УКРАЇНА
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БІОРЕСУРСІВ
І ПРИРОДОКОРИСТУВАННЯ УКРАЇНИ

Кафедра вищої та прикладної математики

Методичні вказівки та індивідуальні завдання з дисципліни «ВИЩА МАТЕМАТИКА» за модулем «Елементи математичного аналізу»

Київ – 2016

ББК 22.11я73
С 55
УДК 517(076)

Методичні вказівки містить теоретичний матеріал, індивідуальні та тестові завдання за модулем «Елементи математичного аналізу» дисципліни «Вища математика». Призначено для студентів інженерних факультетів.

Рекомендовано Вченою радою ННІ Енергетики, автоматики і енергозбереження НУБіП України.

Укладач: С.В. Шостак

Рецензенти: канд. фіз.-мат. наук, доцент О. Ю. Дюженкова
канд. фіз.-мат. наук, доцент Я.О. Гуменюк

Навчальне видання

Методичні вказівки та індивідуальні завдання з дисципліни
«ВИЩА МАТЕМАТИКА»
за модулем
«Елементи математичного аналізу»

Укладач: ШОСТАК СЕРГІЙ ВОЛОДИМИРОВИЧ

Підписано до друку __.__.2016 р. Зам. №______
Формат 60х90 1/16. Папір офсетний. Друк – різографія.
Наклад 50 пр. Ум. друк. арк. 7,58
Друк «ЦП «КОМПРИНТ», Свідоцтво ДК №4131, від 04.08.2011р.
м. Київ, вул. Предславинська, 28
528-05-42

ЗМІСТ

Розділ 1. ВСТУП ДО АНАЛІЗУ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ............. 5
1. Границя послідовності й функції 5
1.1. Способи задання функцій.. 5
1.2. Модуль. Окіл точки... 7
1.3. Границя послідовності.. 8
1.4. Границя функції 10
2. Нескінченно малі та їх властивості 12
2.1. Нескінченно малі та нескінченно великі функції 12
2.2. Властивості нескінченно малих.. 12
3. Властивості границь. Знаходження границь 14
3.1. Властивості границь 14
3.2. Приклади розкриття невизначеностей.. 17
4. Неперервність функцій. Стандартні границі.................................. 18
4.1. Неперервність функцій... 18
4.2. Класифікація точок розривів функцій 21
4.3. Теореми про неперервні функції.. 22
4.4. Перша стандартна границя... 23
4.5. Друга стандартна границя 25
4.6. Порівняння нескінченно малих 26
Розділ 2. ПОХІДНА ФУНКЦІЇ 29
1. Означення похідної 29
1.1. Задачі, які приводять до поняття похідної 29
1.2. Означення похідної. Її практичне тлумачення............................ 30
1.3. Диференційованість і неперервність... 31
2. Техніка диференціювання функцій 33
2.1. Правила диференціювання... 33
2.2. Диференціювання основних елементарних функцій 35
2.3. Диференціювання неявних функцій 41
2.4. Диференціювання параметрично заданих функцій................... 41
2.5. Диференціювання гіперболічних функцій 42
3. Диференціал. Похідні й диференціали вищих порядків 43
3.1. Диференціал.. 43
3.2. Застосування диференціала.. 44
3.3. Похідні вищих порядків 45
3.4. Диференціали вищих порядків 46
3.5. Диференціал складеної функції.. 46
4. Теореми про диференційовані функції 46
4.1. Теорема Ролля 46
4.2. Теорема Лагранжа.. 47
4.3. Правило Лопіталя... 49
4.4. Формула Тейлора 50

5. Еластичність функцій 53
5.2. Означення та обчислення еластичності 53
5.3. Властивості еластичності 53
Розділ 3. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ 55
1. Дослідження функцій за допомогою похідної 55
1.1. Монотонність функцій 55
1.2. Екстремум функцій 55
1.3. Опуклість і угнутість функцій 58
1.4. Асимптоти функції 59
1.5. Загальна схема дослідження функцій 60
2. Практичні задачі на найбільше та найменше значення 63
3. Наближене розв'язування скінченних рівнянь 66
3.1. Метод проб 66
3.2. Метод хорд 67
3.3. Метод дотичних 67
3.4. Метод ітерацій (послідовних наближень) 68
ДОВІДКОВИЙ МАТЕРІАЛ 70
ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ……………………………………………..82
ЗРАЗОК ТЕСТІВ………………………………………………………..112
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ І РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ…115

