

Практична робота 23-24

Тема: Границя числової послідовності.

Мета: Навчитись знаходити границю числової послідовності.

План практичних занять

1. Границя числової послідовності та її властивості.
2. Нескінченно малі та нескінченно великі величини.

Термінологічний словник ключових понять

Послідовність — це числова функція $y = f(n)$, область визначення якої є множина натурального ряду чисел.

Границя послідовності x_n — це таке число a , для якого при довільному $\varepsilon > 0$, яким би малим воно не було, існує номер N , такий, що для всіх номерів $n > N$ виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$.

Нескінченно мала величина — це така послідовність α_n , для якої $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$.

Нескінченно велика величина — це така послідовність x_n , для якої при довільному числі M $0 < M < +\infty$, яким би великим воно не було, існує номер N такий, що при всіх $n > N$ виконується нерівність $|x_n| > M$.

Навчальні завдання

1. **Приклад.** Довести, що границею послідовності $x_n = \frac{2n+3}{n+5}$ є число $a = 2$.

Задамо число $\varepsilon > 0$, тоді

$$|x_n - a| = \left| \frac{2n+3}{n+5} - 2 \right| = \left| \frac{2n+3-2n-10}{n+5} \right| = \left| \frac{-7}{n+5} \right| = \frac{7}{n+5}.$$

З нерівності $|x_n - a| < \varepsilon$ маємо $\frac{7}{n+5} < \varepsilon$ або $n > \frac{7}{\varepsilon} - 5$. Звідки $N = \left[\frac{7}{\varepsilon} - 5 \right]$.

2. **Приклад.** Знайти $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 3n^2 - 5n + 6}{6 - 2n + 7n^2}$.

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 3n^2 - 5n + 6}{6 - 2n + 7n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(1 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2} + \frac{6}{n^3} \right)}{n^2 \left(\frac{6}{n^2} - \frac{2}{n} + 7 \right)} = \infty.$$

3. **Приклад.** Знайти $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right)$.

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - 0 = 1. \end{aligned}$$

Завдання для перевірки знань

1. Довести, що при $n \rightarrow \infty$ послідовність $3, 2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}, 2\frac{1}{4}, \dots, 2+\frac{1}{n}, \dots$ має границею число 2.
2. Довести, що при $n \rightarrow \infty$ послідовність $\frac{7}{3}, \frac{10}{5}, \frac{13}{7}, \dots, \frac{3n+4}{2n+1}, \dots$ має границею число 1,5.

Знайти границі послідовностей:

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(5n+1)}{n^2+2}$. *Відповідь.* 0.
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+6n+7}{2-n^2-3n^3}$. *Відповідь.* $-\frac{1}{3}$.
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n}+n+1}{5n^3-\sqrt[4]{n}+3}$. *Відповідь.* 0.
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n}$. *Відповідь.* 1.
7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2}$. *Відповідь.* $\frac{1}{2}$.
8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$. *Відповідь.* 3.
9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3-100n^2+1}{100n^2+15n}$. *Відповідь.* ∞ .
10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1000n^3+3n^2}{0,001n^4-100n^3+1}$. *Відповідь.* 0.
11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^4+(n-1)^4}$. *Відповідь.* 0.
12. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^4-(n-1)^4}{(2n+1)^4+(n-1)^4}$. *Відповідь.* $\frac{15}{17}$.
13. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$. *Відповідь.* 1.
14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+1}$. *Відповідь.* 0.
15. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+1}+n)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$. *Відповідь.* 4.
16. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3-2n^2+1}+\sqrt[3]{n^4+1}}{\sqrt[4]{n^6+6n^5+2}-\sqrt[5]{n^7+3n^3+1}}$. *Відповідь.* 1.
17. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^5+2}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2}-\sqrt{n^3+1}}$. *Відповідь.* 0.

18. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)! - n!}$. *Відповідь.* 0.

19. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)!}$. *Відповідь.* 0.

20. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!}$. *Відповідь.* 1.

21. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}}$. *Відповідь.* $\frac{4}{3}$.

22. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (1 + 2 + 3 + \dots + n)$. *Відповідь.* $\frac{1}{2}$.

23. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right)$. *Відповідь.* $\frac{1}{2}$.

24. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 1}{2^n + 1}$. *Відповідь.* 1.

25. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2^n} - 1}{\frac{1}{2^n} + 1}$. *Відповідь.* 0.