Лекція №9. Криві другого порядку. Еліпс

1. Канонічне рівняння еліпса

Загальне рівняння другого степеня з двома змінними x та y має вигляд:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

де хоча б один із старших коефіцієнтів A, B, C не дорівнює нулеві.

Лінії на площині, рівняння яких у вибраній декартовій системі координат мають вигляд вищевказаного рівняння, називаються кривими другого порядку. Такими кривими є: коло, еліпс, гіпербола і парабола.

Означення. **Еліпсом** називається геометричне місце точок площини, для кожної із яких сума віддалей до двох заданих точок, що називаються **фокусами,** є величина стала.

Якщо позначити через F_1 і F_2 точки, що є фокусами еліпса, а через M — будь-яку точку, що належить еліпсу, то еліпс характеризується тим,

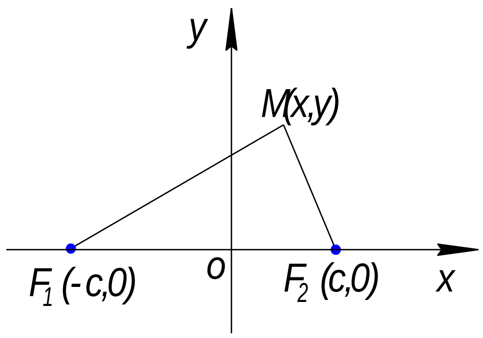

Рис 1

що

$$|MF_1| + |MF_2| = \text{const}.$$

Введемо декартову систему координат так, щоб фокуси F_1 ,F_2 були розташовані на осі $Ox,$ симетрично відносно початку координат (рис. 1). І нехай $M(x, y)$ — будь-яка (біжуча) точка, що належить еліпсу. Віддаль $|F_1F_2|$ позначимо через $2c$: $|F_1F_2| = 2c,$ а через $2a$ — сталу, про яку йде мова в означенні, тобто

$|MF_1| + |MF_2| = 2a$

Очевидно, що для існування еліпса повинно бути *2a > 2c,* або *a>c*. Фокуси еліпса матимуть координати $F_1(-c,\ 0)$, $F_2(c,\ 0)$. Віддалі між двома точками дорівнюють

$$|MF_1| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$
$$|MF_2| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

Тоді

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \qquad (1)$$

Рівняння (1) фактично є рівнянням еліпса. Але надамо йому більш компактного вигляду. Для цього зробимо звичні при ірраціональних рівняннях перетворення. Залишимо ліворуч один радикал:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

і піднесемо обидві частини одержаного рівняння до квадрата:

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2.$$

Дістанемо

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2,$$
$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4xc,$$
$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc.$$

Знову піднесемо обидві частини одержаного рівняння до квадрата і зробимо відповідні перетворення

$$a^2((x-c)^2 + y^2) = (a^2 - xc)^2,$$
$$a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2, \qquad (2)$$
$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

За умовою *a> c,* так що $a^2 - c^2 > 0$ і можна позначити $a^2 - c^2 = b^2$ (геометричний зміст числа *b* подамо далі). Рівняння (2) набуває вигляду

$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Поділимо обидві частини цієї рівності на a^2b^2 і дістанемо рівняння

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad \text{де } b^2=a^2-c^2 \qquad (3)$$

яке називається **канонічним рівнянням еліпса.**

Можна показати, що рівняння (1) та (3) еквівалентні. Очевидно, що рівняння (3) є наслідком рівняння (1), тому що координати *(x, y),* які задовольняють рівняння (1), задовольнятимуть і (3). Але зроблені перетворення (піднесення до квадрата обох частин рівняння) не є тотожними, і потрібно переконатися, що рівняння (3) не задовольняють «зайві» координати, тобто координати точок, що не підходять під означення еліпса. Це зробимо пізніше.

Рівняння (3) є рівнянням другого степеня, і еліпс є кривою другого порядку.

2. *Дослідження канонічного рівняння еліпса*

Дослідимо рівняння (3) і подамо деякі властивості еліпса, а також геометричний вигляд кривої.

1. Знайдемо розташування кривої відносно координатних осей. Із (3) дістаємо

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}, \ \text{звідки } |x|\le \ \text{ або } \ x\in[-a,a];$$

$$x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}, \ \text{звідки } |y|\le b \ \text{ або } \ y\in[-b,b].$$

2.Еліпс розташований симетрично відносно координатних осей, тобто, якщо координати точки $M_1(x,y)$ задовольняють рівняння (3), то його задовольняють і координати точок $M_2(-x, y)$, $M_3(-x, -y)$,
$M_4(x, -y)$. Отже, еліпс має дві осі симетрії, розташовані на координатних осях. Точка перетину осей симетрії є центром симетрії і називається **центром еліпса.** Для еліпса, зображеного рівнянням (3), центром є початок координат $O(0, 0)$.