Розділ 1. ВСТУП ДО АНАЛІЗУ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

§ 1. ГРАНИЦЯ ПОСЛІДОВНОСТІ Й ФУНКЦІЇ

1.1. Способи задання функцій

Розглянемо спочатку функції однієї змінної. Для задання відображення лінійної множини ***X*** на лінійну множину ***Y*** існують різні способи, зокрема такі.

Аналітичний. Наприклад,

$$y = \sin\frac{x}{2}, \qquad y = \begin{cases} 1 - x, x < 0; \\ 1 + 2x^2, x \geq 0. \end{cases}$$

У загальному випадку записують $y = f(x)$, або $x \to f(x)$.

Графічний (відомий з аналітичної геометрії). Цим способом можна задавати функції лише однієї та двох змінних. Проте не всяку функцію навіть однієї змінної можна задати графічно. Так, графічно не можна задати *функцію Діріхле*

$$y = \sin\frac{x}{2}, \qquad y = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x \text{ раціональн е;} \\ 0, \text{ якщо } x \text{ ірраціонал ьне.} \end{cases}$$

Табличний. Наприклад,

x	x_1	x_2	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_n

Алгоритмічний. Так задають функцію для роботи з нею на ЕОМ.

Описовий або вербальний. Наприклад, функція “десяткові наближення числа π” – це функція, що набуває значень 3; 3,1; 3,14; … . тобто функція задається словесним переліком її значень.

Приклад 1. Функцію sign x (знак числа x), спершу задано описово , можна задати як аналітично

$$f(x) = \begin{cases} -1, x < 0; \\ 0, x = 0; \\ 1, x > 0. \end{cases}$$

так і графічно (рис. 1).

Приклад 2. Функцію $f(x)=E(x)$ - ціла частина числа *x*, яка не перевищує *x*, можна задати графічно (рис. 2). Стрілка вказує точку, яка вилучається з графіка.

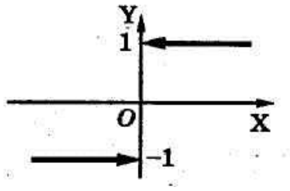


Рис.1

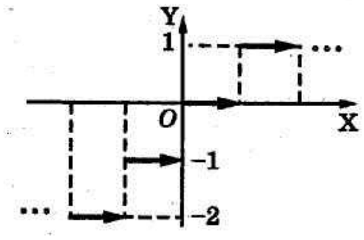


Рис.2

Розглянемо класифікацію функцій.

Означення. *Основними елементарними функціями є: степенева* $\left(f(x)=x^{a}, \alpha \in R\right)$; *показникова* $\left(f(x)=a^{x}, a>0, a \neq 1\right)$; *логарифмічна* $\left(f(x)=\log_{a} x, a>0, a \neq 1\right)$; *тригонометричні* $\left(f(x)=\sin x, \cos x, \tan x, \cot x\right)$; *обернені тригонометричні функції* $\left(f(x)=\arcsin x \text{ та ін.}\right)$.

Означення. *Якщо* $y=f(x)$, а $x=\varphi(t)$ *,то функція* $F(t)=(\varphi(t))$ *називається складеною* (*зложеною*) *або суперпозицією* (*композицією*) *функцій f та* φ.

Означення. *Елементарними функціями називають або основні елементарні функції, або ті, які утворені з них за допомогою скінченного числа арифметичних дій чи скінченного числа суперпозицій функцій.*

Наприклад, $f(x)=\sin x+x^{3}$, $f(x)=\sin^{3} x^{2}$ - елементарні, а $f(x)=\sin x$ $f(x)=\sin x+\sin 2x+\ldots\sin nx+\ldots$- неелементарні функції.

