а її координати – біжучими координатами.

Рівняння лінії – це рівняння, що пов'язує біжучі координати. Відмітимо ще, що не кожне рівняння $F(x, y) = 0$ є рівнянням лінії. Наприклад, рівняння $x^2 + y^2 = -1$ не зображає лінію, оскільки не існує точок $M(x, y)$, координати яких задовольняли це рівняння.

Надалі вважаємо, що зафіксована декартова система координат xOy і під словами «задана лінія» або «знайти лінію» розумітимемо, що задано або потрібно знайти рівняння цієї лінії у заданій декартовій системі координат.

Вивчення лінії на площині почнемо з найпростішої – прямої лінії. Пряму на площині можна задавати по різному: двома різними точками, прямою і напрямом тощо. В залежності від способу завдання прямої одержують і різний вигляд її рівнянь.

__Рівняння прямої з нормальним вектором.__

Нехай задана точка $M_0(x_0, y_0)$, що належить прямій L, і вектор $\bar{n} = \{A, B\}$, перпендикулярний до цієї прямої (рис.4). Скласти рівняння прямої L.

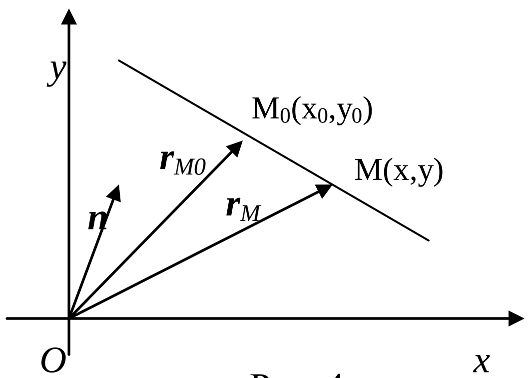


Рис. 4

Вектор $\bar{n}$ називається нормальним вектором прямої L.

Візьмемо на L довільну точку (біжучу) $M(x, y)$.Очевидно, що вектори $\bar{n}$ та $\overline{M_0M}$ взаємно перпендикулярні ($\bar{n} \perp \overline{M_0M}$) тоді і тільки тоді, коли M належить L.

Згідно з умовою перпендикулярності векторів, скалярний добуток $\bar{n}$ та $\overline{M_0M}$ дорівнює нулеві, тобто $\bar{n}\ \overline{M_0M} = 0$. Але вектор

$$\overline{M_0M} = \overline{OM} - \overline{OM_0} = \bar{r}_M - \bar{r}_{M_O}$$

($\bar{r}_M - \bar{r}_{M_O}$ – радіус вектори точок M і M_0) і дістаємо таке рівняння:

$$\bar{r}_M - \bar{r}_{M_O} \cdot \bar{n} = 0 \qquad (2.3)$$

Рівняння (2.3) називається **векторним рівнянням прямої з нормальним вектором.**

Запишемо рівняння (2.3) в координатній формі.

$$\bar{r}_M - \bar{r}_{M_O} = \{x - x_0; y - y_0\}, \qquad \bar{n} = \{A, B\},\ \text{то} \qquad (2.3)$$

набуває вигляду

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

(2.4)

Рівняння (2.4) називається **рівнянням прямої, що проходить через задану точку із заданим напрямним вектором.**

Зауважимо, що якщо вектор $\bar{n} = \{A, B\}$ є нормальним вектором прямої, то і будь-який вектор $\{\lambda A, \lambda B\}$ ($\lambda \neq 0$ – число) також є нормальним вектором даної прямої.

2.3.Загальне рівняння прямої

Загальне рівняння першого степеня (лінійне рівняння) з двома змінними x, y має вигляд

$$Ax + By + C = 0, \tag{2.5}$$

де хоча б один з коефіцієнтів A і B не дорівнює нулеві.

Теорема про взаємно однозначну відповідність між прямою на площині і рівнянням $Ax + By + C = 0$

1. *Будь-яка пряма на площині може бути представлена рівнянням* $Ax + By + C = 0$.
2. *Рівняння* $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ *при будь-яких* A, B, C *(крім випадку* $A = B = 0$*) є рівнянням прямої на площині.*

Доведення 1. Очевидно, що будь-яка пряма може бути задана нормальним вектором $\bar{n} = \{A, B\}$ і точкою $M_0(x_0, y_0)$, тобто представлена рівнянням

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \text{ або } Ax + By + (-Ax_0 - By_0) = 0$$

Позначивши $C = -Ax_0 - By_0$, дістанемо $Ax + By + C = 0$.

2. Нехай задано рівняння (2.5). Доведемо, що воно зображає пряму лінію на площині. Знайдемо будь-який розв'язок рівняння (2.5), наприклад, (x_0, y_0) . (Для цього можна вибрати, наприклад, $x = x_0$ і підставивши його в (2.5), одержати y_0). Отже, $Ax_0 + By_0 + C = 0$ Віднімемо від (2.5) цю тотожність і дістанемо $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$. Ми одержали рівняння (2.4), яке, як відомо, є рівнянням прямої. Теорему доведено.

Рівняння (2.5) називається загальним рівнянням прямої, причому A і B – координати нормального вектора.

Дослідження загального рівняння прямої

Розглянемо рівняння $Ax + By + C = 0$ і дослідимо положення прямої в залежності від коефіцієнтів A, B, C.

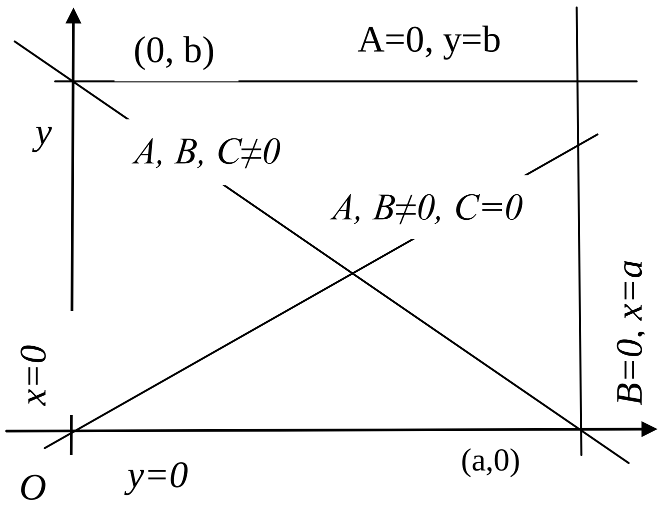


Рис.5

1) $A, B, C \neq 0$ – пряма загального положення і перетинає обидві координатні осі. При $y = 0$, $x = -\dfrac{C}{A} = a$, тобто $(a,0)$ точка перетину з віссю Ox; при $x = 0$, $y = -\dfrac{C}{B} = b$, тобто $(b,0)$ – xточка перетину з віссю Oy.(рис.5)

2) $C = 0$; $A, B \neq 0$; $Ax + By = 0$ – пряма проходить через початок координат ($A \cdot 0 + B \cdot 0 = 0$) (рис.5).

3) $B = 0;$ $A, C \neq 0$: $Ax + C = 0$ і нормальний вектор $\bar{n} = \{A, 0\}$ перпендикулярний до осі Oy. Рівняння цієї прямої $x = -\dfrac{C}{A}$, або $x = a$.

Аналогічно, якщо $A = 0;$ $B, C \neq 0$: $By + C = 0$, або $y = -\dfrac{C}{B};$ $y = b$ – пряма, паралельна осі Ox (рис.5).

4) $B = C = 0;$ $A \neq 0;$ $Ax = 0$, або $x = 0$ – рівняння осі Oy.
$A = C = 0;$ $B \neq 0;$ $By = 0$, або $y = 0$ – рівняння осі Ox.

2.5.Канонічне рівняння прямої. Параметричні рівняння прямої.

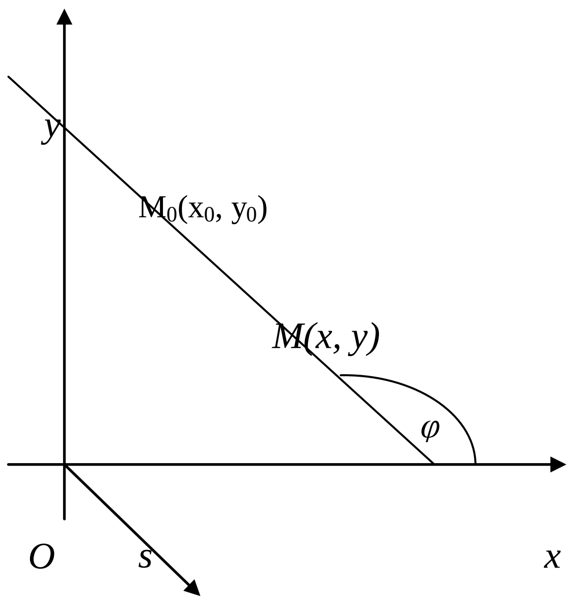
Нехай задана точка $M_0(x_0, y_0)$, яка належить прямій L, і вектор $\bar{s} = \{l, m\}$, паралельний даній прямій. Записати рівняння L.

Вектор $\bar{s} = \{l, m\}$ називається напрямним вектором прямої.

Візьмемо на L довільну точку $M(x,y)$ і вектор $\overline{M_0M}$. Вектори $\overline{M_0M} = \{x-x_0; y-y_0\}$ і $\bar{s}=\{l,m\}$ будуть колінеарними ($\overline{M_0M} \parallel \bar{s}$)

тоді і тільки тоді, коли точка $M(x,y)$ належить прямій. Тоді з колінеарності векторів випливає, що відповідні координати векторів $\overline{M_0M}$ і $\bar{s}$ пропорційні, тобто

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} \tag{2.6}$$



Рівняння (2.6) називається **канонічним рівнянням прямої**, або рівнянням прямої, що проходить через задану точку з напрямним вектором $\bar{s}=\{l,m\}$. Рівнянням (2.6) може бути задана будь-яка пряма. Зокрема, якщо, наприклад, вектор $\bar{s}$ і пряма перпендикулярні осі Ox, то $\bar{s}=\{0,m\}$ і рівняння (2.6) приймає вигляд:

$$\frac{x-x_0}{0} = \frac{y-y_0}{m}$$

що означає: $x-x_0=0$, або $x=x_0$.

Зауважимо, що якщо вектор $\bar{s}=\{l,m\}$ є напрямним вектором для прямої L, то і будь-який вектор $\{\lambda l, \lambda m\}$ ($\lambda \neq 0 -$ число) також є напрямним вектором даної прямої.

У формулі (2.6) прирівнюємо рівні відношення параметрові t. Одержимо систему $\frac{x-x_0}{l}=t, \quad \frac{y-y_0}{m}=t$, або $x-x_0=lt, \quad y-y_0=mt$

і

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt; \quad -\infty < t < +\infty \tag{2.7}$$

Рівняння (2.7) називаються **параметричними рівняннями прямої.** При зміні параметра t точка $M(x, y)$ переміщується по прямій L.

2.6.Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Кутом φ нахилу прямої називається кут між прямою і віссю Ox. Причому кут φ відраховується від додатного напряму осі Ox до прямої проти годинникової стрілки, так, що $0 \le \varphi \le \pi$ (рис.6)

Кутовим коефіцієнтом k прямої називається тангенс кута нахилу, тобто $k = tg\varphi$.

Нехай задані точка $M_0(x_0, y_0)$, що належить прямій L, і кутовий коефіцієнт $k = tg\varphi$. Скласти рівняння прямої.

Для цього скористаємось рівнянням (2.6), у якому числа l і m – проекції напрямного вектора $\bar{s}$ (рис.6). Тому:

$$l = np_{Ox}\bar{s} = |\bar{s}|\cos(Ox, \wedge \bar{s}) = |\bar{s}|\cos\varphi$$

$$m = np_{Oy}\bar{s} = |\bar{s}|\cos(Oy, \wedge \bar{s}) = |\bar{s}|\cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = |\bar{s}|\sin\varphi.$$

Отже,

$$\frac{m}{n} = \frac{|\bar{s}|\sin\varphi}{|\bar{s}|\cos\varphi} = tg\varphi = k, \qquad (l \ne 0).$$

Тоді із (2.6) одержуємо $y - y_0 = \dfrac{m}{l}(x - x_0)$, або

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{2.8}$$

Рівняння (2.8) називається **рівнянням прямої, що проходить через задану точку з кутовим коефіцієнтом.** Зауважимо, що не будь-яка пряма має кутовий коефіцієнт. Так, якщо пряма перпендикулярна до осі Ox $(l = 0)$, то кут $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ і $k = tg\varphi$ – не існує.

