

Практична робота 25-26

Тема: Границя функції.

Мета: Навчитись знаходити границі функцій.

План практичних занять

1. Границя функції та її властивості.
2. Односторонні границі функції.
3. Розкриття невизначеностей $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, $[\infty - \infty]$.

Термінологічний словник ключових понять

Границя функції — а) Число b називається *границею функції* $f(x)$ при $x \rightarrow a$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$, таке що при $|x-a| < \delta$ і $x \neq a$ виконується нерівність $|f(x)-b| < \varepsilon$ (означення границі функції «мовою $\varepsilon-\delta$ »).

б) Число b називається *границею функції* $f(x)$ при $x \rightarrow a$, якщо для будь-якої послідовності значень аргументу x_n , $x_n \neq a$, що має границею число a , відповідна послідовність значень функції $f(x_n)$ має границею число b (означення границі функції «мовою послідовностей»).

Односторонні границі функції — а) Якщо при $x \rightarrow a (x < a)$ функція має границю, то ця границя називається *лівосторонньою границею функції в точці* $x = a$.

б) Якщо при $x \rightarrow a (x > a)$ функція має границю, то ця границя називається *правосторонньою границею функції в точці* $x = a$.

Лівостороння та правостороння границі функції в точці є односторонніми границями цієї функції.

Навчальні завдання

1. **Приклад.** Знайти $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$.

• Тут чисельник та знаменник дроби прямують до нуля при $x \rightarrow 3$ (невизначеність вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$). Оскільки $\frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = \frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)} = \frac{x+3}{x}$ при $x \neq 3$, то

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x} = 2. \text{ Звідси } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = 2.$$

2. **Приклад.** Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1} = \left[\frac{0}{0}\right]$.

• Розкладемо на множники чисельник та знаменник дроби:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2(x-1) - (x-1)}{x^2(x+1) - (x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-1)(x+1)^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x+1} = \frac{0}{2} = 0.\end{aligned}$$

3. Приклад. Знайти

$$\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^3 - 100}{x^3 - 20x^2 + 100x} = \left[\frac{0}{0} \right].$$

• Маємо:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^3 - 1000}{x^3 - 20x^2 + 100x} &= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{(x-10)(x^2 + 10x + 100)}{x(x-10)^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^2 + 10x + 100}{x(x-10)}.\end{aligned}$$

Чисельник дробу прямує до 300, а знаменник — до нуля, тобто є н.м.в. Таким чином, заданий дріб — н.в.в. (нескінченно велика величина):

$$\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^3 - 1000}{x^3 - 20x^2 + 100x} = \infty.$$

4. Приклад. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} = \left[\frac{0}{0} \right]$.

• Домножимо чисельник та знаменник дробу на суму $\sqrt{x+4} + 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+4} - 2)(\sqrt{x+4} + 2)}{x(\sqrt{x+4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+4} + 2} = \frac{1}{4}.$$

5. Приклад. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{(1+x)^3} - 1}{x} = \left[\frac{0}{0} \right]$.

• Покладемо $1+x = y^5$, тоді

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{(1+x)^3} - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^3 - 1}{y^5 - 1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^2 + y + 1}{y^4 + y^3 + y^2 + y + 1} = \frac{3}{5}.$$

6. Приклад. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{4x^3 + 3x^2 + 2x + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

• Поділимо чисельник та знаменник на старший степінь x , тобто на x^3 :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{4x^3 + 3x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3}}{4 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = \frac{1}{4}.$$

7. Приклад. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2}{\sqrt{x^8 + 3x + 4}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

• Поділимо чисельник та знаменник на x^4 :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2}{\sqrt{x^8 + 3x + 4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{2}{x^4}}{\sqrt{1 + \frac{3}{x^7} + \frac{4}{x^8}}} = \frac{3}{1} = 3.$$

8. Приклад. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 8x + 3} - \sqrt{x^2 + 4x + 3}) = [\infty - \infty]$.

- Помножимо та поділимо заданий вираз на $\sqrt{x^2+8x+3} + \sqrt{x^2+4x+3}$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2+8x+3} - \sqrt{x^2+4x+3} \right) = \\ & = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+8x+3} - \sqrt{x^2+4x+3} \right) \left(\sqrt{x^2+8x+3} + \sqrt{x^2+4x+3} \right)}{\sqrt{x^2+8x+3} + \sqrt{x^2+4x+3}} = \\ & = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+8x+3 - x^2 - 4x - 3}{\sqrt{x^2+8x+3} + \sqrt{x^2+4x+3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2+8x+3} + \sqrt{x^2+4x+3}} = \\ & = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{1+\frac{8}{x}+\frac{3}{x^2}} + \sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}} = \frac{4}{2} = 2. \end{aligned}$$

9. Приклад. Знайти $\lim_{x \rightarrow 3 \pm 0} \left(x + 2^{\frac{1}{x-3}} \right)^{-1}$.

● Якщо $x \rightarrow 3-0$, то $\frac{1}{x-3} \rightarrow -\infty, 2^{\frac{1}{x-3}} \rightarrow 0; \lim_{x \rightarrow 3-0} \left(x + 2^{\frac{1}{x-3}} \right)^{-1} = \frac{1}{3}$.

Якщо $x \rightarrow 3+0$, то $\frac{1}{x-3} \rightarrow +\infty, 2^{\frac{1}{x-3}} \rightarrow +\infty; \lim_{x \rightarrow 3+0} \left(x + 2^{\frac{1}{x-3}} \right)^{-1} = 0$.