Функцію $f(x)=P_{n}(x)=a_{0}+a_{1}x+a_{2}x^{2}+\ldots+a_{n}x^{n}$ (для позначення $P(x)$ істотно, що $a_{0} \neq 0$) називають *алгебраїчною* (*поліномом чи многочленом*). Решту функцій, крім $f(x)=\dfrac{p_{n}(x)}{Q_{m}(x)}$, називають трансцендентними.

Означимо деякі елементи поведінки функцій.

Означення. *Функція називається парною, якщо* $f(x)=f(-x)$, *і не парною, якщо* $f(-x)=-f(x)$, *а область визначення симетрична відносно початку координат.*

Графік парної функції симетричний відносно осі Oy, непарної – відносно початку координат.

Означення. *Функція* $y = f(x)$ *називається зростаючою (спадною) на деякому інтервалі, якщо з* $x_2 > x_1$ *випливає, що*

$$f(x_2) > f(x_1) \quad \left(f(x_2) < f(x_1)\right).$$

Для таких функцій застосовують позначення ↑ і ↓.

Означення. *Функція* $y = f(x)$ *називається періодичною з періодом T, якщо* $(x+T) = f(x)$.

Означення *Функція* $y = f(x)$ *називається обмеженою на множині X, якщо існує M >* 0 *таке, що для довільного* $x \in X$ *виконується нерівність* $\left| f(x) \right| < M$.

Означення. *Функція* $y = f(x)$ *називається обмеженою з верху (знизу) на множині X, якщо існує M(m) таке, що* $y = f(x) < M\left(f(x) > m\right)$.

Якщо $f(x)$ обмежена, то вона обмежена і зверху, і знизу, а також навпаки. Наприклад, $f(x) = \sin x$ обмежена на *R*, бо для всіх $x \in R, \left| f(x) \right| \le 1$ (можна взяти, наприклад, *M* = 2), функція $f(x)a^x$ обмежена знизу на ***R***, бо $a^x > 0$ (можна взяти *m* = 0).

Той факт, що відношення $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ обмежене на певній множині, позначають $f_1(x) = O\left(f_1(x)\right)$, обмеженість $f(x)$ позначають $f(x) = O(1)$.

Модуль. Окіл точки

Нагадаємо означення модуля числа $x \in R$:

$$|x| \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} x, & \text{якщо}\, x \ge 0; \\ -x, & \text{якщо}\; x < 0. \end{cases}$$

Справедливі такі властивості модуля:

1. $|a+b| < |a| + |b|$ (нерівність трикутника).

2. $|a-b| \ge |a| - |b|$.

3. $|ab| = |a| \cdot |b|$.

4. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$.

5. Невірність $|x - x_0| < \delta$ еквівалентна нерівності $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, (рис.3)

Наведені властивості можна перевірити на конкретних числах.

Означення. *Околом точки* x_0 *називається будь-який відкритий інтервал, який містить дану точку.*

Точка x_0 може бути як серединою такого інтервалу, так і не бути нею. У першому випадку говорять про симетричний окіл. Позначають окіл точки x_0 через U_x або $U(x_0, \delta)$. Нерівності у властивості модуля описують окіл $U(x_0, \delta)$.

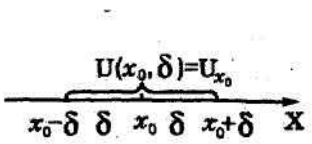


Рис.3

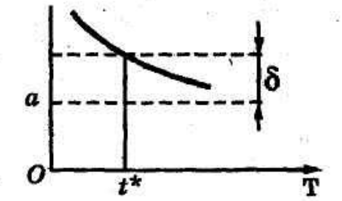


Рис.4

Границя послідовності

Почнемо з попередніх міркувань, пов'язаних з близькістю величин.