Перетворимо рівняння (2.8) так:

$$y = y_0 + kx - kx_0, \qquad y = kx + (y_0 - kx_0)$$

Позначимо $b = y_0 - kx_0$; одержуємо

$$y = kx + b \qquad (2.9)$$

Рівняння (2.9) є рівнянням лінійної функції. Якщо в (2.9) прийняти $x = 0$, то $y = b$. Отже, пряма перетинає вісь Oy в точці $(0, b)$ і число b – величина відрізка, який відсікає пряма на осі Oy. При $b = 0$ одержуємо

$y = kx$

– рівняння прямої, що проходить через початок координат.

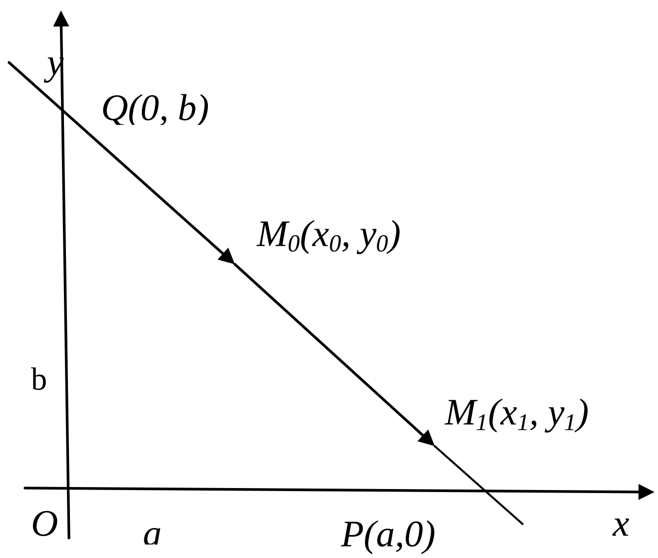


Рис.7

2.7.Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.

Нехай задані дві точки $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$, які належать прямій L. Скласти рівняння цієї прямої (рис.7).

Вектор $\overline{M_0M_1}$ лежить на прямій L, і отже, можна вважати, що $\overline{M_0M_1}$ – напрямний вектор прямої L. Тому використаємо формулу (2.6).

Маємо: $\bar{s} = \overline{M_0M_1} = \{x_1 - x_0; y_1 - y_0\}$, так, що $l = x_1 - x_0$, $m = y_1 - y_0$ і підставляючи в (2.6), одержуємо:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \qquad (2.10)$$

Рівняння (2.10) – **рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.**

2.8.Рівняння прямої у відрізках на осях.

Нехай пряма L перетинає обидві координатні осі, відсікаючи на них відрізки, величини яких відповідно дорівнюють $a \neq 0$ і $b \neq 0$ (рис.7). Тому використаємо формулу (2.10):

$$\frac{x-a}{0-a} = \frac{y-0}{b-0}; \qquad \frac{x-a}{-a} = \frac{y}{b}; \qquad -\frac{x}{a} + 1 = \frac{y}{b}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad (a \neq 0, \quad b \neq 0) \tag{2.11}$$

Рівняння (2.11) називається **рівнянням прямої у відрізках на осях**.

2.9. Умови паралельності і перпендикулярності двох прямих. Кут між двома прямими

У пунктах 2.2, 2.5, 2.6 ми одержали різні вигляди рівняння прямої, що проходить через задану точку при різних способах завдання напряму цієї прямої: нормальним вектором $\bar{n} = \{A, B\}$ (див.(2.4)), напрямним вектором $\bar{s} = \{l, m\}$ (див.(2.6)), кутовим коефіцієнтом $k = tg\varphi$ (див.(2.8), (2.9)).

Для багатьох задач потрібно знати напрям прямої, заданої загальним рівнянням $Ax + By + C = 0$, тобто потрібно визначити координати векторів $\bar{n}$ або $\bar{s}$, або кутовий коефіцієнт k цієї прямої.

Нехай задано рівняння (2.5): $Ax + By + C = 0$. Тоді, очевидно, координати нормального вектора $\bar{n} = \{A, B\}$. Для знаходження напрямного вектора $\bar{s}$ зауважимо, що за $\bar{s}$ можна вибрати будь-який вектор, перпендикулярний вектору $\bar{n}$, наприклад, вектор $\bar{s} = \{B, -A\}$ (дійсно, $\bar{n} \cdot \bar{s} = A \cdot B + B \cdot (-A) = 0$). Для знаходження кутового коефіцієнта k зобразимо рівняння (2.5) у вигляді (2.9), тобто

$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}\quad (B\neq 0)$ і, порівнюючи одержану рівність з рівнянням (7.9), знаходимо, що $k=-\frac{A}{B}$. Отже,

якщо задано рівняння $Ax+By+C=0$, то
$\overline{n}=\{A,B\}$ —— нормальний вектор прямої;
$\overline{s}=\{B,-A\}$ —— напрямний вектор прямої;
$k=tg\varphi=-\frac{A}{B}\quad (B\neq 0)$ —— кутовий коефіцієнт прямої.

Нехай задано дві прямі: $A_1x+B_1y+C_1=0\quad (L_1)$ і
$A_2x+B_2y+C_2=0\quad (L_2)$.

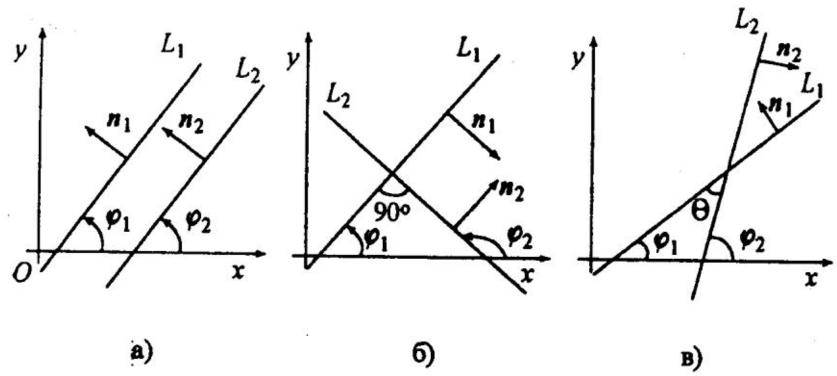
1) Запишемо їх нормальні вектори $\overline{n}_1=\{A_1;B_1\}$ і $\overline{n}_2=\{A_2,B_2\}$.

Умова паралельності прямих: $\boxed{\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}}$

Дійсно, оскільки $L_1\parallel L_2$ (рис.8а), то вектори $\overline{n}_1$ і $\overline{n}_2$ колінеарні ($\overline{n}_1\parallel\overline{n}_2$), отже, їх однойменні координати пропорційні координати пропорційні.

Умова перпендикулярності прямих: $\boxed{A_1A_2+B_1B_2=0}$

Дійсно, оскільки $L_1\perp L_2$ (рис.8б), то вектори $\overline{n}_1$ і $\overline{n}_2$ перпендикулярні ($\overline{n}_1\perp\overline{n}_2$), отже, їх скалярний добуток дорівнює нулеві: $\overline{n}_1\cdot\overline{n}_2=0$.



Кут між прямими. Нехай θ – кут між прямими L_1 і L_2 (рис.8в), тоді кут між векторами $\overline{n}_1$ і $\overline{n}_2$ буде $\theta = (\overline{n}_1, \wedge \overline{n}_2)$, або $180^0 - \theta = (\overline{n}_1, \wedge \overline{n}_2)$ і

$$\boxed{\cos\theta = \pm\cos(\overline{n}_1, \wedge \overline{n}_2) = \frac{\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2}{|\overline{n}_1| \cdot |\overline{n}_2|} = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^{\,2} + B_1^{\,2}}\sqrt{A_2^{\,2} + B_2^{\,2}}}}$$

Аналогічні умови одержуємо, якщо використаємо напрямні вектори $\overline{s}_1$ і $\overline{s}_2$ прямих L_1 і L_2.

2) Знайдемо кутові коефіцієнти k_1 і k_2 прямих L_1 і L_2.

Умова паралельності прямих: $\boxed{k_1 = k_2}$

Дійсно, оскільки L_1 і L_2 паралельні (рис.8а), то кути φ_1 і φ_2 їх нахилу рівні, тобто $\varphi_1 = \varphi_2$, отже, $\mathrm{tg}\varphi_1 = \mathrm{tg}\varphi_2$.

Умова перпендикулярності прямих: $\boxed{k_1 = -\dfrac{1}{k_2}}$

Дійсно, оскільки L_1 і L_2 перпендикулярні (рис.8в), то кут θ між ними дорівнює 90^0, і для кутів їх нахилу φ_1 і φ_2 одержуємо $\varphi_2 = 90^0 + \varphi_1$. Звідки

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \operatorname{tg}(90^0 + \varphi_1) = -\operatorname{ctg}\varphi_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi_1}.$$

Кут між прямими. . Нехай θ – кут між прямими L_1 і L_2 (рис.8в), тоді одержуємо, що $\theta = \varphi_2 - \varphi_1$, звідки

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1), \quad \text{або} \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1 + \operatorname{tg}\varphi_2 \cdot \operatorname{tg}\varphi_1};$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1}}$$

2.10.Деякі типові задачі

Задача 1. Нехай задана пряму $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і точку $M_0(x_0, y_0)$. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку M_0 та

а) паралельна заданій прямій; б) перпендикулярна до заданої прямої.

Розв'язання. Якщо задана пряма, то відомий її нормальний вектор $\bar{n}_1 = \{A_1; B_1\}$, тому використаємо формулу (2.4).

а) Шукана пряма паралельна даній, отже, $\bar{n}_1 \parallel \bar{n}_2$, і можна вважати, що $\bar{n}_2 = \bar{n}_1 = \{A_1; B_1\}$, і тоді із (2.4) маємо

$\boxed{A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) = 0}$ —— рівняння прямої, що проходить

через точку M_0 перпендикулярно до заданої прямої.

Задача 2. Задана пряма $2x-3y+5=0$ і точка $M_0(-2;1)$. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку M_0 під кутом $\theta=\frac{\pi}{4}$ до заданої прямої.

Розв'язання. У цій задачі задано кут між прямими. Для знаходження напряму шуканої прямої краще використати формулу для $\operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$, тобто напрям визначити за допомогою кутового коефіцієнта k_2. Для заданої прямої $2x-3y+5=0$ маємо $k_1=\frac{2}{3}$.

Далі дістаємо

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{k_2-k_1}{1+k_2\cdot k_1}, \qquad \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1=\frac{k_2-\frac{2}{3}}{1+k_2\cdot\frac{2}{3}},$$

$$1+\frac{2}{3}k_2=k_2-\frac{2}{3}, \qquad \frac{1}{3}k_2=\frac{5}{3} \qquad k_2=5.$$

У формулі для $\operatorname{tg}\theta$ неясно, який з кутових коефіцієнтів k_1 чи k_2 вважати заданим. Тому задача має два розв'язки. Ми одержали $k_2=k^{(1)}=5$. Замінимо місцями шуканий і заданий кутові коефіцієнти і одержимо:

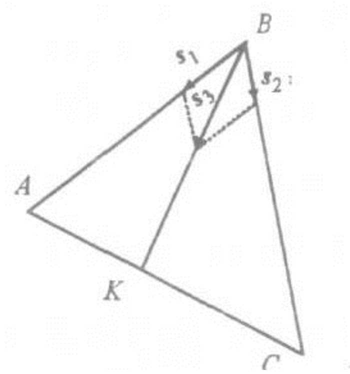
$$1=\frac{\frac{2}{3}-k^{(2)}}{1+\frac{2}{3}k^{(2)}}; \qquad 1+\frac{2}{3}k^{(2)}=\frac{2}{3}-k^{(2)}$$

$$\frac{5}{3}k^{(2)}=-\frac{1}{3} \qquad k^{(2)}=-\frac{1}{5}.$$

Для того, щоб записати рівняння шуканої прямої, скористаємось формулу (2.8)

Перше рівняння: $y-1=5(x+2)$, або $5x-y+11=0$

Друге рівняння: $y-1=-\frac{1}{5}(x+2)$, або $x+5y-3=0$



Задача 3. Задано вершини трикутника $A(4;6)$, $B(-4;0)$, $C(-1;-4)$. Скласти рівняння бісектриси внутрішнього кута *B*.

Розв'язання. Зробимо схематичний рисунок (рис.9). Для розв'язання задачі використаємо те, що діагональ ромба є і бісектрисою відповідного кута. Отже, якщо $\bar{s}_1$ і $\bar{s}_2$ – напрямні вектори прямих BA і BC і їх довжина однакова:

$|\bar{s}_1|=|\bar{s}_2|$, то $\bar{s}_3=\bar{s}_1+\bar{s}_2$

– напрямний вектор бісектриси кута *B*. За вектори $\bar{s}_1$ і $\bar{s}_2$ можна взяти, наприклад, напрямні орти векторів $\overline{BA}$ і $\overline{BC}$, тобто

$$\bar{s}_1=\overline{BA}^0, \bar{s}_2=\overline{BC}^0.$$

Маємо:

$\overline{BA}=\{8,6\}$, $|\overline{BA}|=\sqrt{64+36}=10$,

$\bar{s}_1=\overline{BA}^0=\{8/10, 6/10\}=\{4/5, 3/5\}$

$\overline{BC}=\{3,-4\}$, $|\overline{BC}|=\sqrt{9+16}=5$, $\bar{s}_2=\overline{BC}^0=\{3/5,-4/5\}$.

