

Практична робота 21-22

Тема: Функції. Основні поняття.

Мета: Нагадати основні поняття про функцію. Навчитись знаходити область визначення функції.

План практичних занять

1. Функції, їхні властивості.
2. Область визначення функції.

Термінологічний словник ключових понять

Функція — це така відповідність між множинами D та E , при якій кожному значенню змінної $x \in D$ відповідає одне й тільки одне значення $y \in E$.

Область визначення функції — це множина всіх значень аргументу, для яких можна обчислити значення функції.

Навчальні завдання

1. **Приклад.** Знайти область визначення функції $y = \frac{\ln(1+x)}{x-1}$.

Функція визначена, якщо $x-1 \neq 0$ та $1+x > 0$. Таким чином, областю визначення функції є: $(-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

2. **Приклад.** Знайти область визначення функції

$$y = \sqrt{1-2x} + 3 \arcsin \frac{3x-1}{2}.$$

Перший доданок $\sqrt{1-2x}$ набуває дійсних значень при $1-2x \geq 0$, а другий — при $-1 \leq \frac{3x-1}{2} \leq 1$. Розв'язавши здобуту систему нерівностей, знайдемо область визначення функції: $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$.

3. **Приклад.** Визначити, яка із заданих функцій парна чи непарна: а) $y = x^2 \sqrt[3]{x} + 2 \sin x$; б) $y = 2^x + 2^{-x}$; в) $y = x^2 + 5x$.

а) Оскільки $f(-x) = (-x)^2 \sqrt[3]{-x} + 2 \sin(-x) = (x^2 \sqrt[3]{x} + 2 \sin x) = -f(x)$, то функція непарна.

б) Маємо $f(-x) = 2^{-x} + 2^{-(-x)} = 2^{-x} + 2^x = f(x)$.

Функція парна.

в) Тут $f(-x) = (-x)^2 + 5(-x) = x^2 - 5x \neq \pm f(x)$.

Таким чином, функція не є ні парною, ні непарною.

Завдання для перевірки знань

1. Задано функцію $f(x) = x^2 + 6x - 4$. Перевірити, що $f(1) = 3$, $f(3) = 24$.
2. $f(x) = x^2 + 1$. Обчислити значення:

- а) $f(4)$; *Відповідь.* 17.
 б) $f(\sqrt{2})$; *Відповідь.* 3.
 в) $f(a+1)$; *Відповідь.* a^2+2a+2 .
 г) $f(a)+1$; *Відповідь.* a^2+2 .
 д) $f(a^2)$; *Відповідь.* a^4+1 .
 е) $(f(a))^2$; *Відповідь.* a^4+2a^2+1 .
 є) $f(2a)$. *Відповідь.* $4a^2+1$.

3. $\varphi(x)=(x-1)(3x+5)^{-1}$. Записати вирази:

- а) $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$; *Відповідь.* $(1-x)(3+5x)^{-1}$.
 б) $\frac{1}{\varphi(x)}$. *Відповідь.* $(3x+5)(x-1)^{-1}$.

4. $\psi(x)=\sqrt{x^2+4}$. Записати вирази:

- а) $\psi(2x)$; *Відповідь.* $2\sqrt{x^2+1}$.
 б) $\psi(0)$. *Відповідь.* 2.

5. $f(\theta)=\operatorname{tg}\theta$. Перевірити рівність $f(2\theta)=\frac{2f(\theta)}{1-(f(\theta))^2}$.

6. $\varphi(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}$. Перевірити рівність $\varphi(a)+\varphi(b)=\varphi\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$.

7. $f(x)=\lg x$; $\varphi(x)=x^3$. Записати вирази:

- а) $f(\varphi(2))$. *Відповідь.* $3\lg 2$.
 б) $f(\varphi(a))$. *Відповідь.* $3\lg a$.
 в) $\varphi(f(a))$. *Відповідь.* $(\lg a)^3$.

8. Знайти області визначення функцій та побудувати їх графіки:

- а) $y=\sqrt{4-x^2}$; *Відповідь.* $|x|\leq 2$.
 б) $y=\sqrt{x+1}-\sqrt{3-x}$; *Відповідь.* $-1\leq x\leq 3$.
 в) $y=1-\sqrt{2\cos 2x}$; *Відповідь.* $-\frac{\pi}{4}+k\pi\leq x\leq\frac{\pi}{4}+k\pi$.
 г) $y=4/\left(1+\sqrt{x^2-4}\right)$; *Відповідь.* $|x|\geq 2$.
 д) $y=\lg(3x-1)+2\lg(x+1)$; *Відповідь.* $\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$.
 е) $y=2^{-x^2}$. *Відповідь.* $(-\infty, \infty)$.

9. Побудувати графіки функцій:

- а) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$, б) $y=2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$,
 в) $y=\operatorname{tg}\frac{1}{2}x$, г) $y=\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{4}\right)$,
 д) $y=x^3+1$, е) $y=4-x^3$,
 є) $y=x^4$, ж) $y=x^5$,
 з) $y=|x|$, и) $y=\log_2|x|$,
 і) $y=\begin{cases} 1+x & \text{при } -1\leq x\leq 0, \\ 1-2x & \text{при } 0\leq x\leq 1. \end{cases}$ й) $y=\begin{cases} x^3 & \text{при } x\leq 1, \\ x & \text{при } x>1. \end{cases}$