Проведемо уявний експеримент. Нехай *x* - тиск повітря в резервуарі. Тиск вимірюємо манометром, похибка якого *δ*, *a* - атмосферний тиск. Припустимо, що *x* = *a*. Відкриємо кран і спостерігатимемо за зміною *x* протягом часу *t* (рис. 4). Очевидно тиск зменшується, прямуючи до *a* і в деякий момент *t* манометр покаже, що *x* = *a* (з точністю *δ*). Збільшивши точність приладу (зменшивши *δ*), побачимо, що цей момент настане пізніше. Момент *t* почнемо фіксувати, виходячи з умови $x - a < \delta$.

Нехай тепер в резервуарі відбудеться розрідження ($x < a$). Повторимо дослід. Тут теж $x \to a$, а відповідний момент *t* фіксуємо з умови $x - a < \delta$ (рис. 5).

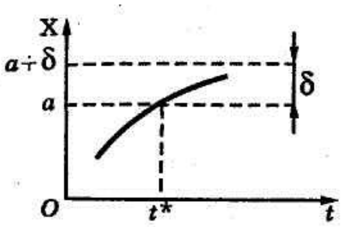


Рис.5

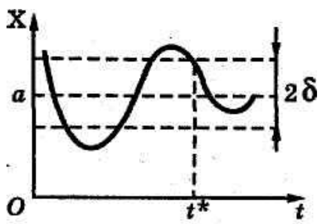


Рис.6

Нарешті можна уявити випадок, коли $x \to a$, але $x >$ і $x < a$. Технічно це реалізується за допомогою поршня (рис. 6).

Об’єднуючи всі три випадки, можна вважати, що з точністю δ змінна величина x досягає сталої величини (границі), якщо виконується умова $|x-a|<\delta$. Остання нерівність, як відомо, описує окіл тички a.

Перейдемо до означення границі послідовності. Розглянемо конкретну послідовність $\{a_n\}=\left\{1+\frac{1}{n}\right\}_{n+1}^{\infty}=\left\{1+1,\ 1+\frac{1}{2},\dots,1+\frac{1}{n},\dots\right\}$. Природно вважати, що її границею є A = 1. Оцінимо близькість a_{n} до своєї границі, тобто $|a_1-A|$. Наприклад, $|a_1-A|<\varepsilon=0{,}1$ виконується за умови n > 10. У випадку ε = 0,01 беремо n > 100.

Означення. *Стала A називається границею послідовності $\{a_n\}$, якщо для довільного наперед заданого числа $\varepsilon>0(\forall\varepsilon)$, яке може бути як завгодно малим, існує такий номер N члена послідовності $(\exists N), N=N(\varepsilon)$, такий, що при* n *>N виконується нерівність $|a_n-A|<\varepsilon$, при цьому записують*

$$\lim_{n\to\infty}a_n=A.$$

Послідовність, яка має скінченну границю, називається збіжною, в усіх інших випадках – розбіжною.

Приклад. Довести, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{3n+4}=\frac{2}{3}.$$

Тут $a_n=\dfrac{2n}{3n+4}$, $A=\dfrac{2}{3}$. Розглянемо різницю a_n-A.

Нехай $|a_n-A|<\varepsilon$.Знайдемо відповідний номер, починаючи з якого виконується нерівність. Маємо

$$\left|\frac{2n}{3n+4}-\frac{2}{3}\right|=\frac{8}{3(3n+4)}<\varepsilon.$$

Звідки $n>\dfrac{8}{9\varepsilon}-\dfrac{4}{3}$. Виберемо $N=E\left(\dfrac{8}{9\varepsilon}-\dfrac{3}{4}\right)$.

Отже, $\forall n>N$ нерівність виконується.

Нехай $\varepsilon=0{,}1$. Тоді $N=E\left(7\dfrac{5}{9}\right)$ і при n > 0 справджується нерівність

$$\left|\frac{2n}{3n+4}-\frac{2}{3}\right|<0{,}1.$$

Пропонуємо взяти $\varepsilon=0{,}01$, порівняти N для $\varepsilon=0{,}1$ і $\varepsilon=0{,}01$.