Тоді $\bar{s}_3=\bar{s}_1+\bar{s}_2=\{7/5,-1/5\}$, або можна вважати, що $\bar{s}_3=\{7,-1\}$. Складемо тепер рівняння прямої , що проходить через точку *B* у напрямі $\bar{s}_3$, тобто використаємо формулу (2.6):

$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}$. Тоді $\frac{x+4}{7}=\frac{y-0}{-1}$; $x+4=-7y$, або

$x+7y+4=0$ – рівняння бісектриси BK.

2.6.Перетин двох прямих.

Нехай задано дві прямі загальними рівняннями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \qquad \text{і} \qquad A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Потрібно знайти точку їх перетину, або впевнитись, що такої немає. Оскільки координати x_0, y_0 точки перетину повинні задовольняти обидва рівняння, то їх потрібно шукати як розв’язок системи:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \qquad \text{і} \qquad A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

При цьому можливі три випадки:

1) Прямі перетинаються, тобто вектори $\bar{n}_1 = \{A_1; B_1\}$, $\bar{n}_2 = \{A_2, B_2\}$ не колінеарні:

$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$. Система має єдиний розв’язок.

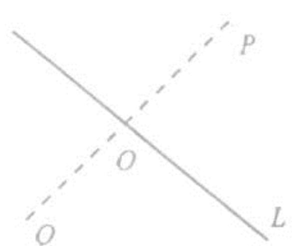
2) Прямі паралельні, так що вектори $\bar{n}_1 = \{A_1; B_1\}$, $\bar{n}_2 = \{A_2, B_2\}$ колінеарні, і

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$, але різні, тому $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ — система не має розв’язку.

3) Прямі співпадають, тобто $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Система має нескінченну множину розв’язків.

Задача 4. Знайти точку $Q(x, y)$, симетричну точці $P(-2,-9)$ відносно прямої $2x + 5y - 38 = 0 \quad (L)$



Розв’язання. Зробимо схематичний рисунок (рис.10). Очевидно, що точка Q повинна бути розташована на прямій PQ, перпендикулярній до прямої L, і відстояти від L на такій же віддалі, що і P.

1) Складемо рівняння прямої PQ, перпендикулярної до L, що проходить через точку $P(-2,-9)$. Маємо $\bar{n}_2 = \{2, 5\}$. Тоді

$\overline{n}_{PQ} = \{5, -2\}$ (див. задачу 1), і згідно з формулою (2.4) одержуємо $5(x+2)-2(y+9)=0$, $5x-2y-8=0$ —— рівняння прямої PQ.

2) Знаходимо точку перетину прямих L і PQ. Для цього розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x+5y-38=0 \\ 5x-2y-8=0 \end{cases}$$

Одержуємо точку $O(4,6)$.

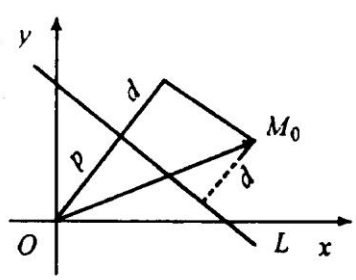
3) Знаходимо точку Q з умови $\overline{PO}=\overline{OQ}$, тобто $4-(-2)=x-4$, . $6-(-9)=y-6$

Звідки $x=10, \quad y=21.$

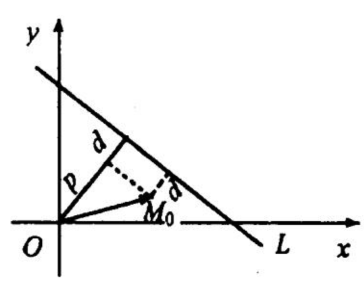
Отже, точка $Q(10,21)$ —— шуканий розв'язок задачі.

2.12.Віддаль від точки до прямої

Нехай задана пряма L, що не проходить через початок координат, тобто задане рівняння $Ax+By+C=0$ $(C \neq 0)$ і задана точка $M_0(x_0, y_0)$. Знайти віддаль d від точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої L.



а)



б)

Згідно з умовою, пряма не проходить через початок координат $(C \neq 0)$. Позначимо через P віддаль від прямої до початку координат(рис.11 а) та в)).

Розглянемо спочатку випадок, коли точка $M_0(x_0, y_0)$ і початок координат $O(0,0)$ лежать по різні сторони від прямої L (рис.11 а).

Проведемо радіус-вектор $\overline{OM_0} = \bar{r}_{M_O} = \{x_0; y_0\}$ і спроектуємо його на нормаль $\bar{n} = \{A, B\}$. Тоді, з однієї сторони $np_{\bar{n}}\, \bar{r}_{M_O} = \dfrac{\bar{r}_{M_O} \cdot \bar{n}}{|\bar{n}|}$,

з іншої сторони, з іншої сторони , модуль цієї проекції дорівнює $p + d$. Отже,

$$p + d = \frac{|\bar{r}_{M_O} \cdot \bar{n}|}{|\bar{n}|} = \frac{|Ax_0 + By_0|}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \text{або} \quad p + d = \frac{Ax_0 + By_0}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}},$$

а звідси

$$d = \frac{Ax_0 + By_0}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} - p\,.$$

Знайдемо p. Нехай точка $M_0(x_0, y_0)$ лежить на прямій L. Тоді, по-перше, $d = 0$, по-друге, координати точки M_0 задовольняють рівняння прямої, тобто $Ax_0 + By_0 + C = 0$ і $Ax_0 + By_0 = -C$.

Враховуючи це, одержуємо:

$$p = \frac{Ax_0 + By_0}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{-C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} > 0 \qquad (2.12)$$

Формула (2.12) визначає віддаль p прямої L від початку координат, якщо знак перед радикалом протилежний знаку *C*. Підставивши (2.12) у вираз для d, знаходимо

$$d = \frac{Ax_0 + By_0}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Нехай тепер точки $M_0(x_0, y_0)$ і $O(0,0)$ лежать по одну сторону прямої L (рис.11б)). У цьому випадку $|np_{\bar{n}}\, \bar{r}_{M_O}| = p - d$. Як і в попередньому випадку , для d, дістанемо

$$-d=\frac{Ax_0+By_0+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \qquad \text{або} \qquad d=-\frac{Ax_0+By_0+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Об'єднавши обидва випадки розташування точки $M_0(x_0,y_0)$, дістанемо

$$d=\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}\right|=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad (2.13)$$

— формулу для обчислення віддалі від точки $M_0(x_0,y_0)$ до прямої $Ax+By+C=0$.

Отже, щоб знайти віддаль від точки до прямої, потрібно у лівій частині загального рівняння прямої замінити біжучі координати на координати заданої точки і абсолютну величину одержаного числа поділити на $|\bar{n}|=\sqrt{A^2+B^2}$.

Зокрема, якщо точка $M_0(x_0,y_0)$ належить прямій, то

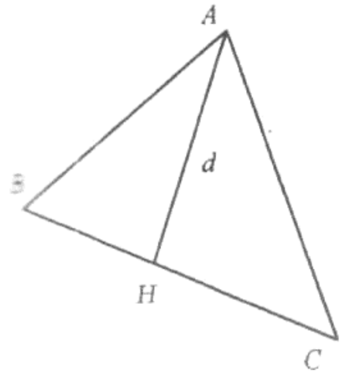
$$Ax_0+By_0+C=0 \qquad \text{і} \qquad d=0.$$

Зауваження. У формулі (2.13) звичайно несуттєво, який знак залишити перед радикалом під модулем. Але вираз під модулем

$$\delta=\frac{Ax_0+By_0}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}, \qquad (2.14)$$

який називається відхиленням точки M_0 від прямої L, має самостійний зміст, і його знак уже суттєвий. А саме, при обчисленні δ знак перед радикалом потрібно взяти протилежним знаку C (див.(2.12)). Тоді:

при $\delta>0$ точки $M_0(x_0,y_0)$ і $O(0,0)$ знаходяться **по різні сторони** від прямої L (рис. 11 а));
при $\delta>0$ **по одну сторону** прямої L (рис. 11 б)).



Задача 5. Задано вершини трикутника ABC: $A(4;6)$, $B(-4;0)$, $C(-1;-4)$. Знайти довжину висоти, опущеної із вершини A на сторону BC.

Розв'язання. Зробимо схематичний рисунок (рис.12). Задача зводиться до знаходження віддалі від точки A до прямої BC, яку можна знайти за формулою (2.13). Складемо рівняння прямої BC як прямої, що проходить через дві задані точки B і C. Згідно з формулою (2.10), маємо:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}; \qquad \frac{x+4}{-1+4}=\frac{y-0}{-4-0} \qquad \frac{x+4}{3}=\frac{y}{-4};$$

$x+7y+4=0$ — рівняння прямої BC.

Знаходимо $\left|\bar{n}\right|=\sqrt{4^2+3^2}=5$. Підставляємо у ліву частину одержаного рівняння прямої BC координати точки A і згідно з (2.13) маємо;

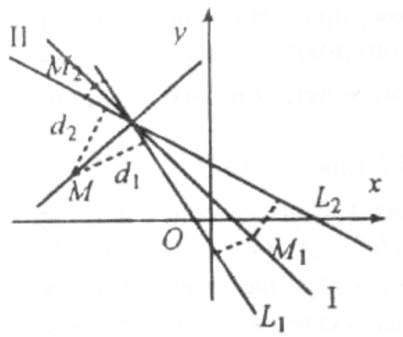
$$d=\frac{\left|4\cdot 4+3\cdot 6+16\right|}{5}=10.$$

Це і є шукана висота AH.

Задача 6. Задано дві прямі $3x+4y-9=0 \quad (L_1)$ і $8x+6y+7=0 \quad (L_2)$

Скласти рівняння бісектриси гострого кута, утвореного при перетині цих прямих.

Розв'язання. Переконаємось спочатку, що прямі перетинаються. Дійсно, вектори $\bar{n}_1=\{3;4\}$ $\bar{n}_2=\{8,6\}$ не колінеарні $\left(\frac{3}{8}\neq\frac{4}{6}\right)$ і прямі не перетинаються. Прямі, що перетинаються, утворюють два різні



кути і, отже, існують дві бісектриси (на рис.13 дві прямі I і II). Рівняння бісектриси у цій задачі знайдемо, виходячи із її властивості: бісектриса – це геометричне місце точок, рівновіддалених від сторін кута. Нехай $M(x, y)$ – будь-яка точка, що належить бісектрисі, якщо позначити d_1 і d_2 віддаль від $M(x, y)$ до заданих прямих, то

$$d_1 = d_2 .$$

Знайдемо d_1 і d_2 за формулою (2.13) із урахуванням знаків перед радикалами (див. зауваження):

$$d_1 = \left|\frac{3x+4y-9}{5}\right| \qquad d_2 = \left|\frac{8x+6y+7}{-10}\right|.$$

Тоді рівняння бісектрис має вигляд

$$\left|\frac{3x+4y-9}{5}\right| = \left|\frac{8x+6y+7}{-10}\right|.$$

Звідки ми дістаємо два рівняння

$$\left|\frac{3x+4y-9}{5}\right| = \left|\frac{8x+6y+7}{-10}\right|; \qquad \frac{3x+4y-9}{5} = -\frac{8x+6y+7}{-10},$$

або

$$14x+14y-11=0; \qquad 2x-2y+25=0.$$

Ми одержали рівняння двох бісектрис. При цьому перше рівняння одержано при збіжності знаків відхилень δ_1 і δ_2 точок бісектрис відповідно від прямих L_1 і L_2, тобто $\delta_1 = \delta_2$, а для другого рівняння $\delta_1 = -\delta_2$. Для того, щоб виділити рівняння бісектриси гострого кута, можна зробити рисунок в системі координат (рис.13), тобто побудувати задані прямі L_1 і L_2 за їх рівняннями. Шукана пряма буде M_1M_2. Для будь-якої її точки буде $\delta_1 = \delta_2$. Дійсно, точки прямої M_1M_2 розташовані у правому вертикальному куті (наприклад, точка M_1 (рис.13) , і початок координат O лежить по одну сторону як від прямої L_1 $(\delta_1 < 0)$, так і від L_2 $(\delta_2 > 0)$ і $\delta_1 = \delta_2$, а точки прямої M_1M_2 розташовані у лівому вертикальному куті (наприклад, точка M_2 (рис.13)), і початок координат O лежить по різні сторони від кожної з прямих L_1 і L_2, так що $\delta_1 > 0$ та $\delta_2 > 0$, і $\delta_1 = \delta_2$. Отже, шукане рівняння бісектриси: $14x + 14y - 11 = 0$.

