Практична робота 19-20

Тема: Криві другого порядку. Гіпербола. Парабола.
Мета: Ознайомити студентів з рівняннями кривих другого порядку, навчити їх розв'язанню базових задач на гіперболу та параболу.

План практичних занять

1. Криві другого порядку. Гіпербола. Парабола.
2. Дослідження загального рівняння кривої другого порядку.

Термінологічний словник ключових понять

Канонічне рівняння— найпростіше рівняння кривої другого порядку.

Ексцентриситет— відношення $\varepsilon=\frac{c}{a}$ для еліпса, гіперболи, у параболи $\varepsilon = 1$.

Загальне рівняння лінії другого порядку:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0, \qquad (1)$$

де коефіцієнти A, B, C, D, E, F – довільні числа, причому A, B та C не дорівнюють нулю одночасно, тобто $A^2+B^2+C^2\neq 0$.

Канонічнерівнянням гіперболи з центром в точці $O(0;0)$:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (2)$$

де

$$b^2=c^2-a^2$$

Канонічнерівнянням параболи:

$$y^2=2px. \qquad (3)$$

Навчальні завдання

1. Записати рівняння гіперболи, яка проходить через точку A (6; 9), якщо:
1) відстань між фокусами дорівнює 8, а відстань між директрисами — 6;
2) директриси задано рівняннями $x=-3\sqrt{2}, x=3\sqrt{2}$, а кут між асимптотами — прямий;
3) ексцентриситет дорівнює $\varepsilon = 2$, а уявна піввісь $b = 3$;
4) асимптоти задано рівнянням $y=\pm\frac{5}{3}x$.

● 1) Координати фокусів F_1 ($-c$; 0); F_2 (c; 0), тому з умови $2c = 8$; $c = 4$, відстань між директрисами $6 = \frac{2a}{\varepsilon}$. Звідки, враховуючи, що $\varepsilon = \frac{c}{a}$ маємо: $a = 12$, $b = c - a = 4$. Остаточно $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$.

2) З рівнянь директрис маємо: $\frac{a}{\varepsilon} = 3\sqrt{2}$, якщо кут між асимптотами прямий, то $a = b$. Отже, з урахуванням формули $\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$ маємо $\varepsilon = \sqrt{2}$ і $a = 6$; $b = 6$. Остаточно записуємо рівняння шуканої гіперболи: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{36} = 1$.

3) З формули, застосованої вище, дістаємо $\frac{3}{a} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$, звідки $a = \sqrt{3}$. Отже, $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{9} = 1$.

4) Точка A належить гіперболі, тому маємо: $\frac{36}{a^2} - \frac{81}{b^2} = 1$. З рівняння асимптот гіперболи випливає співвідношення $\frac{b}{a} = \frac{5}{3}$, або $b = \frac{5}{3}a$. Підставивши b в останнє співвідношення, дістанемо рівняння для знаходження a^2:

$$\frac{36}{a^2} - \frac{81 \cdot 9}{25a^2} = 1; \quad a^2 = \frac{171}{25}, \quad b^2 = 19.$$

Отже, $\frac{25x^2}{171} - \frac{y^2}{19} = 1.$

2. Знайти умову, за якої пряма $y = kx + b$ дотикається до параболи $y^2 = 2px$.

● Парабола і пряма будуть дотикатися одна до одної, якщо система рівнянь матиме єдиний розв'язок:

$$\begin{cases} y = kx + b \\ y^2 = 2px. \end{cases}$$

Виключаючи x із рівнянь системи, дістаємо квадратне рівняння:

$$y^2 - \frac{2p}{k}y + \frac{2pb}{k} = 0.$$

Воно має єдиний розв'язок, якщо $D = 0$. Звідси випливає:

$$\frac{p^2}{k^2} - \frac{2pb}{k} = 0 \Rightarrow p(p - 2bk) = 0,$$

але $p \neq 0$. Отже, $p = 2bk$ — умова дотику прямої і параболи.

3. Дослідити рівняння $x^2 + 6xy + ay^2 + 3x + by - 4 = 0$ при різних значеннях параметрів a і b.

● Обчислимо визначники δ і Δ, які визначають тип кривої другого порядку:

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & a \end{vmatrix} = a - 9;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & \frac{3}{2} \\ 3 & a & \frac{b}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{b}{2} & 4 \end{vmatrix} = \frac{7}{4}a - \frac{1}{4}(b-9)^2 - \frac{63}{4}.$$

1) $a > 9$, маємо еліпс, при $7a - (b-9)^2 - 63 > 0$ — уявний, при $7a - (b-9)^2 - 63 < 0$ — дійсний. Якщо $a = \frac{1}{7}(b-9)^2 + 9$, то еліпс вироджується в уявні прямі.

2) $a = 9$. Маємо криву параболічного типу $\Delta = -\frac{1}{4}(b-9)^2$. Якщо $b \neq 9$, то ця крива — парабола; при $a = 9$, $b = 9$ рівняння параболи розпадається на пару паралельних прямих: $x + 3y + 4 = 0;\ x + 3y - 1 = 0.$

3) $a < 9$. Маємо гіперболу. Якщо $a = \frac{1}{7}(b-9)^2 + 9$, то гіпербола розпадається на пару прямих.