Границя функції

Означимо спочатку границю функції при $x \to \infty$ і $x \to -\infty$, бо такі означення концептуально близькі до означення границі послідовності (рис. 7). У наступних означеннях опускатимемо щодо вираз “яке може бути як завгодно малим”, хоча щоразу воно саме так і є.

Означення. *Стала A називається границею функції* $y = f(x)$ *при* $x \to -\infty$*, якщо для довільного* $\varepsilon > 0$ *існує таке значення аргументу x, що при x >x справджується нерівність* $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Записують це так:

$$\lim_{n \to \infty} f(x) = A.$$

Аналогічно означається границя $y = f(x)$ при $x \to -\infty$, тільки відповідна нерівність виконується при *x* > *x*.

Розглянемо границю функції при $x \to x_0$. Порівняємо рис. 8 і 9. На рис. 8 при наближенні x до x_0 значення $y = f(x)$ наближається до границі A і $A = f(x_0)$, на рис. 9 $f(x_0)$ не має ніякого відношення до *A*. Отже, в самій точці x_0 близькість функції та її границі може бути порушена (якщо функція взагалі визначена в цій точці).

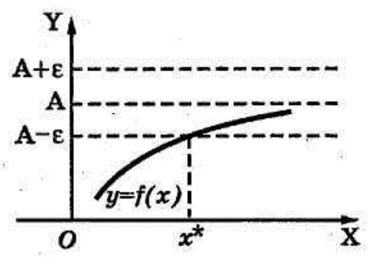


Рис.7

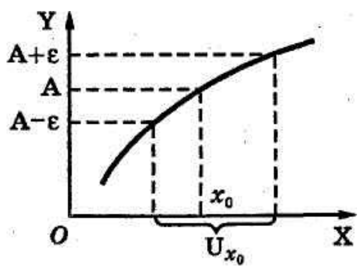


Рис.8

Означення. *Стала A називається границею функції* $y = f(x)$ *при* $x \to x_0$*, якщо для довільного* $\varepsilon > 0$ *існує такий окіл точки* U_{x_0}*, що для довільного x цього околу, хіба що крім* x_0*, виконується нерівність*

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

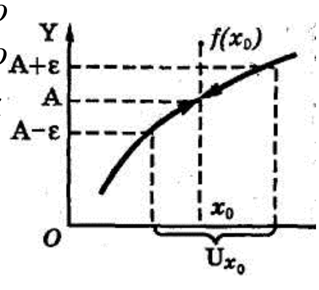


Рис.9

Записують це так:

$$\lim_{n \to \infty} f(x) = A.$$

Якщо так званий *проколений окіл* точки x_0 позначати через U'_{x_0}, тобто $U'_{x_0} = U_{x_0} \setminus \{x_0\}$, то тоді останнє означення можна написати символічно:

$$\left(\lim_{n\to\infty} f(x) = A\right) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \left(\forall \varepsilon > 0 \ \exists U_{x_0}, \forall x \in U'_{x_0} : |f(x) - A| < \varepsilon\right).$$

Приклад. Довести, що $\lim_{n\to\infty}(2x+3) = 5$.

Доведення. Розглянемо $|f(x) - A| < \varepsilon$ і знайдемо той окіл точки $x = 1$, в якому виконується ця нерівність. Маємо

$$|f(x) - A| = |2x + 3 - 5| = |2x - 2| = |x - 1| < \varepsilon,$$

звідки

$$|x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Остання нерівність (чи еквівалентна їй $1 - \frac{\varepsilon}{2} < x < 1 + \frac{\varepsilon}{2}$) визначає окіл точки $x = 1$, точніше $U\left(1, \frac{\varepsilon}{2}\right)$.

Істотними є також поняття односторонніх границь функції.

Означення. *Стала A є границею функції $y = f(x)$ справа (правосторонньою границею) при $x \to x_0$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує правий окіл точки $x_0 \left(U_{x_0} \cap \{x; x > x_0 >\}\right)$, такий, що для всіх x з цього околу* $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Записують це так:

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = A$$

Аналогічно означається лівостороння границя $f(x)$, тобто $\lim_{x\to x_0+0} f(x)$.