Зауважимо, що цю задачу можна було розв'язати за допомогою напрямних векторів $\bar{s}_1^{\,0}$ і $\bar{s}_2^{\,0}$ заданих прямих (див задачу 3 із п.2.10). При цьому кут між прямими L_1 і L_2 буде гострим, якщо $\bar{s}_1^{\,0} \cdot \bar{s}_2^{\,0} > 0$, у протилежному випадку ($\bar{s}_1^{\,0} \cdot \bar{s}_2^{\,0} < 0$) потрібно один з цих векторів замінити на протилежний , наприклад, $\bar{s}_2^{\,0}$ на $-\bar{s}_2^{\,0}$.

ЛЕКЦІЯ №3

Рівняння площини і прямої в просторі

3.1. Рівняння поверхні і лінії в просторі.

Нехай у просторі задана декартова система координат $Oxyz$, тобто будь-яка точка зображається у вигляді $M(x, y, z)$, і нехай задана деяка поверхня Q, яка є геометричним місцем точок, що мають деяку загальну властивість, яка характерна тільки для точок поверхні Q. Ця властивість має бути виражена як рівняння, що пов’язує координати x, y, z точок поверхні Q. Загальний вигляд такого рівняння:

$$F(x, y, z) = 0$$

Означення 1. Рівняння $F(x, y, z) = 0$ називається рівнянням поверхні Q (визначає поверхню Q у заданій системі координат), якщо його задовольняють координати x, y, z будь-якої точки, що лежить на цій поверхні і не задовольняють координати точок, що не лежать на ній.

Будь-яка поверхня Q зображається рівнянням $F(x, y, z) = 0$, яке виражає загальну властивість точок тільки цієї поверхні і якому задовольняють координати x, y, z тих і тільки тих точок, які належать поверхні.

Нехай, наприклад, відомо, що поверхня Q є геометричним місцем точок, які знаходяться на віддалі R від заданої точки $C_0(x_0, y_0, z_0)$. Щоб скласти рівняння цієї поверхні, позначимо через $M(x, y, z)$ будь-яку точку, що належить до шуканого геометричного місця точок. Згідно з умовою $d = \left|\overline{C_0M}\right| R$.

Користуючись формулою віддалі між двома точками (1.3), одержимо

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = R$$

або

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 \qquad (3.1)$$

— рівняння шуканої поверхні. Але сформульовану в умові властивість мають точки, що лежать на сфері. Отже, рівняння (3.1) – — рівняння сфери з центром у точці $C_0(x_0, y_0, z_0)$ і радіусом R.

Зокрема, якщо центр сфери — початок координат $O\,(0,0,0)$, то рівняння (3.1) має вигляд

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \tag{3.2}$$

Обернена задача (у деякому сенсі) полягає в тому, щоб за відомим рівнянням, що пов'язує x, y, z, визначити вигляд поверхні, яка представлена рівнянням. Так, наприклад, рівняння $z = 0$

визначає множину точок $M(x, y, 0)$, тобто точок, що лежать в площині xOy.

Зауважимо, що не кожне рівняння $F(x, y, z) = 0$ зображає деяку поверхню. Так, рівняння $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ не задовольняють жодні значення x, y, z і воно нічого не зображає.

Лінію у просторі розглядають як перетин двох поверхонь, тобто як геометричне місце точок, що лежать одночасно двох поверхнях. Тому лінія L є перетин двох поверхонь Q_1 і Q_2, рівняння яких відповідно $F_1(x, y, z) = 0$ і $F_2(x, y, z) = 0$, тобто лінію L потрібно визначити системою із цих рівнянь.

Означення 2. Система рівнянь $F_1(x, y, z) = 0$ і $F_2(x, y, z) = 0$ називається рівнянням лінії L (визначає лінію L при заданій системі координат), якщо цю систему задовольняють координати x, y, z будь-якої точки, що лежить на цій лінії і не задовольняють координати точок, що не лежать на L.

Наприклад, система рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

представляє перетин сфери із площиною xOy з центром у початку координат і радіусом R.

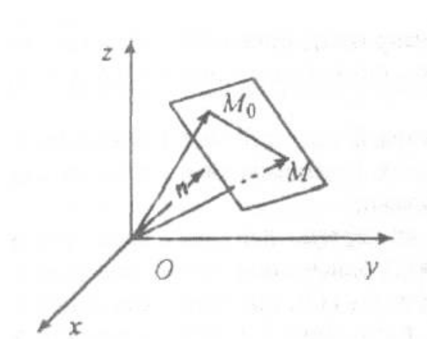
Зауважимо, що задана лінія L може бути, взагалі кажучи, лінією перетину різних пар поверхонь, тобто може бути представлена різними системами із двох рівнянь. Але, усі такі системи мають однаковий розв'язок, так що є еквівалентними.

Надалі вважатимемо, що зафіксована декартова система координат $Oxyz$ і що задати поверхню (лінію в просторі), або знайти поверхню (лінію в просторі), або знайти поверхню (лінію) означає задати або знайти рівняння цієї поверхні (лінії).

3.2. Рівняння площини з нормальним вектором.

Нехай задано точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, яка належить площині Q, і вектор $\bar{n} = \{A, B, C\}$, перпендикулярний до цієї площини. Скласти рівняння площини Q.

Вектор $\bar{n} = \{A, B, C\}$ називається **нормальним вектором** площини Q (рис. 14).



Аналогічна задача для прямої на площині була розглянута в п.2.2. Візьмемо на площині Q довільну точку (біжучу) $M(x, y, z)$ і проведемо вектор $\overline{M_0M}$. Очевидно, вектори $\overline{M_0M}$ і $\bar{n}\cdot$ взаємно перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли точка $M(x, y, z)$ належить площині Q. Із умови перпендикулярності векторів одержуємо:

$\bar{n} \cdot \overline{M_0M} = 0$, або $(\bar{r}_M - \bar{r}_{M_O}) \cdot \bar{n} = 0$

(3.3)

Рівняння (3.3) є векторною формою рівняння площини з нормальним вектором. Враховуючи координатний запис векторів

$\bar{n} = \{A, B, C\}$ $\bar{r}_M - \bar{r}_{M_O} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$,

із (3.3) одержуємо

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad (3.4)$$

Рівняння (3.4) — це рівняння площини, яка містить задану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і має нормальний вектор $\bar{n}=\{A, B, C\}$. Зауважимо, що якщо $\bar{n}=\{A, B, C\}$ нормальний вектор площини Q, то і будь-який вектор $\{\lambda A, \lambda B, \lambda C\}$ $(\lambda \neq 0)$ також є вектором, перпендикулярним площині Q.

Ми повністю повторили міркування п.2.2 і формули (3.3) і (3.4), абсолютно аналогічні формулам (2.3) і (2.4).

3.3. Загальне рівняння площини.

Загальне рівняння першого степеня (лінійне рівняння) з трьома змінними x, y, z має вигляд:

$$Ax+By+Cz+D=0, \qquad (3.5)$$

де хоча б один із коефіцієнтів A, B, C не дорівнює 0.

Теорема про взаємно однозначну відповідність між площиною і рівнянням $Ax+By+Cz+D=0$

1. *Будь-яка площина може бути представлена рівнянням*

$Ax+By+Cz+D=0$ *і навпаки.*

2. *Рівняння* $Ax+By+Cz+D=0$ *при будь-яких* A, B, C, D

(крім випадку $A=B=C=0$) є рівнянням площини.

Доведення цієї теореми абсолютно аналогічне доведенню подібної теореми для прямої на площині (див. п.2.3).

Рівняння (3.5) називається **загальним рівнянням площини,** причому коефіцієнти A, B, C — координати нормального вектора $\bar{n}=\{A, B, C\}$

3.3. Дослідження загального рівняння площини.

Розглянемо рівняння (3.5) і визначимо положення площини Q в залежності від його коефіцієнтів A, B, C, D.

1. $A, B, C, D \neq 0$ і рівняння $Ax + By + Cz + D = 0$ визначає **площину загального положення.** У цьому випадку площина перетинає всі три координатні осі. Маємо:

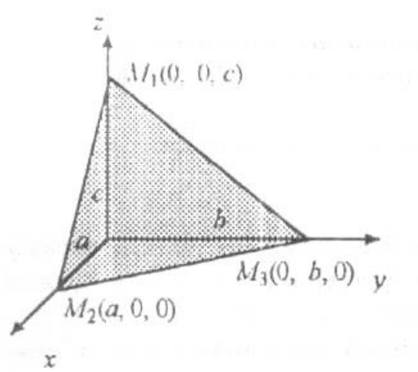
$$y = z = 0, \quad x = -\frac{D}{A} = a,$$ тобто $(a, 0, 0)$ – точка перетину площини з віссю *Ox*;

$$z = x = 0, \quad y = -\frac{D}{B} = b,$$ тобто $(0, b, 0)$ – точка перетину площини з віссю *Oy*.

$$x = y = 0, \quad z = -\frac{D}{C} = c,$$ тобто $(0, 0, c)$ – точка перетину площини з віссю *Oz*.

Числа a, b, c — відповідно величини відрізків, що відтинаються площиною Q на координатних осях. (рис.15)

Виконаємо таке перетворення рівняння (3.5):



$$Ax + By + Cz = -D,$$

$$\frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} = 1,$$

$$\frac{x}{-D/A} + \frac{y}{-D/B} + \frac{z}{-D/C} = 1.$$

Звідки, позначаючи

$a = -D/A, b = -D/B, c = -D/C$

(дивись вище),

одержуємо

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0) \qquad (3.6)$$

– **рівняння площини у відрізках на осях**.

Наприклад, нехай задано рівняння $2x+3y+z-6=0$. Знайдемо точки перетину цієї площини з осями координат, прирівнюючи послідовно до нуля пари координат. Одержимо

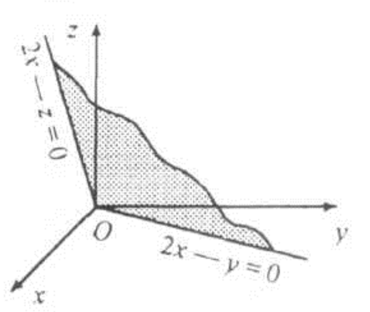
$$x=y=0,\quad z=6, \qquad M_1=(0,0,6),\quad c=6$$
$$y=z=0,\quad x=3, \qquad M_2=(3,0,0),\quad a=3$$
$$z=x=0,\quad y=2, \qquad M_3=(0,2,0),\quad b=2.$$

На рис 15 побудована частина площини, що лежить у першому октанті.

2. $D=0;\quad A,B,C\neq 0$. Рівняння $Ax+By+Cz=0$ визначає площину, що проходить через початок координат (координати точки $O\ (0,0,0)$ задовольняють це рівняння).

Наприклад, нехай задано рівняння площини $2x-y-z=0$. Це рівняння площини, що проходить через початок координат. Отже, інших точок перетину із координатними осями у неї не буде. Знайдемо дві лінії її перетину з координатними площинами. Поклавши, наприклад, $z=0$, дістаємо $2x-y=0$, тобто у площині xOy пряму $2x-y=0$.

Якщо $y=0$, то дістанемо у площині xOz пряму $2x-z=0$.

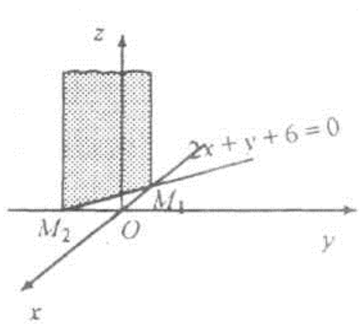


За двома прямими, що перетинаються, можна побудувати площину. На рис.16а побудована частина площини, що розташована в першому октанті.

3. $C=0;\quad A,B,D\neq 0$. Рівняння $Ax+By+D=0$ визначає площину, паралельну до осі Oz (вектор $\bar{n}=\{A,B,0\}$ перпендикулярний до осі Oz);

$B=0;\quad A,C,D\neq 0$. Рівняння $Ax+Cz+D=0$ визначає площину, паралельну осі Oy (вектор $\bar{n}=\{A,0,C\}$ перпендикулярний до осі Oy);

$A=0;\quad B,C,D\neq 0$. Рівняння $By+Cz+D=0$ визначає площину, паралельну осі Ox (вектор $\bar{n}=\{0,B,C\}$ перпендикулярний до осі Ox).