4. Рівняння асимптотгіперболи $y = \pm\frac{4}{3}x$, а відстань між фокусами $2c = 20$. Скласти канонічне рівняння гіперболи, знаючи, крім того, що її фокуси розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат.

За умовою $2c = 20$, тому $c = 10$. Оскільки для гіперболи $c^2 = a^2 + b^2$, для знаходження її півосей a, b дістанемо систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{4}{3}, \\ a^2 + b^2 = 100. \end{cases}$$

З першого рівняння системи виразимо, наприклад, b: $b = \frac{4a}{3}$ та підставимо в її друге рівняння $a^2 + \frac{16a^2}{9} = 100$. Звідси $25a^2 = 900$, $a^2 = 36$, $a = 6$, $b = \frac{4 \cdot 6}{3} = 8$.

Тому канонічне рівняння гіперболи матиме вигляд

$$\frac{x^2}{6^2} - \frac{y^2}{8^2} = 1$$

або

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1.$$

5. Парабола з вершиною в початку координат проходить через точку $A(4;-8)$ симетрично осі Oy. Записати її рівняння.

Оскільки парабола проходить через точку $A(4;-8)$ з від'ємною ординатою, а її віссю симетрії слугує вісь Oy, рівняння параболи будемо шукати у вигляді $x^2 = -2py$. Підставляючи в це рівняння координати точки A, дістанемо

$$4^2 = -2p \cdot (-8),\ 16 = 16p,\ p = 1.$$

Отже, шукане рівняння $x^2 = -2y$, фокус параболи $F\left(0;-\frac{1}{2}\right)$, директриса $y = \frac{1}{2}$.

6. Параболу задано рівнянням $x^2 - 6x - 4y + 29 = 0$. Знайти координати її вершини, величину параметра та напрям осі.

У даному рівнянні згрупуємо доданки, що містять змінну x

$$(x^2 - 6x) - 4y + 29 = 0$$

та доповнимо їх до повного квадрату

$$(x^2 - 6x + 9 - 9) - 4y + 29 = 0,\ (x^2 - 6x + 9) - 4y + 20 = 0,\ (x-3)^2 = 4(y-5).$$

Дістали рівняння параболи вигляду $(x - x_0)^2 = 2p\,(y - y_0)$ з вершиною в точці $O_1(x_0; y_0)$. Для нашого випадку $O_1(3;5)$, параметр $p = 2$, вісь симетрії паралельна осі Oy.

Завдання для перевірки знань

1. Гіпербола дотикається до прямої $x - y = 2$ у точці (4; 2). Скласти рівняння гіперболи.

Відповідь. $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1.$

2. До параболи $y^2 = 12x$ провести дотичну паралельно прямій $2x + y - 7 = 0.$

Відповідь. $4x + 2y + 3 = 0.$

3. Знайти кут між асимптотами гіперболи, в якої:

а) ексцентриситет $\varepsilon = 2.$

б) відстань між фокусами вдвічі більша за відстань між директрисами.

Відповідь. а) 120°; б) 90°.

4. Записати рівняння прямої, що дотикається до гіперболи $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ у точці (5, – 4).

Відповідь. $x + y = 1$.

5. Скласти канонічне рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо

а) їївісь $2b = 8$, а відстань між фокусами $2c = 10$;

б) відстань між фокусами $2c = 6$, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$;

в) вісь $2a = 16$, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{4}$;

г) рівняння асимптотгіперболи $y = \pm\frac{3}{4}x$, а відстань між директрисами дорівнює $\frac{64}{5}$.

6. Знайти точки гіперболи $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$, відстань яких до правого фокуса дорівнює $4{,}5$.

7. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо задані:

а) точки $M_1(6;-1)$ та $M_2(-8;2\sqrt{2})$ гіперболи;

б) точка $M_1(-5;3)$ гіперболи та ексцентриситет $\varepsilon = \sqrt{2}$;

в) точка $M_1(9/2;-1)$ гіперболи та рівняння асимптот $y = \pm\frac{2}{3}x$.

8. Скласти рівняння параболи, вершина якої знаходиться в початку координат, знаючи, що:

а) парабола розташована симетрично осі Ox і проходить через точку $A(9;6)$;

б) парабола розташована симетрично осі Ox і проходить через точку $B(-1;3)$;

в) парабола розташована симетрично осі Oy і проходить через точку $C(4;1)$;

г) парабола розташована симетрично осі Oy і проходить через точку $D(4;-8)$.

9. Знайти найкоротшу відстань параболи $y^2 = 64x$ до прямої $4x + 3y + 46 = 0$.

Відповідь. 2.

10. Визначити типи таких кривих:

а) $x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y - 1 = 0$,

б) $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$,

в) $x^2 + 4xy + 3y^2 + 2x - 2y = 0$,

г) $x^2 + 4xy + 4y^2 + 2x - 2y - 1 = 0$,

д) $9x^2 - 6xy + y^2 - 6x + 2y = 0$.

Відповідь. а) гіпербола; б) еліпс; в) пара прямих, що перетинаються; г) парабола; д) пара паралельних прямих.