Очевидно $\lim_{x\to 0+0} \operatorname{sign} x = -1, \quad \lim_{x\to 0-0} \operatorname{sign} x = 1.$.

Зазначимо, що

$$\left(\lim_{x\to x_0} f(x) = A\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A, \\ \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A \end{cases}\right).$$

§ 2. НЕСКІНЧЕННО МАЛІ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

2.1. Нескінченно малі та нескінченно великі функції

Сформулюємо основні означення.

Означення. *Функція* $y = f(x)$ *називається нескінченно малою при* $x \to x_0$ *або* $x \to \infty$, $x \to -\infty$, *якщо* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Якщо $x \to x_0$, то, скориставшись означенням границі, маємо

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists U_{x_0}, \forall x \in U'_{x_0} : \left| f(x) - A \right| < \varepsilon.$$

Останню нерівність запишемо у вигляді $\left| f(x) - A \right| < \varepsilon$. Звідки випливає обґрунтованість назви “нескінченно мала”. Це спостереження покладемо в основу наступного означення.

Означення. *Функція* $y = f(x)$ *називається нескінченно великою при* $x \to x_0$, *якщо для будь-якого* $E > 0$, *яке може бути як завгодно великим, існує такий окіл точки* x_0, *що для всіх точок його. Хіба що крім* x_0, *виконується нерівність* $\left| f(x) \right| < E$.

Записують це так:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

Неважко навести таке означення й для випадку, коли $x \to \infty$ або $x \to -\infty$.

Аналогічні означення можна дати для послідовностей.

2.2. Властивості нескінченно малих

Для зручності в доведеннях розглядатимемо тільки випадок, коли $x \to x_0$.

Теорема 1 (зв'язок нескінченно малих і нескінченно великих функцій). *Якщо* $f(x)$ - *нескінченно велика при* $x \to x_0$, *то* $\dfrac{1}{f(x)}$ - *нескінченно мала при* $x \to x_0$, *і навпаки.*

Доведення. Нехай $f(x)$ - нескінченно велика при $x \to x_0$. Тоді $\forall E > 0 \ \exists U'_{x_0}, \forall x \in U_{x_0} : \left| f(x) - A \right| > E$, звідки $\dfrac{1}{\left| f(x) \right|} < \dfrac{1}{E}$. Позначимо $\dfrac{1}{E} = \varepsilon$.

Оскільки E може бути як завгодно великим, то $\varepsilon = \dfrac{1}{E}$ може бути як завгодно малим. Матимемо $\left| \dfrac{1}{f(x)} \right| < \varepsilon$. Отже, $\dfrac{1}{f(x)}$ - нескінченно мала при $x \to x_0$.

Аналогічно доводиться й обернене твердження.

З цієї теореми випливає, що досить обмежитися детальним вивченням одного класу функцій, скажімо, нескінченно малих.

Теорема 2 (зв'язок границі функції з нескінченно малою).

1) *Якщо* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, *то існує проколений окіл точки* x_0, *в якому* $f(x)$ *має вигляд*

$$f(x) = A + \alpha(x),$$

де $\alpha(x)$ - нескінченно мала при $x \to x_0$.

2) *Якщо в деякому проколеному околі точки* x_0 *має місце рівність* (2), *то* $f(x)$ *має границю при* $x \to x_0$ і $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Доведення. Маємо

$$\left(\lim_{n \to \infty} f(x) = A\right) \Rightarrow \left(\forall \varepsilon > 0 \ \exists U_{x_0}, \forall x \in U'_{x_0} : \left| f(x) - A \right| < \varepsilon\right).$$

Позначимо $f(x) = A + \alpha(x)$. Оскільки $\left|\alpha(x)\right| < \varepsilon$ в деякому околі x_0, то $\alpha(x)$ - нескінченно мала при $x \to x_0$, $f(x) = A + \alpha(x)$.

Обернене твердження доводиться аналогічно.