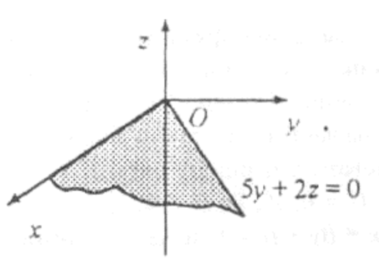


Наприклад, нехай задано рівняння $2x+y+6=0$. Це площина, паралельна осі Oz, оскільки вектор $\bar{n}=\{2,1,0\}$ перпендикулярний осі Oz. Отже, площина перетинає осі Ox і Oy. Знайдемо ці точки перетину. Покладемо $y=z=0$, тоді $x=-3$, тобто $M_1=(-3,0,0)$. При $z=x=0$ маємо $y=-6$, тобто $M_2=(0,-6,0)$. На рис.16б зображена частина площини $2x+y+6=0$ у IV октанті.

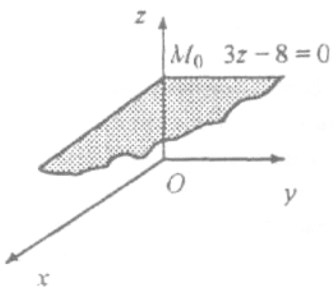
4. $C=D=0;\quad A,B\neq 0$. Рівняння $Ax+By=0$ визначає площину, яка містить вісь Oz. (вектор $\bar{n}=\{A,B,0\}$ перпендикулярний осі Oz і площина проходить через початок координат).

$A=D=0;\quad B,C\neq 0$. $By+Cz=0$ визначає площину, яка містить вісь Ox;

$B=D=0;\quad A,C\neq 0\quad Ax+Cz+D=0$ визначає площину, яка містить вісь Oy.



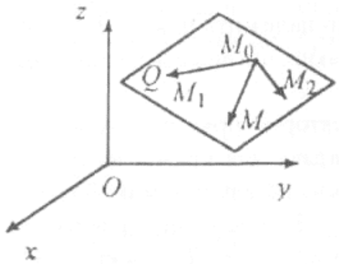
Наприклад, нехай задано рівняння $5y+2z=0$. Це площина, яка містить вісь Ox. Отже, перетинає площину yOz, тобто площину $x=0$, по прямій $5y+2z=0$. На рис.16в зображена частина площини $5y+2z=0$ у V октанті.



5. $B=C=0;\quad A,C\neq 0$. Рівняння $Ax+D=0$, або $x=-D/A=a$ визначає площину , паралельну площині yOz (вектор $\bar{n}=\{A,0,0\}$ перпендикулярний осям Oy і Oz);
$A=C=0;\quad B,D\neq 0$. Рівняння $By+D=0$, або $y=-D/B=b$ визначає площину, паралельну площині xOz (вектор $\bar{n}=\{0,B,0\}$ перпендикулярний осям Ox і Oz).
$A=B=0;\quad C,D\neq 0$. Рівняння $Cz+D=0$, або $z=-D/C=c$ визначає площину, паралельну площині xOy (вектор $\bar{n}=\{0,0,C\}$ перпендикулярний осям Ox і Oy).
Наприклад, нехай задано рівняння $3z-8=0$. Це рівняння визначає площину, паралельну площині xOy. Із рівняння $3z-8=0$ дістаємо $z=8/3$, тобто площина перетинає вісь Oz у точці $M_0(0,0,8/3)$. На рис. 16г зображена частина площини у I октанті.

6. $A=B=D=0;\quad C\neq 0$. Рівняння $Cz=0$, $z=0$ визначає площину xOz.
$B=C=D=0;\quad A\neq 0$. Рівняння $Ax=0$, $x=0$ визначає площину yOz.
$A=C=D=0;\quad B\neq 0$. Рівняння $By=0$, або $y=0$ визначає площину xOz.

3.5. Рівняння площини, що проходить через три задані точки.



Нехай задано три точки: $M_0(x_0,y_0,z_0)$, $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, що належать площині Q і не лежать на одній прямій. Скласти рівняння площини Q.

Виберемо на площині Q будь-яку (біжучу) точку $M(x, y, z)$ (рис.17) і проведемо вектори $\overline{M_0M}$, $\overline{M_0M_1}$, $\overline{M_0M_2}$. Ці вектори будуть компланарними тоді і тільки тоді, коли $M(x, y, z)$ лежить у площині Q. З іншої сторони, згідно з умовою компланарності, мішаний добуток цих векторів дорівнює нулю, тобто $(\overline{M_0M}, \overline{M_0M_1}, \overline{M_0M_2})$ = 0. Запишемо вектори $\overline{M_0M}$, $\overline{M_0M_1}$, $\overline{M_0M_2}$ в координатній формі:

$$\overline{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}, \qquad \overline{M_0M_1} = \{x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0\},$$
$$\overline{M_0M_2} = \{x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0\}.$$

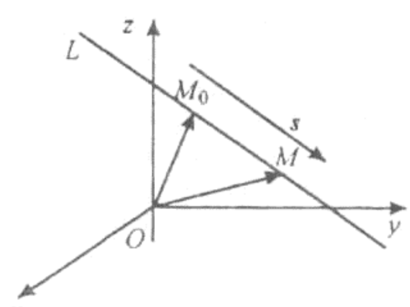
Тоді мішаний добуток цих векторів у координатній формі може бути записаний як визначник 3-го порядку, рядки якого — координати цих векторів. Звідси одержуємо:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.7)$$

– рівняння площини, що проходить через три точки.

Зауважимо, що розкладаючи цей визначник за елементами першого рядка, одержимо рівняння площини вигляду (3.4). Спрощуючи його, одержимо рівняння площини вигляду (3.5).

3.6.Канонічні рівняння прямої в просторі. Рівняння прямої із заданим напрямним вектором.



Нехай задана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, що лежить на прямій L і вектор $\bar{s} = \{l, m, p\}$, паралельний прямій L (або такий, що лежить на цій прямій (рис.18). Скласти рівняння прямої L.

Вектор $\bar{s}$ називається напрямним вектором прямої L. Аналогічна задача для прямої на площині була розглянута у п.2.5. Візьмемо на L довільну точку $M(x, y, z)$. Тоді вектори $\overline{M_0M}$ і $\bar{s}$ будуть колінеарними, причому тоді і тільки тоді, коли точка M належіть прямій L. З умови колінеарності векторів, відповідні координати векторів $\overline{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ і $\bar{s} = \{l, m, p\}$ пропорційні. Звідси одержуємо співввідношення:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{p} \tag{3.8}$$

яке називається **канонічними рівняннями прямої у просторі**, або рівнянням прямої в просторі, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ з напрямним вектором $\bar{s} = \{l, m, p\}$.

Зауваження. Три рівних відношення формули представляють систему двох рівнянь, наприклад,

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \qquad \frac{x - x_0}{l} = \frac{z - z_0}{p}$$

Кожне з цих рівнянь є рівнянням площини, але не загального положення, а паралельної координатній осі, відповідно Oz і Oy. Такі площини називаються проектуючими площинами. Отже, канонічні рівняння (3.8) зображають пряму у просторі як лінію перетину двох проектуючих площин. Зокрема, якщо в (3.8) одне з чисел l, m, p є нуль, наприклад, $l = 0$, то це означає, що вектор $\bar{s} = \{0, m, p\}$ і пряма перпендикулярні до осі Ox. Із (3.8) дістаємо систему $x - x_0 = 0, \quad \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{p}$. Якщо ж, наприклад, $l = m = 0$, то вектор $\bar{s} = \{0, 0, p\}$ і пряма перпендикулярні до площини xOy (чи паралельні осі Oz), і з рівняння (3.8) дістаємо рівняння цієї прямої:

$$\begin{cases} x - x_0 = 0, \\ y - y_0 = 0. \end{cases}$$

3.7. Параметричні рівняння прямої.. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

У формулі (3.8) позначимо рівні відношення через параметр t. Тоді дістанемо:

$$\frac{x - x_0}{l} = t, \qquad \frac{y - y_0}{m} = t, \qquad \frac{z - z_0}{p} = t$$

або

$$x = x_0 + lt, \qquad y = y_0 + mt, \qquad z = z_0 + pt\,, \quad (-\infty < t < +\infty) \qquad (3.9)$$

Оскільки хоча б один із знаменників у (3.8) відмінний від нуля, а відповідний чисельник може приймати будь-які значення, то параметр t може змінюватись в межах від $-\infty$ до $+\infty$.

Рівняння (3.9) називається **параметричним рівнянням прямої у просторі**. При зміні параметра t в межах від $-\infty$ до $+\infty$ біжуча точка $M(x, y, z)$ пробігає пряму лінію.

Нехай задані дві точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і $M_1(x_1, y_1, z_1)$, що належать прямій L. Тоді рівняння прямої L мають вигляд:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \qquad (3.10)$$

Рівняння (3.10) абсолютно аналогічні рівнянням (2.10).

ЛЕКЦІЯ №4

Взаємне розташування площин, прямих та площин і прямих у просторі.

4.1. Умови паралельності, перпендикулярності площин і прямих у просторі. Кути між площинами, між прямими, між площиною і прямою в просторі.

Як випливає з попередніх пунктів, напрями площин і прямих у просторі задаються за допомогою векторів: із площиною пов'язаний нормальний вектор $\overline{n} = \{A, B, C\}$, а з прямою в просторі – напрямний вектор $\overline{s} = \{l, m, p\}$. Тому визначення паралельності і перпендикулярності площин і прямих, а також кутів між площинами, прямими та площинами і прямими зводиться до визначення відповідних положень векторів.

У наступній таблиці наведені відповідні очевидні співвідношення. Розглянемо деякі задачі, пов'язані із умовами паралельності і перпендикулярності.

Задача 1. Дана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і площина $Ax + By + Cz + D = 0$.

Скласти рівняння:

а) площини, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ паралельно заданій площині;

б) прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно до заданої площини.

Розв'язання. а) Оскільки шукана і задана площини паралельні, то їх нормальні вектори колінеарні: $\overline{n}_1 \parallel \overline{n}_2$. Тому вважатимемо, що $\overline{n}_1 \parallel \overline{n}_2 = \{A, B, C\}$. Із формули (3.4) дістаємо:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Рівняння площини, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і паралельна площині $Ax + By + Cz + D = 0$.

б) Оскільки шукана пряма і задана площини перпендикулярні, то напрямний вектор $\bar{s}$ прямої колінеарний нормальному вектору $\bar{n}$ площини: $\bar{s} \parallel \bar{n}$ і можна вважати, що $\bar{s} = \bar{n} = \{A, B, C\}$. Згідно з формулою (3.8) одержуємо:

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}$$

– рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і перпендикулярна до площині $Ax + By + Cz + D = 0$

Задача 2. Задана точка $M_0'(x_0', y_0', z_0')$ і пряма $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{p}$.

Скласти рівняння:

а) прямої, що проходить через точку $M_0'(x_0', y_0', z_0')$ паралельно заданій прямій;

б) площини, що проходить через точку $M_0'(x_0', y_0', z_0')$ перпендикулярно до заданої прямої.

Розв'язання. а) Оскільки шукана і задана пряма паралельні, можна вважати, що

$\bar{s}_1 = \bar{s}_2 = \{l, m, p\}$ і згідно з формулою (3.8) одержуємо:

$$\frac{x - x_0'}{l} = \frac{y - y_0'}{m} = \frac{z - z_0'}{p}$$

– рівняння прямої, що проходить через точку $M_0'(x_0', y_0', z_0')$ паралельно прямій $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{p}$.

б) Оскільки нормальний вектор $\bar{n}$ колінеарний напрямному вектору $\bar{s}$ прямої, тому можна вважати, що $\bar{n} = \bar{s} = \{l, m, p\}$ і згідно з формулою (3.4) одержуємо

$$l(x - x_0') + m(y - y_0') + p(z - z_0') = 0$$

– рівняння площини, що проходить через точку $M_0'(x_0', y_0', z_0')$ перпендикулярно до прямої $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{p}$.

4.2.Перетин площин. Загальні рівняння прямої в просторі.

Нехай задано дві площини $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad (Q_1)$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \quad (Q_2)$. Площини Q_1 і Q_2 перетинаються тоді і тільки тоді, коли вони не паралельні, тобто $\bar{n}_1$ не $\parallel \bar{n}_2$, або не виконується співвідношення $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ (хоча б один із знаків рівності трьох співвідношень не виконується).

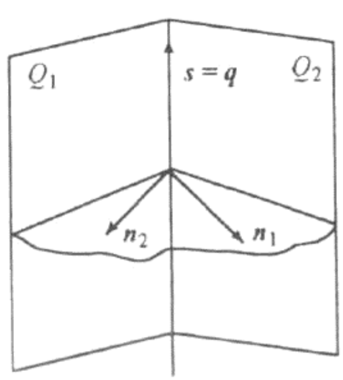
Лінією перетину площин Q_1 і Q_2 є пряма L, зображена системою рівнянь

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (4.1)$$

при умові, що не виконується умова $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Рівняння (4.1) називаються **загальними рівняннями прямої в просторі.**

Якщо $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$, то площини Q_1 і Q_2 паралельні і різні, якщо ж $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$, то площини Q_1 і Q_2 зливаються.