1. Знайдемо точки перетину еліпса з координатними осями. Із (3) дістанемо: якщо $x = 0$, *то* $y =\pm b$, якщо $y = 0$, то $x =\pm a$. Отже, еліпс перети-

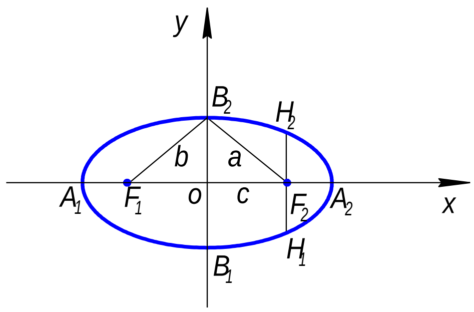

Рис 2

нає вісь Ox в точках $A_1(—a,\ 0)$, $A_2\ (a,\ 0)$, а вісь Oy в точках $B_1\ (0,\ —b)$, $B_2(0,\ b)$. Точки A_1, A_2, B_1, B_2 перетину еліпса з його осями симетрії називаються **вершинами** еліпса (рис. 2). Відрізки A_1A_2 і B_1B розташовані на осях симетрії. Вони називаються **осями** еліпса. Відрізок A_1A_2, довжина якого $2a$ — **велика вісь,** а B_1B_2 — довжина якого $2b$ — **мала вісь** $(a> b)$. Відповідно числа a та b називаються великою і малою півосями еліпса. Відрізок між фокусами F_lF_2, довжина якого $2c$, називається **фокальною віссю,** тобто c — **фокальна піввісь.** При цьому числа a, b, c пов'язані співвідношенням $a^2 = b^2 + c^2$, що очевидно проілюстровано на рис. 2 в AOB_2F_2.

Виходячи із попереднього дослідження, можна побудувати криву-еліпс (рис. 2).

Зауважимо, що зокрема, коли $a = b$, то рівняння (3) набуває вигляду $x^2 + y^2 = a^2$. Це рівняння кола із радіусом $R = a$ та центром у початку координат.

3.Фокальна хорда еліпса

Фокальною хордою еліпса називається хорда, що проходить через фокус перпендикулярно до його великої осі. Довжина фокальної хорди позначається через $2p$. Знайдемо число p — фокальну півхорду. Якщо H_1H_2 (рис. 2) фокальна хорда, то точки H_1 і H_2 лежать на еліпсі і їх координати задовольняють рівняння (3). Тому для точки H_2 (с, p) маємо

$$\frac{c^2}{a^2}+\frac{p^2}{b^2}=1, \quad \text{тобто} \quad p^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-c^2)=\frac{b^4}{a^2}.$$

Отже, дістаємо

$$p=\frac{b^2}{a}.$$

Числа a, b,c,p є параметрами еліпса.

4.Ексентриситет еліпса

Ексцентриситетом еліпса називається число ε, що дорівнює відношенню фокальної півосі до великої півосі еліпса, і

$$0\angle\varepsilon=\frac{c}{a}\angle 1, \qquad (4)$$

оскільки $c<a$.

Величина ексцентриситета характеризує форму еліпса, його витягнутість по відношенню до осей. Перетворимо (4). Маємо

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$$

Звідси випливає, що якщо $a=b$, то ε = 0, і еліпс перетворюється на коло. Якщо b значно менше, ніж a, то число ε близьке до 1 і еліпс витягнутий вздовж осі Ox.

6. Покажемо, що, якщо координати точки $M(x, y)$ задовольняють рівняння (3), то вони задовольняють і рівняння (1). Із (3) маємо

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \quad i \quad M\left(x,\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)$$

Тоді

$$|MF_2|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\sqrt{(x-c)^2+\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)}=$$

$$=\sqrt{x^2-2xc+c^2+b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2}=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2-2xc+a^2}=$$

$$=\sqrt{a^2-2xc+\frac{c^2}{a^2}x^2}=\sqrt{\left(a-\frac{c}{a}x\right)^2}=\sqrt{(a-\varepsilon x)^2}.$$

Оскільки ε < 1 і $|x|\le a$, то $\varepsilon x<a$ і $a-\varepsilon x>0$. Тому $|MF_2|=a-\varepsilon x$.

Остання рівність є умовою того, що точка $M(x,y)$ належить еліпсу.

Аналогічно дістаємо, що $|MF_1|=a+\varepsilon x$.

Тоді

$$|MF_1|+|MF_2|=2a.$$

Отже, рівняння (1) і (3) еквівалентні.

Величини

$$r\,i=a+\varepsilon x, \quad r_2=a-\varepsilon x,$$

що є віддалями від точки *M(x, y)* еліпса до відповідно лівого і правого фокусів, називаються **фокальними радіусами** точки *M(x,y)*.

Директрисами еліпса називаються дві прямі, перпендикулярні до великої осі еліпса і розташовані симетрично відносно його центра на віддалі $\frac{a}{\varepsilon}$ від нього.

Так, якщо еліпс задано канонічним рівнянням, то його директрисами є прямі

$$x = -\frac{a}{\varepsilon} \quad \text{(ліва)}, \qquad x = \frac{a}{\varepsilon} \quad \text{(права)}.$$

Для еліпса $\varepsilon < 1$, отже, $\frac{a}{\varepsilon} > a$, і директриси розташовані зовні еліпса (рис. 3).

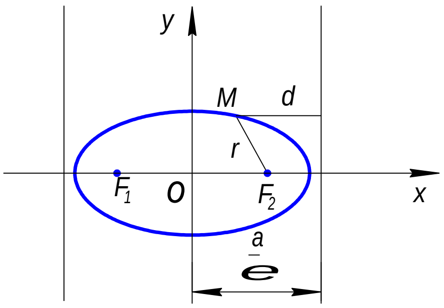

Рис.3.

Загальна властивість кривих другого порядку

Для будь-якої точки *M* кривої другого порядку відношення її фокального радіуса *r* до віддалі *d* від точки *M* до відповідної директриси є величина стала, що дорівнює ексцентриситету кривої

$$\frac{r}{d} = \varepsilon$$

(під відповідністю розуміємо, що правому фокусу відповідає права директриса, а лівому — ліва).

Аналогічну формулу дістаємо і для лівого фокуса і лівої директриси.

[Повернутися до змісту]