Теорема 3 (сума нескінченно малих). *Сума скінченного числа нескінченно малих функцій є нескінченною малою.*

Доведення. Нехай $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ - нескінченно малі при $x \to x_0$, тоді $\forall \varepsilon > 0 \ \exists U_x^{(1)}, \forall x \in U_{x_0}^{(1)} : \left|\alpha(x)\right| < \varepsilon$. Аналогічно в $U_{x_0}^{(2)}$ виконується $\left|\beta(x)\right| < \varepsilon$. Очевидно в $U'_{x_0} = U_{x_0}^{(1)} \bigcap U_{x_0}^{(2)}$ виконуються обидві зазначені нерівності (перетин двох околів однієї і тієї самої точки є околом цієї точки).

Застосувавши нерівність трикутника, дістанемо

$$\left|\alpha(x) + \beta(x)\right| \le \left|\alpha(x)\right| + \left|\beta(x)\right| \le \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = \varepsilon_1,$$

тобто для довільного $x \in U'_{x_0}$ справджується нерівність $\left|\alpha(x) + \beta(x)\right| < \varepsilon$. Отже, $\alpha(x) + \beta(x)$ - нескінченно мала при $x \to x_0$.

Теорема справджується й для скінченного числа доданків в наслідок асоціативного закону додавання. Як і завжди в таких випадках для перевірки певного результату для n доданків перевіряємо його для двох ($n - 1$ і одного), далі міркуємо так само для $n - 1$ доданка і т. д.

Теорема 4 (добуток обмеженої і нескінченно малої функції). *Добуток обмеженої і нескінченно малої функції є нескінченно малим.*

Доведення. Нехай функція $f_1(x)$ обмежена на *X*. Тоді існує $M > 0$ таке, що для довільного $x \in X$ виконується нерівність $|f_1(x)| < M$. Оскільки $f_2(x)$ - нескінченно мала при $x \to x_0$, то $|f_2(x)| > \varepsilon$ в деякому околі x_0. У тому ж околі (точніше, перетині цього околу з *X*)

$$|f_1(x) \cdot f_2(x)| = |f_1(x)||f_2(x)| < M\varepsilon = \varepsilon_1.$$

Звідси випливає доводжуване твердження.

Наслідок. *Добуток скінченного числа нескінченно малих є нескінченно малою.*

Для двох множників твердження випливає з того , що нескінченну малу можна розглядати в деякому околі як обмежену функцію (тут $\varepsilon = M$). Для більшого числа множників міркуємо як і в теоремі 3.

Усе сказане щодо нескінченно малих і великих функцій справджується й для відповідних послідовностей.

§ 3.ВЛАСТИВОСТІ ГРАНИЦЬ. ЗНАХОДЖЕННЯ ГРАНИЦЬ

3.1. Властивості границь

Теорема 1 (границя суми). *Границя суми скінченного числа функцій дорівнює сумі границь доданків, якщо кожна з границь існує.*

Доведення. Доведемо спочатку теорему для двох доданків, тобто вчинимо так, як це завжди буває у випадку суми скінченного числа доданків. Покажемо, що $\lim\limits_{x \to x_0}\left(f_1(x) + f_2(x)\right) = \lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) + \lim\limits_{x \to x_0} f_2(x)$

Нехай $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x)$. За теоремою 2 (п.2.2) маємо:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists U_{x_0}, \forall x \in U'_{x_0} : f_1(x) = A + \alpha(x).$$

Аналогічно

$$\left(\lim_{x \to x_0} f_2(x) = B\right) \Rightarrow \left(f_2(x) = B + \beta(x)\right),$$

де $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ - нескінченно малі при $x \to x_0$. Вважатимемо, що рівності (2а) і (3), виконується в одному околі U_{x_0} (див. доведення теореми 3, п. 2.2).

Застосовуючи рівності (2а) і (3), маємо

$$f_1(x)+f_2(x)=A+\alpha(x)+B+\beta(x)=(A+B)+(\alpha(x)+\beta(x)).$$

Оскільки $\alpha(x)+\beta(x)$ - нескінченно мала (див. теорему 3, п. 2.2), то згідно з теоремою 2 (п. 2.2) дістаємо, що

$$\lim_{x\to x_0}\left(f_1(x)+f_2(x)\right)=A+B,$$

тобто теорема справджується.