Розглянемо рівняння (4.1). У багатьох задачах (див. наприклад , п.4.1, задачі 1, 2) важливо знати напрямний вектор $\bar{s}$ прямої, який легко визначається із канонічних рівнянь (3.8). Знайдемо його у випадку, коли пряма задана загальними рівняннями (4.1).

У площин Q_1 і Q_2, заданих рівняннями (4.1), нам відомі нормальні вектори $\bar{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$, $\bar{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$. Очевидно, напрямний вектор $\bar{s}$ прямої L буде перпендикулярний до векторів $\bar{n}_1$ і $\bar{n}_2$ ($\bar{s} \perp \bar{n}_1$, $\bar{s} \perp \bar{n}_2$) (див.рис.19).

Із векторної алгебри відомо, що таку властивість має вектор $\bar{q}$, рівний векторному добутку векторів $\bar{n}_1$ і $\bar{n}_2$, тобто $\bar{q} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2$. Отже вектори $\bar{s}$ і $\bar{q}$ колінеарні, і можна вважати, що $\bar{s} = \bar{q} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2$,або

$$\bar{s} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \bar{i} + \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \bar{k} \qquad (4.2)$$

Зауваження. У деяких випадках потрібно записати канонічні або параметричні рівняння прямої, заданої загальними рівняннями (4.1). Тоді, крім вектора $\bar{s}$, потрібно ще знати точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, що лежить на цій прямій.

Для цього достатньо вибрати довільно одну із координат, тобто покласти, наприклад $x = x_0$, і підставити x_0 в систему (4.1). Тоді одержимо систему

$$\begin{cases} B_1 y + C_1 z = -D_1 - A_1 x_0 \\ B_2 y + C_2 z = -D_2 - A_2 x_0 \end{cases}$$

яка має єдиний розв'язок (y_0, z_0), якщо визначник $\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

Точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежатиме на прямій. Якщо ж $\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0$, то можна покласти $y = y_0$. Площини Q_1 і Q_2 не паралельні, і вже визначник $\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

Розв'язуючи відповідну систему, одержимо розв'язок (x_0, z_0) і точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Маючи точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і напрямний вектор $\bar{s}$, можна записати пряму, задану рівнянням (4.1), у вигляді (3.8) або (3.9).

Нехай задано три площини, які визначаються рівняннями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \qquad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0. \tag{4.3}$$

Вони перетинаються в одній точці тоді і тільки тоді, коли їх нормальні вектори $\bar{n}_1$, $\bar{n}_2$, $\bar{n}_3$ не компланарні, тобто не рівний нулеві визначник, складений із координат цих векторів:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0 \tag{4.4}$$

Умова (4.4), як відомо, є умовою єдиності розв'язку (4.3).

4.3. Перетин площини і прямої в просторі.

Нехай задано площину Q і пряму L рівняннями

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad \text{і} \qquad \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{p} \tag{4.5}$$

Площина і пряма в просторі перетнуться тоді і тільки тоді, коли вони не паралельні, тобто коли нормальний вектор $\overline{n} = \{A, B, C\}$ площини не перпендикулярний до напрямного вектора $\overline{s} = \{l, m, p\}$ прямої, тобто $\overline{n} \cdot \overline{s} \neq 0$, або $Al + Bm + Cp \neq 0$.

Щоб знайти точку перетину площини і прямої, потрібно розв'язати систему рівнянь (4.5). Це зручніше зробити, якщо рівняння прямої зобразити в параметричному вигляді (3.9). Тоді система (4.5) матиме вигляд

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

$$x = x_0 + lt, \qquad y = y_0 + mt, \qquad z = z_0 + pt \tag{4.6}$$

Підставляючи у перше рівняння системи (4.6) вирази для x, y, z, одержимо

$$A(x_0 + lt) + B(y_0 + mt) + C(z_0 + pt) + D = 0$$

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = -(Al + Bm + Cp)t.$$

Звідки

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cp} \qquad (Al + Bm + Cp \neq 0)$$

Підставляючи знайдене t у вирази для x, y, z (див. (4.6)), і знайдемо єдиний розв'язок системи (4.6) (або (4.5)), тобто єдину точку перетину площини і прямої у просторі.

У випадку $Al + Bm + Cp = 0$ пряма L паралельна площині Q. Якщо при цьому $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, то система (4.6) не має розв'язків, якщо ж $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, система (4.6) має нескінченну множину розв'язків – пряма L лежить в площині Q.

Звідси наступна система рівностей

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \\ Al + Bm + Cp = 0 \end{cases} \qquad (4.7)$$

є умовою того, що пряма L лежить в площині Q.

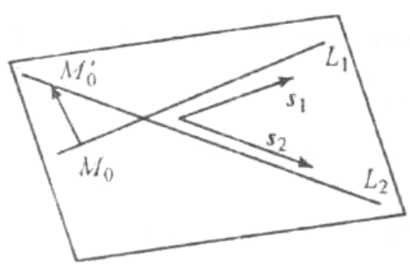
4.4. Перетин прямих.

Нехай у просторі задано дві прямі L_1 і L_2 відповідно рівняннями

$$\frac{x-x_0}{l_1} = \frac{y-y_0}{m_1} = \frac{z-z_0}{p_1} \ (L_1) \qquad \text{і} \qquad \frac{x-x_0'}{l_2} = \frac{y-y_0'}{m_2} = \frac{z-z_0'}{p_2} \ (L_2).$$

Прямі L_1 і L_2 можуть :1) перетинатися; 2) бути паралельними; 3) бути схресними.

Прямі L_1 і L_2 перетинатися, тобто розташовані в одній площині тоді і тільки тоді, коли вектори $\overline{M_0M_0'} = \{x_0' - x_0, y_0' - y_0, z_0' - z_0\}$ (точки M_0 і M_0' лежать на різних прямих) $\overline{s_1} = \{l_1, m_1, p_1\}$ і $\overline{s_2} = \{l_2, m_2, p_2\}$ компланарні (рис.20).



Але три вектори компланарні тоді і тільки тоді, коли визначник, складений із їх координат, дорівнює нулеві, тобто

$$\begin{vmatrix} x_0' - x_0 & y_0' - y_0 & z_0' - z_0 \\ l_1 & m_1 & p_1 \\ l_2 & m_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4.8)$$

Умову (4.8) задовольняють також і паралельні прямі L_1 і L_2 для яких $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{p_1}{p_2}$. Тому (4.8) є умовою перетину двох прямих в просторі, якщо елементи двох останніх рядків у визначнику не пропорційні. А взагалі, (4.8) – це умова того, прямі L_1 і L_2 розташовані на одній площині.

Прямі L_1 і L_2 схресні тоді і тільки тоді, коли умова (4.8) не виконана.

Для знаходження точки перетину двох прямих зручно зобразити їх рівняння у параметричному вигляді (3.9):

$x = x_0 + l_1 t, \qquad y = y_0 + m_1 t, \qquad z = z_0 + p_1 t$ – пряма L_1 і

$x = x_0' + l_2 t_1, \qquad y = y_0' + m_2 t_1, \qquad z = z_0' + p_2 t_1$ – пряма L_2.

Координати точок перетину повинні задовольняти координати двох рівнянь:

$$x_0 + l_1 t = x_0' + l_2 t, \qquad y_0 + m_1 t = y_0' + m_2 t, \qquad z_0 + p_1 t = z_0' + p_2 t$$

Це система трьох рівнянь з трьома невідомими t і t_1. Можна показати, що при виконанні умови (4.8) розв'язок будь-яких двох рівнянь задовольняє і третє. Отже, із системи будь-яких двох рівнянь знаходимо значення параметрів t і t_1, а потім, підставивши у параметричні рівняння однієї з прямих відповідне значення параметру (t для L_1, або t_1 для L_2), знаходимо x, y, z – координати точки перетину

4.5. Віддаль від точки до площини, до прямої та між прямими.

1.Нехай задано площину $Ax + By + Cz + D = 0$ (Q) і точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Знайдемо віддаль d від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини Q. Подібну задачу розглядали для прямої на площині в п.2.12. Міркуючи аналогічно, одержимо наступну формулу:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{4.9}$$

Отже, щоб знайти віддаль від точки до площини, заданої загальним рівнянням, потрібно у ліву частину рівняння площини замість біжучих координат підставити координати заданої точки і абсолютну величину одержаного числа поділити на модуль нормального вектора $\bar{n}$.

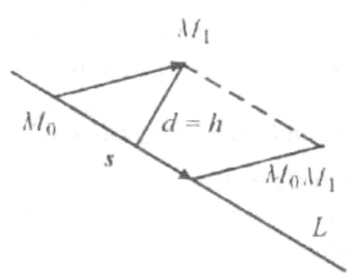
Відхиленням точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ від площини Q називається число δ, яке знаходиться за формулою

$$\delta = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \tag{4.10}$$

де знак перед радикалом вибирається протилежним знаку вільного члена D. При цьому, якщо відхилення $\delta > 0$, то точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і $O(0,0,0)$ лежать по різні сторони від площини Q; якщо $\delta > 0$ – по одну, якщо ж $\delta = 0$, то точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежить на площині Q.

За формулою (4.9) можна знайти також віддаль 1) між двома паралельними площинами Q_1 і Q_2 2) між площиною Q і паралельною їй прямою L.

А саме, щоб знайти віддаль від площини Q_1 (прямої L) до площини Q, їй паралельній, потрібно визначити будь-яку точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на площині Q_1 (на прямій L) і підставити її координати у формулу (4.9) для рівняння площини Q.



2. Нехай задана пряма $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{p}$ (L) і точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$, що не належить цій прямій. Знайти віддаль від точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямої L.

Із рівняння прямої L відома точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Виразимо вектор $\overline{M_0M_1} = \{x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0\}$ (рис. 21) і зобразимо вектор $\bar{s} = \{l, m, p\}$ так, щоб він лежав на прямій і мав початок в точці

$M_0(x_0, y_0, z_0)$. Шукана віддаль d очевидно дорівнює h – висоті паралелограма, побудованого на векторах $\overline{M_0M_1}$ і $\bar{s}$ як на сторонах і опущеної на сторону, що співпадає з $\bar{s}$. Довжина висоти паралелограма дорівнює відношенню його площі до довжини основи. Враховуючи, що площа паралелограма, побудованого на двох векторах, дорівнює модулю векторного добутку цих векторів, дістанемо

$$d = h = \frac{\left|\overline{M_0M_1} \times \bar{s}\right|}{|\bar{s}|} = \frac{\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & p \end{vmatrix}}{\sqrt{l^2 + m^2 + p^2}} \qquad (4.11)$$

Аналогічно з формулою (4.11) можна знайти віддаль між двома паралельними прямими L_1 і L_2. Для цього потрібно визначити дві точки M_0 і M_1, що лежать на різних прямих, а вектор $\bar{s}$ – їх спільний напрямний вектор.

3.Нехай задано дві схресні прямі $\frac{x - x_0}{l_1} = \frac{y - y_0}{m_1} = \frac{z - z_0}{p_1}$ (L_1) і $\frac{x - x_0'}{l_2} = \frac{y - y_0'}{m_2} = \frac{z - z_0'}{p_2}$ (L_2). Так що ці прямі не перетинаються і не паралельні, тобто у формулі (4.8) визначник не дорівнює нулеві. Цей визначник виражав мішаний добуток векторів

$\overline{M_0M_0'} = \{x_0' - x_0, y_0' - y_0, z_0' - z_0\}$, $\overline{s_1} = \{l_1, m_1, p_1\}$ і $\overline{s_2} = \{l_2, m_2, p_2\}$ і абсолютна величина його дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах як на ребрах. Уявимо, що $\overline{s_1}$ і $\overline{s_2}$ виходять із спільного початку, наприклад, із точки M_0. Тоді шукана віддаль є довжина висоти цього паралелепіпеда, опущена на паралелограм основи, утвореної векторами $\overline{s_1}$ і $\overline{s_2}$. Отже,

$$d = h = \frac{V_{\text{парал.}}}{S_{\text{осн.}}} = \frac{\left|\overline{M_0M_0'}\cdot(\overline{s_1}\times\overline{s_2})\right|}{\left|\overline{s_1}\times\overline{s_2}\right|} = \frac{\left\|\begin{matrix} x_0'-x_0 & z_0'-x_0 & z_0'-z_0 \\ l_1 & m_1 & p_1 \\ l_2 & m_2 & p_2 \end{matrix}\right\|}{\left\|\begin{matrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ l_1 & m_1 & p_1 \\ l_2 & m_2 & p_2 \end{matrix}\right\|} \qquad (4.12)$$

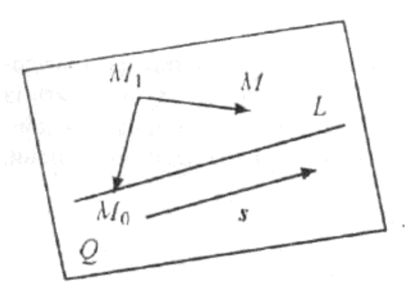
4.6.Деякі задачі на пряму і площину у просторі.

