Практична робота 17-18

Тема: Криві другого порядку. Коло. Еліпс.

Мета: Ознайомити студентів з рівняннями кривих другого порядку, навчити їх розв’язанню базових задач на коло та еліпс.

План практичних занять

1. Криві другого порядку. Коло. Еліпс.
2. Дослідження загального рівняння кривої другого порядку.

Термінологічний словник ключових понять

Канонічне рівняння— найпростіше рівняння кривої другого порядку.

Ексцентриситет— відношення $\varepsilon = \frac{c}{a}$ для еліпса, гіперболи, у параболи $\varepsilon = 1$.

Загальне рівняння лінії другого порядку:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \qquad (1)$$

де коефіцієнти A, B, C, D, E, F – довільні числа, причому A, B та C не дорівнюють нулю одночасно, тобто $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Канонічне рівняння кола:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \qquad (2)$$

Тут (a, b) — координати центра кола, R — його радіус.

Канонічне рівняння еліпса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (3)$$

де

$$b^2 = a^2 - c^2.$$

Навчальні завдання

1. Записати рівняння лінії центрів двох кіл $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ і $x^2 + y^2 + 2x - 12y + 1 = 0$.

• Знайдемо спочатку координати центрів цих двох кіл, виділивши повні квадрати:

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 8y + 16 = 25, \text{ або } (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25,$$
$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 12y + 36 = 36, \text{ або } (x + 1)^2 + (y - 6)^2 = 36.$$

Отже, координати центра першого кола C_1 (3; – 4), а другого — C_2 (– 1; 6). Скориставшись рівнянням (2.16), знайдемо

$$\frac{y+4}{6+4}=\frac{x-3}{-1-3}.$$

$5x + 2y - 7 = 0$ — шукане рівняння центрів кіл.

2. Дослідити рівняння $x^2+6xy+ay^2+3x+by-4=0$ при різних значеннях параметрів a і b.

• Обчислимо визначники δ і Δ, які визначають тип кривої другого порядку:

$$\delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & a \end{vmatrix}=a-9;$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 3 & \frac{3}{2} \\ 3 & a & \frac{b}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{b}{2} & 4 \end{vmatrix}=\frac{7}{4}a-\frac{1}{4}\left(b-9\right)^2-\frac{63}{4}.$$

1) $a > 9$, маємо еліпс, при $7a-\left(b-9\right)^2-63>0$ — уявний, при $7a-\left(b-9\right)^2-63<0$ — дійсний. Якщо $a=\frac{1}{7}\left(b-9\right)^2+9$, то еліпс вироджується в уявні прямі.

2) $a = 9$. Маємо криву параболічного типу $\Delta=-\frac{1}{4}\left(b-9\right)^2$. Якщо $b\neq 9$, то ця крива — парабола; при $a = 9$, $b = 9$ рівняння параболи розпадається на пару паралельних прямих: $x+3y+4=0;\ x+3y-1=0.$

3) $a < 9$. Маємо гіперболу. Якщо $a=\frac{1}{7}\left(b-9\right)^2+9$, то гіпербола розпадається на пару прямих.

3. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо відомі його мала піввісь $b=5$ та ексцентриситет $\varepsilon=\frac{12}{13}$. Знайти відстань між фокусами еліпса.

Скористаємося формулою, що зв’язує ексцентриситет і відношення півосей:

$$\varepsilon^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-\frac{b^2}{a^2}.$$

Звідси

$$a^2=\frac{b^2}{1-\varepsilon^2},$$

тому

$$a^2=\frac{5^2}{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=\frac{25}{1-\frac{144}{169}}=\frac{169\cdot 25}{25}=169.$$

Отже, канонічне рівняння еліпса

$$\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1.$$

Оскільки $\varepsilon=\frac{c}{a}$, то $c=a\varepsilon$; $c=13\cdot\frac{12}{13}=12$ і відстань між фокусами $2c=24$.

4. Знайти новий початок координат і кут, на який треба повернути систему координат, щоб дістати канонічний вигляд кривої другого порядку: $7x^2 + 4xy + 4y^2 - 40x - 3y - 73 = 0$.

● Для знаходження координат нового центра розв’яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 7x_0 + 2y_0 = 20 \\ 2x_0 + 4y_0 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 3. \end{cases}$$

Для знаходження кута повороту системи координат скористаємось виразом (2.24)

$$\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}; \quad \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}; \quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Нові значення $a_{11}^* = \frac{23}{5}$; $a_{22}^* = \frac{7}{5}$; знайдемо δ і Δ; $\delta = 24$, $\Delta = -3864$. Скориставшись рівнянням канонічного вигляду, знайдемо рівняння кривої $\frac{23}{5}(x')^2 + \frac{7}{5}(y')^2 = 161$, або $\frac{(x')^2}{35} + \frac{(y')^2}{115} = 1$. Записано канонічне рівняння еліпса в системі координат $Ox'y'$, центр якої відносно старої системи Oxy перенесено паралельно осям у точку O'(2; 3), а далі систему з новим центром повернуто на кут $\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$.

Завдання для перевірки знань

1. Знайти центр і радіус кола $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$.

Відповідь. $a = 4$; $b = -3$; $R = 2$.

2. Записати рівняння дотичних, проведених із початку системи координат до кола $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 25 = 0$.

Відповідь. $y = 0$; $20x - 21y = 0$.

3. На еліпсі $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ знайти точку, відстань якої від правого фокуса в чотири рази більша за відстань від лівого фокуса.

Відповідь. $M_1\left(-\frac{15}{2}, \frac{3\sqrt{7}}{2}\right), M_2\left(-\frac{15}{2}, -\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)$.

4. Еліпс проходить через точку $P\left(3, \frac{12}{5}\right)$ і дотикається до прямої $4x + 5y - 25 = 0$. Записати рівняння цього еліпса і знайти координати точки дотику.

Відповідь. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, $\left(4; \frac{9}{5}\right)$; $\frac{16x^2}{225} + \frac{y^2}{16} = 1$, $\left(\frac{9}{4}, \frac{16}{5}\right)$.

5. Знайти рівняння кола, описаного навколо трикутника з вершинами A(7; 7), B(0; 8), C(– 2; 4).

Відповідь. $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$.

6. Записати рівняння кола з центром у точці (6; 7), що дотикається до прямої $5x - 12y = 24$.

Відповідь. $(x - 6)^2 + (y - 7)^2 = 36$.

7. В еліпс $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$ вписано правильний трикутник так, що одна з його вершин збігається з правим кінцем великої осі. Знайти координати двох інших вершин.

Відповідь. $\left(\frac{6}{7};\frac{12\sqrt{3}}{7}\right),\left(\frac{6}{7};\frac{-12\sqrt{3}}{7}\right)$.

8. Записати рівняння прямої, що дотикається до еліпса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ у точці (2; – 3).

Відповідь. $x-2y=8.$

9. Знайти рівняння тих дотичних до еліпса $3x^2+8y^2=45,$ відстань яких від центра еліпса дорівнює 3.

Відповідь. $\pm3x\pm4y+15=0.$