Завдання для перевірки знань

1. Знайти $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+5}{x^2-3}$. *Відповідь.* 9.
2. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{1-x}$. *Відповідь.* ∞ .
3. Знайти $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$. *Відповідь.* 0.
4. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$. *Відповідь.* 0.
5. Знайти $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$. *Відповідь.* $-\frac{2}{5}$.
6. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$. *Відповідь.* $\frac{1}{2}$.
7. Знайти $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$. *Відповідь.* 6.
8. Знайти $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$. *Відповідь.* $\frac{1}{2}$.
9. Знайти $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-9}$. *Відповідь.* $\frac{1}{6}$.
10. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$. *Відповідь.* -2.
11. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$. *Відповідь.* ∞ .

12. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^2} \right)$. *Відповідь.* -1 .
13. Знайти $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x(x-2)^2} - \frac{1}{x^2-3x+2} \right)$. *Відповідь.* ∞ .
14. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+2}{x^2-5x+4} + \frac{x-4}{3(x^2-3x+2)} \right)$. *Відповідь.* 0 .
15. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$ (m та n — цілі числа). *Відповідь.* $\frac{m}{n}$.
16. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x}{x^4 - 3x^2 + 1}$. *Відповідь.* 0 .
17. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 5x}{x^2 - 3x + 1}$. *Відповідь.* ∞ .
18. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1}$. *Відповідь.* $\frac{1}{2}$.
19. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}$. *Відповідь.* -1 .
20. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2+1} - x \right)$. *Відповідь.* 0 .
21. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{2x^2-1} - \frac{x^2}{2x+1} \right)$. *Відповідь.* $\frac{1}{4}$.
22. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2}{2x+1} - \frac{(2x-1)(3x^2+x+2)}{4x^2} \right)$. *Відповідь.* $-\frac{1}{2}$.
23. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(x+1)^{10} + (x+2)^{10} + \dots + (x+100)^{10}}{x^{10} + 10^{10}} \right)$. *Відповідь.* 100 .
24. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x-x}}$. *Відповідь.* -1 .
25. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1} - \sqrt{x^4+1}}$. *Відповідь.* 1 .
26. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{x^7+3} + \sqrt[4]{2x^3-1}}{\sqrt[6]{x^8+x^7+1} - x}$. *Відповідь.* ∞ .
27. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4+3} - \sqrt{x^3+4}}{\sqrt[3]{x^7+1}}$. *Відповідь.* 0 .
28. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$. *Відповідь.* 0 .
29. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x^2}$. *Відповідь.* ∞ .
30. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{\sqrt{x^2+16} - 4}$. *Відповідь.* 4 .

31. Знайти $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$. *Відповідь.* $\frac{1}{4}$.
32. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$. *Відповідь.* 3.
33. Знайти $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$. *Відповідь.* $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, якщо $x > 0$;
 ∞ , якщо $x = 0$.
34. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}}{x^2 - x}$. *Відповідь.* -1.
35. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2}$. *Відповідь.* $\frac{1}{3}$.
36. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x}$. *Відповідь.* $\frac{2}{3}$.
37. Знайти $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x-b} - \sqrt{a-b}}{x^2 - a^2}$ ($a > b$). *Відповідь.* $\frac{1}{4a\sqrt{a-b}}$.
38. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt[m]{x} - 1}$ (n та m — цілі числа) *Відповідь.* $\frac{m}{n}$.
39. Знайти $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{4+x+x^2} - 2}{x+1}$. *Відповідь.* $-\frac{1}{4}$.
40. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - 1}{x^2}$. *Відповідь.* $\frac{1}{2}$.
41. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$. *Відповідь.* 3.
42. Знайти $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{7+2x-x^2}}{x^2 - 2x}$. *Відповідь.* $\frac{\sqrt{7}}{4}$.
43. Знайти $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2^x + 3}{2^x - 3}$. *Відповідь.* $\begin{cases} 1, \text{ якщо } x \rightarrow +\infty \\ -1, \text{ якщо } x \rightarrow -\infty. \end{cases}$
44. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax + b} - \sqrt{x^2 + cx + d})$. *Відповідь.* $\frac{a-c}{2}$.
45. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$. *Відповідь.* 0.
46. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x})$. *Відповідь.* 0.
47. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{x-1}$. *Відповідь.* $\frac{1}{4}$.
48. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x^4 - 1}$. *Відповідь.* $\frac{5}{4}$.
49. Знайти $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - 10^n}{1 + 10^{n+1}}$. *Відповідь.* -0,1.
50. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^4}{1 - 2x^4} - 2^{\frac{1}{x}} \right)$. *Відповідь.* -2,5.

51. Знайти $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - 10^x}{2 + 10^{x+1}}$.

Відповідь. 1,5.

52. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$.

Відповідь. 0.

53. Знайти $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$.

Відповідь. $\begin{cases} 0, \text{ якщо } x \rightarrow +\infty \\ +\infty, \text{ якщо } x \rightarrow -\infty. \end{cases}$

54. Знайти $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$.

Відповідь. $\begin{cases} \frac{1}{2}, \text{ якщо } x \rightarrow +\infty \\ -\infty, \text{ якщо } x \rightarrow -\infty. \end{cases}$

55. Знайти $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{(x+a)(x+b)} - x)$.

Відповідь. $\begin{cases} \frac{a+b}{2}, \text{ якщо } x \rightarrow +\infty \\ \infty, \text{ якщо } x \rightarrow -\infty. \end{cases}$

56. Знайти $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2 - 2x - 1} - \sqrt{x^2 - 7x + 3})$. Відповідь. $\pm \frac{5}{2}$.