У п.4.1 вже наведено дві типові задачі. Наведемо ще декілька задач, розв'язки яких легко одержати за допомогою методів векторної алгебри.

Задача 1. Скласти рівняння площини, що містить: а) пряму $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{p}$ (L) і точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$, яка не лежить на прямій;

б) дві паралельні прямі $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{p}$ (L_1) і $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{p}$ (L_2).

Розв'язання. а) Із рівняння прямої L маємо точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і напрямний вектор $\bar{s} = \{l, m, p\}$. Вибираємо на площині Q біжучу точку $M(x, y, z)$ (рис.22) і проведемо вектори $\overline{M_1M} = \{x-x_1, y-y_1, z-z_1\}$ і $\overline{M_1M_0} = \{x_0-x_1, y_0-y_1, z_0-z_1\}$. Точка $M(x, y, z)$ належатиме площині тоді і тільки тоді, коли вектори $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_0}$ і $\bar{s}$ компланарні. Із умови компланарності векторів маємо:



$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_0-x_1 & y_0-y_1 & z_0-z_1 \\ l & m & p \end{vmatrix} = 0 \qquad (4.13)$$

Рівняння (4.13) – це рівняння площини, що містить пряму L і точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$.

б)) Із рівняння прямих L_1 і L_2 маємо точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і $M_1(x_1, y_1, z_1)$, які належать різним прямим, і напрямний вектор $\bar{s} = \{l, m, p\}$. Отже, шукане рівняння запишеться формулою (4.13).

Задача 2. Скласти рівняння площини, яка містить

а) дві прямі, що перетинаються: $\dfrac{x-x_0}{l_1} = \dfrac{y-y_0}{m_1} = \dfrac{z-z_0}{p_1}$ (L_1) і

$$\frac{x-x_1}{l_2} = \frac{y-y_1}{m_2} = \frac{z-z_1}{p_2} \quad (L_2);$$

б) пряму $\dfrac{x-x_0}{l_1} = \dfrac{y-y_0}{m_1} = \dfrac{z-z_0}{p_1}$ (L_1), яка паралельна прямій

$$\frac{x-x_1}{l_2} = \frac{y-y_1}{m_2} = \frac{z-z_1}{p_2} \quad (L_2)$$ (прямі L_1 і L_2 не паралельні).

Розв'язання. а)Згідно з умовою нам відомі напрямні вектори $\overline{s_1} = \{l_1, m_1, p_1\}$ і $\overline{s_2} = \{l_2, m_2, p_2\}$ заданих прямих і наприклад, точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, яка лежить на прямій L_1 (чи перетинаються прямі, можна перевірити за формулою (4.8)). У шуканій площині Q виберемо біжучу точку $M(x, y, z)$ і проведемо вектор $\overline{M_0M} = \{x-x_0, y-y_0, z-z_0\}$. Точка $M(x, y, z)$ належить площині Q тоді і тільки тоді, коли вектори $\overline{M_0M}$, $\overline{s_1} = \{l_1, m_1, p_1\}$, $\overline{s_2} = \{l_2, m_2, p_2\}$ будуть компланарними. Із умови компланарності одержуємо

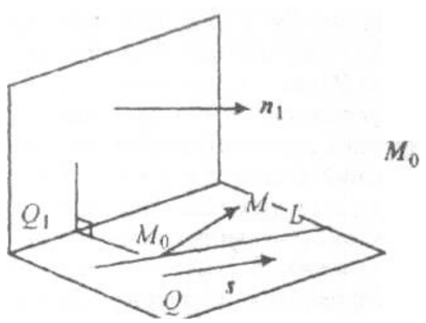
$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & p_1 \\ l_2 & m_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4.14)$$

– рівняння площини, що містить дві прямі, які перетинаються, або рівняння площини з двома напрямними векторами.

б) За умовою пряма L_1 належить площині Q, отже, відома точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і напрямний вектор прямої L_1: $\overline{s_1} = \{l_1, m_1, p_1\}$. Напрямний вектор $\overline{s_2} = \{l_2, m_2, p_2\}$ прямої L_2, як паралельний площині Q, буде компланарний з векторами $\overline{s_1} = \{l_1, m_1, p_1\}$ і $\overline{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ ($M(x, y, z)$ – біжуча точка площини), і рівняння шуканої площини буде зображатись формулою (4.14).

Задача 3. Скласти рівняння площини Q, яка містить пряму $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{p}$ (L) і перпендикулярна до площини $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad (Q_1)$.

Розв'язання. Із рівняння прямої L маємо точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і напрямний вектор $\bar{s} = \{l, m, p\}$. Із рівняння площини Q_1– нормальний вектор $\bar{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ Оскільки площина Q_1 перпендикулярна до площини Q, то вектор $\bar{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ паралельний площині Q. Виберемо на площині Q біжучу точку $M(x, y, z)$ (рис 23), яка належить площині Q тоді і тільки тоді, коли вектори $\overline{M_0M}$, $\bar{s} = \{l, m, p\}$ і $\bar{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ компланарні. Із умови компланарності векторів одержуємо



$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & p \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{vmatrix} = 0$$

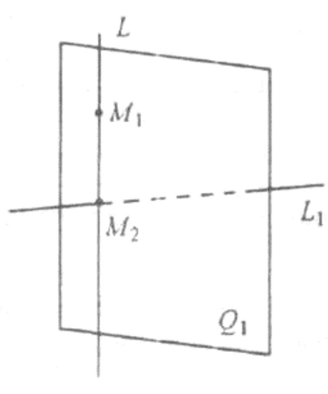
рівняння площини, яка містить задану пряму L і перпендикулярна до заданої площини Q_1.

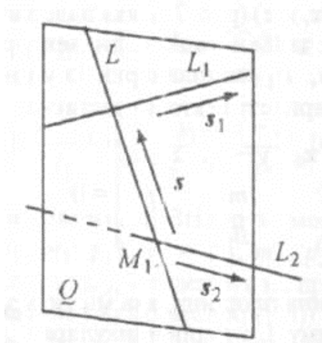
Задача 4. Скласти рівняння перпендикуляра L, опущеного з точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ на пряму $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{p}$ (L_1)

Розв'язання. Складемо рівняння площини Q_1, яка містить точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і перпендикулярна до прямої L_1 (див. задачу 2 п.4.1, рис.24). Далі знаходимо точку $M_2(x_2, y_2, z_2)$ перетину прямої L_1 з площиною Q_1. Далі складемо рівняння прямої, що проходить через дві точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$ (згідно з формулою (3.10)), яке і буде шуканим перпендикуляром L.

Задача 5. Скласти рівняння загального перпендикуляра L до двох схресних прямих $\dfrac{x-x_0}{l_1}=\dfrac{y-y_0}{m_1}=\dfrac{z-z_0}{p_1}$ (L_1) і

$$\frac{x-x_0'}{l_2}=\frac{y-y_0'}{m_2}=\frac{z-z_0'}{p_2} \quad (L_2).$$





Розв'язання. Напрямний вектор $\bar{s}=\{l, m, p\}$ шуканої прямої L має бути перпендикулярним до заданих напрямних векторів $\overline{s_1}=\{l_1, m_1, p_1\}$ і $\overline{s_2}=\{l_2, m_2, p_2\}$ ($\bar{s}\perp\overline{s_1}$, $\bar{s}\perp\overline{s_2}$) прямих L_1 і L_2. Тому можна вважати що $\bar{s}=\overline{s_1}\times\overline{s_2}$. Далі шукана пряма має перетинатися із заданими прямими L_1 і L_2. Тому складемо рівняння площини Q (рис.25), що містить L_1 і L за формулою (4.14) (для цього у прямої L достатньо знайти напрямний вектор $\bar{s}=\overline{s_1}\times\overline{s_2}$). Точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ перетину площини Q з прямою L_2 очевидно і буде точкою, що належить L. Нарешті, складаємо канонічні рівняння прямої L, що проходить через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ з напрямним вектором $\bar{s}$, згідно з формулою (3.8). Це і буде шукане рівняння загального перпендикуляра L до двох схресних прямих.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

СКЛАДАННЯ РІВНЯНЬ ПРЯМИХ НА ПЛОЩИНІ

Задача 1. Дано вершини трикутника ABC. Знайти: а) рівняння сторін та їх кутові коефіцієнти; б) кут A; в) рівняння медіани та бісектриси, проведених з вершини A; г) рівняння висоти, проведеної з вершини B; д) точку перетину медіани та висоти; д) точку перетину медіани та висоти; е) координати центра мас (точку перетину медіан).

1. A(5;-4), B(8;8), C(14;0)

2. A(7;1), B(-5;-4), C(-9;-1)

3. A(-5;6), B(7;-3), C(5;11)

4. A(-5;4), B(1;8), C(4;0)

5. A(-4;-2), B(8;-11), C(6;3)

6. A(4;-2), B(-4;4), C(-3;-1)

7. A(12;2), B(4;8), C(5;3)

8 A(11;-3), B(3;3), C(4;-2)

9. A(3;-1), B(-5;5), C(-4;0)

10 A(13;-2), B(5;4), C(6;-1)

11. A(10;-1), B(2;5), C(3;0)

12. A(9;1), B(1;7), C(2;2)

13. A(7;2), B(-1;8), C(0;3)

14. A(4;9), B(16;0), C(14;14)

15. A(-2;6), B(10;1), C(16;9)

16. A(-8;5), B(4;4), C(2;10)

17. A(-3;-2), B(0;10), C(6;2)

18. A(4;-4), B(7;16), C(13;8)

19. A(1;1), B(4;13), C(10;5)

20. A(5;-4), B(1;8), C(4;0)

21. A(-3;1), B(9;-8), C(7;6)

22. A(5;-4), B(8;8), C(14;0)

23. A(-1;3), B(11;-6), C(9;8)

24. A(-1;2), B(2;14), C(9;6)

25. A(0;-1), B(12;-10), C(10;4) **26. A(3;-3), B(6;9), C(12;1)**

27. A(2;4), B(14;-5), C(12;9) **28. A(2;-1), B(5;11), C(11;3)**

29. A(3;0), B(15;-9), C(13;5) **30. A(-2;0), B(1;12), C(7;6)**

СКЛАДАННЯ РІВНЯНЬ ПЛОЩИН

Задача 2. Скласти рівняння площини, що проходить через дві паралельні прямі

1. $\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-1}{1}$; $\begin{cases} x=2t-3 \\ y=-2t+2 \\ z=t-1 \end{cases}$.

2. $\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{2}$; $\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{2}$.

3. $\begin{cases} x=t-3 \\ y=2t+2 \\ z=3t-1 \end{cases}$; $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{3}$.

4. $\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-1}{3}$; $\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+3}{3}$.

5. $\frac{x-3}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+1}{1}$; $\begin{cases} x=t-3 \\ y=-2t+2 \\ z=t+1 \end{cases}$.

6. $\frac{x+2}{-2}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-1}{1}$; $\frac{x+1}{-2}=\frac{y}{-2}=\frac{z+2}{1}$.

7. $\begin{cases} x=2t-4 \\ y=-2t+2 \\ z=-t-1 \end{cases}$; $\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-2}{-1}$.

8. $\frac{x-2}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z-1}{1}$; $\frac{x}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{1}$.

9. $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z}{3}$; $\begin{cases} x=t-3 \\ y=-2t+2 \\ z=3t-5 \end{cases}$.

10. $\frac{x+2}{2}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-1}{1}$; $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{1}$.

11. $\begin{cases} x=2t-5 \\ y=-3t+1 \\ z=t-1 \end{cases}$; $\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+1}{1}$.

12. $\frac{x}{3}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-1}{1}$; $\frac{x-3}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{1}$.

13. $\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z-1}{1}$; $\begin{cases} x=2t-1 \\ y=-3t+2 \\ z=t-4 \end{cases}$.

14. $\frac{x-3}{2}=\frac{y+4}{2}=\frac{z+1}{-1}$; $\frac{x+4}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1}$.

15. $\begin{cases} x=2t-3 \\ y=-2t+4 \\ z=-t-5 \end{cases}$; $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+3}{-1}$.

16. $\frac{x-4}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-2}{1}$; $\frac{x+3}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{1}$.

17. $\frac{x-2}{-2}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-1}{3}$; $\begin{cases} x=-2t-4 \\ y=-2t+2 \\ z=3t-1 \end{cases}$.

18. $\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{0}=\frac{z-1}{1}$; $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+1}{1}$.

19. $\begin{cases} x = -3 \\ y = -2t + 2 \\ z = t - 1 \end{cases}$; $\qquad \dfrac{x}{0} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z+4}{1}$.

20. $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y+3}{-3} = \dfrac{z-1}{0}$; $\qquad \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+1}{1}$.

21. $\dfrac{x-4}{0} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-1}{3}$; $\qquad \begin{cases} x = 2 \\ y = 2t + 3 \\ z = 3t - 1 \end{cases}$.

22. $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-5}{3}$; $\qquad \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-4}{3}$.

23. $\begin{cases} x = -3 \\ y = -2t \\ z = t - 1 \end{cases}$; $\qquad \dfrac{x}{0} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+2}{1}$.

24. $\dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y+3}{-3} = \dfrac{z-1}{4}$; $\qquad \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z+5}{4}$.

25. $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+5}{2} = \dfrac{z+1}{1}$; $\qquad \begin{cases} x = t - 2 \\ y = 2t + 4 \\ z = t - 3 \end{cases}$.

26. $\dfrac{x-2}{0} = \dfrac{y+4}{-2} = \dfrac{z-3}{-1}$; $\qquad \dfrac{x+5}{0} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-1}{-1}$.

27. $\begin{cases} x = -2t - 6 \\ y = -3t + 2 \\ z = 4t - 1 \end{cases}$; $\qquad \dfrac{x-4}{-2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z+6}{4}$.

28. $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y+3}{-4} = \dfrac{z-1}{1}$; $\qquad \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y}{-4} = \dfrac{z+4}{1}$.

29. $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-3}{0}=\dfrac{z+4}{3}$; $\qquad \begin{cases} x=2t-4 \\ y=-2 \\ z=3t-1 \end{cases}$.

30. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-1}{0}$; $\qquad \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z+4}{0}$.

Задача 3. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму перпендикулярно площині.

1. $\begin{cases} x=4t-3 \\ y=-2t+2 \\ z=3t-6 \end{cases}$; $\qquad 2y-3z+6=0$.

2. $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$; $\qquad x+3y-2z+4=0$.

3. $\begin{cases} x=3t+3 \\ y=t+2 \\ z=-2t-1 \end{cases}$; $\qquad 2x+y-3z=0$.

4. $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z-1}{3}$; $\qquad x-2y-z+1=0$.

5. $\begin{cases} x=4t-3 \\ y=2t+2 \\ z=-3t-5 \end{cases}$; $\qquad 3x+2y-4z=0$.

6. $\dfrac{x+2}{-2}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$; $\qquad y-3z+2=0$.

7. $\begin{cases} x=2t+4 \\ y=-2t+5 \\ z=3t-2 \end{cases}$; $\qquad x+2y=0$.

8. $\frac{x-2}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z-1}{1}$; $5x+2y-3=0$.

9. $\begin{cases} x=3t+2 \\ y=-2t+3 \\ z=t-4 \end{cases}$; $2x+y-3z+5=0$.

10. $\frac{x+2}{2}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-1}{1}$; $x+2y-z-1=0$.

11. $\begin{cases} x=4t-3 \\ y=2t+2 \\ z=3t-4 \end{cases}$; $3x+2y-z-4=0$.

12. $\frac{x}{3}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-1}{1}$; $2x+3z-6=0$.

13. $\begin{cases} x=2t+3 \\ y=-t+2 \\ z=t-1 \end{cases}$; $x-2y-3z=0$.

14. $\frac{x-3}{2}=\frac{y+4}{2}=\frac{z+1}{-1}$; $4x+2y-3z+5=0$.

15. $\begin{cases} x=3t+3 \\ y=-2t+2 \\ z=4t-1 \end{cases}$; $x+y-z+1=0$.

16. $\frac{x-4}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-2}{1}$; $x+2y=0$.

17. $\begin{cases} x=t+5 \\ y=-2t-2 \\ z=3t-4 \end{cases}$; $y-3z+1=0$.

18. $\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{0}=\frac{z-1}{1}$; $2y-3z=0$.

19. $\begin{cases} x = 3t + 3 \\ y = -2t + 2 \\ z = t - 1 \end{cases}$; $\qquad 2x + y - 3z + 4 = 0$.

20. $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y+3}{-3} = \dfrac{z-1}{0}$; $\qquad x + 2y - 3z = 0$.

21. $\begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = -2t + 2 \\ z = 3t - 4 \end{cases}$; $\qquad x + 2y + 1 = 0$.

22. $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-5}{3}$; $\qquad x + 2y - 4z - 5 = 0$.

23. $\begin{cases} x = -t - 3 \\ y = 2t + 2 \\ z = 3t - 5 \end{cases}$; $\qquad y - 3z + 5 = 0$.

24. $\dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y+3}{-3} = \dfrac{z-1}{4}$; $\qquad x + 2y - z + 3 = 0$.

25. $\begin{cases} x = t + 5 \\ y = -2t - 2 \\ z = 2t - 1 \end{cases}$; $\qquad x + 2y - 3 = 0$.

26. $\dfrac{x-2}{0} = \dfrac{y+4}{-2} = \dfrac{z-3}{-1}$; $\qquad 2y - 3z + 4 = 0$.

27. $\begin{cases} x = 3t + 4 \\ y = 2t + 2 \\ z = -t - 1 \end{cases}$; $\qquad x + 2y - 3z = 0$.

28. $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y+3}{-4} = \dfrac{z-1}{1}$; $\qquad x - 2y + 3z - 1 = 0$.

29. $\begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = -2t + 2 \\ z = 3t - 1 \end{cases}$; $\qquad 2x - y - 3z + 4 = 0$.

30. $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z-1}{0}$; $\qquad -x + 2y - 3z + 10 = 0$.

ЗНАХОДЖЕННЯ ТОЧОК, СИМЕТРИЧНИХ ВІДНОСНО ПРЯМОЇ АБО ПЛОЩИНИ

Задача 4. Знайти точку M_1, симетричну точці M відносно прямої.

1. $M(1,2,3)$ $\qquad \dfrac{x-0{,}5}{0} = \dfrac{y+1{,}5}{-1} = \dfrac{z-1{,}5}{1}$

2. $M(-2,-3,0)$ $\qquad \dfrac{x+0{,}5}{1} = \dfrac{y+1{,}5}{0} = \dfrac{z-0{,}5}{1}$

3. $M(3,-3,1)$ $\qquad \dfrac{x-6}{5} = \dfrac{y-3{,}5}{4} = \dfrac{z+0{,}5}{0}$

4. $M(0,-3,-2)$ $\qquad \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1{,}5}{-1} = \dfrac{z}{1}$

5. $M(0,2,1)$ $\qquad \dfrac{x-1{,}5}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-2}{1}$

6. $M(2,1,0)$ $\qquad \dfrac{x-2}{0} = \dfrac{y+1{,}5}{-1} = \dfrac{z+0{,}5}{1}$

7. $M(1,0,1)$ $\qquad \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-1{,}5}{0} = \dfrac{z-2}{1}$

8. $M(2,-1,1)$ $\qquad \dfrac{x-4{,}5}{1} = \dfrac{y+3}{-0{,}5} = \dfrac{z-2}{1}$

9. $M(1,1,1)$ $\qquad \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1{,}5}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$

10. $M(1,0,-1)$ $\qquad \dfrac{x-3{,}5}{2} = \dfrac{y-1{,}5}{2} = \dfrac{z}{0}$

11. $M(-1,0,1)$ $\qquad \dfrac{x+0,5}{0}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z-4}{2}$

12. $M(3,3,3)$ $\qquad \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1,5}{0}=\dfrac{z-3}{1}$

13. $M(0,-3,-2)$ $\qquad \dfrac{x-0,5}{0}=\dfrac{y+1,5}{-1}=\dfrac{z-1,5}{1}$

14. $M(2,-2,-3)$ $\qquad \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+0,5}{0}=\dfrac{z+1,5}{1}$

15. $M(-1,2,0)$ $\qquad \dfrac{x+0,5}{1}=\dfrac{y+0,7}{-0,2}=\dfrac{z-2}{2}$

16. $M(3,2,1)$ $\qquad \dfrac{z-1,5}{1}=\dfrac{y+1,5}{-1}=\dfrac{x-0,5}{0}$

17. $M(0,-3,-2)$ $\qquad \dfrac{x-0,5}{1}=\dfrac{y+1,5}{0}=\dfrac{z+0,5}{1}$

18. $M(1,-3,3)$ $\qquad \dfrac{x+0,5}{0}=\dfrac{y-3,5}{4}=\dfrac{z-6}{5}$

19. $M(-2,-3,0)$ $\qquad \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1,5}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$

20. $M(1,2,0)$ $\qquad \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1,5}{2}$

21. $M(0,1,2)$ $\qquad \dfrac{x+0,5}{1}=\dfrac{y+1,5}{-1}=\dfrac{z-2}{0}$

22. $M(1,0,1)$ $\qquad \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1,5}{0}=\dfrac{z}{-1}$

23. $M(1,-1,2)$ $\qquad \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{-0,5}=\dfrac{z-4,5}{1}$

24. $M(1,1,1)$ $\qquad \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1,5}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$

25. $M(-1,0,1)$ $\qquad \dfrac{x}{0}=\dfrac{y-1,5}{2}=\dfrac{z-3,5}{2}$

26. $M(1,0,-1)$ $\frac{x-4}{2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+0,5}{0}$

27. $M(3,3,3)$ $\frac{z-3}{1}=\frac{y-1,5}{0}=\frac{x-1}{-1}$

28. $M(-2,-3,0)$ $\frac{x-1,5}{1}=\frac{y+1,5}{-1}=\frac{z-0,5}{0}$

29. $M(-3,-2,2)$ $\frac{x+1,5}{1}=\frac{y+0,5}{0}=\frac{z-1}{-1}$

30. $M(0,2,-1)$ $\frac{x-2}{2}=\frac{y+0,7}{-0,2}=\frac{z+0,5}{1}$

Задача 5. Знайти точку M_1, симетричну точці M відносно площини

1. $M(2,-1,1)$ $x-y+2z-2=0$

2. $M(-1,0,1)$ $2x+4y-3=0$

3. $M(1,1,1)$ $x+4y-3z-5=0$

4. $M(1,0,1)$ $4x+6y+4z-25=0$

5. $M(-1,0,2)$ $2x+6y-2z+11=0$

6. $M(0,2,1)$ $2x+4y-3=0$

7. $M(3,-3,1)$ $2x-4y-4z-13=0$

8. $M(2,1,0)$ $y+z+2=0$

9. $M(-1,2,0)$ $4x-5y-z-7=0$

10. $M(1,2,3)$ $2x+10y+10z-1=0$

11. $M(-2,0,3)$ $2x-2y-10z-1=0$

12. $M(0,-3,-2)$ $2x-20y+10z+1=0$

13. $M(1,0,-1)$ $2y+4z-1=0$

14. $M(3,3,3)$ $8x+6y+8z-25=0$

15. $M(2,-2,-3)$ $y+z+2=0$

16. $M(1,-1,2)$ $2x-y+z-2=0$

17. $M(1,0,-1)$ $4y+2z-3=0$

18. $M(1,1,1)$ $4x + y - 3z - 5 = 0$

19. $M(0,1,1)$ $6x + 4y + 4z - 25 = 0$

20. $M(0,-1,2)$ $6x + 2y - 2z + 11 = 0$

21. $M(2,0,1)$ $4x + 2y - 3 = 0$

22. $M(-3,3,1)$ $-4x + 2y - 4z - 13 = 0$

23. $M(1,2,0)$ $x + z + 2 = 0$

24. $M(-1,0,2)$ $4x - y - 5z - 7 = 0$

25. $M(3,2,1)$ $10x + 10y + 2z - 1 = 0$

26. $M(0,-2,3)$ $-2x + 2y - 10z - 1 = 0$

27. $M(-2,-3,0)$ $10x - 20y + 2z + 1 = 0$

28. $M(1,-1,0)$ $4y + 2z - 1 = 0$

29. $M(3,3,3)$ $8x + 8y + 6z - 25 = 0$

30. $M(-2,2,-3)$ $x + z + 2 = 0$

Список рекомендованої літератури

1. Бугров Я.С., Никольський С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Наука, 1988.
2. Мышкис А.Д. Лекции по высшей матетатике. – М.: Наука, 1967.
3. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К.: А.С.К., 2001.
4. Гантмахер Р.Р. Теория матриц. – 4-е изд. М.: Наука, 1988.
5. Сулима І.М., Ковтун І.І., Радчик І.А. Вища математика. Частина перша. Лінійна та векторна алгебра. Аналітична геометрія. – К.: Видавничий центр НАУ, 2002.
6. Гусак А.А., Гусак Г.М. Справочник по высшей математике. – Минск: Наука и техника, 1991.

Зміст