Наступні дві теореми подаємо без доведень, оскільки вони аналогічна доведенню теореми 1.

Теорема 2 (границя добутку). *Границя добутку скінченного числа функцій дорівнює добутку границь цих функцій, якщо кожна границя існує*:

$$\lim_{x\to x_0}\left(f_1(x)\cdot f_2(x)\ldots f_n(x)\right)=\lim_{x\to x_0}f_1(x)\lim_{x\to x_0}f_2(x)\ldots\lim_{x\to x_0}f_n(x).$$

Наслідок 1. *Сталий множник можна виносити за знак границі, тобто*

$$\lim_{x\to x_0}(cf(x))=c\lim_{x\to x_0}f(x)$$

Для довільного $c\in R$.

Наслідок 2. *Границя натурального степеня функції дорівнює натуральному степеню границі функції, тобто*

$$\lim_{x\to x_0}\left(f_1(x)\right)^n=\lim_{x\to x_0}\left(f_1(x)\right)^n\quad\forall n\in N.$$

Теорема 3 (границя частки). Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}f_2(x)\neq 0$, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\left(\lim_{x\to x_0}f_1(x)\right)/\left(\lim_{x\to x_0}f_2(x)\right)$$

Теорема 4 (границя функції, проміжної між двома функціями). *Якщо функція* $f(x)$ *є проміжною між функціями* $f_1(x)$ *і* $f_2(x)$*, тобто*

$$f_1(x)\le f(x)\le f_2(x)$$

для всіх x, які розглядаються нижче, а

$$\lim_{x\to x_0}f_1(x)=A$$

$$\lim_{x\to x_0}f_2(x)=A$$

то при $x \to x_0$ *границя* $f(x)$ *існує, причому*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

Доведення. З рівностей (5) і (6) за означенням границі маємо:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists U_{x_0}, \forall x \in U'_{x_0} : \left| f_1(x) - A \right| < \varepsilon,$$

або

$$A - \varepsilon < f_1(x) < A + \varepsilon.$$

Аналогічно

$$A - \varepsilon < f_2(x) < A + \varepsilon.$$

Скориставшись нерівностями (4), (7) та (8), дістанемо (в нерівностях(7) і (8) використаємо тільки відповідно ліву та праву частини)

$$A - \varepsilon < f_1(x) \le f(x) \le f_2(x) < A + \varepsilon.$$

тобто

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon, \quad \left| f(x) - A \right| < \varepsilon.$$

Тепер застосуємо означення границі функції.

Наведемо без доведення наступні теореми. Зауважимо, що деякі з доведень дуже прості.

Теорема 5 (граничний перехід в нерівності). *Якщо* $f_1(x) < f_2(x)$ *для всіх* $x \in (x_0, x)$ *чи* $x \in (x, x_0)$*, то*

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) \le \lim_{x \to x_0} f_2(x)$$

Теорема 6 (існування границі монотонної послідовності). *Якщо послідовність монотонно зростаюча й обмежена зверху, то вона має границю*.

Цю теорему сформульовано для послідовностей, бо використовуватимемо її саме в такому вигляді.

Теорема 7 (єдність границі). *Якщо функція має границю в даній точці, то така границя єдина*.

За допомогою цих теорем можна знаходити такі границі.

Приклад. Знайти

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{5x}{3x^2 + 1}$$

Розв'язання. На основі попередніх теорем і рівності $\lim\limits_{x\to x_0} x = 1$ маємо

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(5x)}{\lim\limits_{x\to 1}\left(3x^2\right)+1} = \frac{5\cdot 1}{3-1^2+1} = \frac{5}{4}$$

Цей самий результат можна дістати формально підставляючи у вираз для *f* граничне значення *x*.

Розглянемо границю відношення $a = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$.

Очевидно, що $a = 1$ при $f_1(x) = f_2(x) = x$. При $f_1(x) = x^2,\ f_2(x) = x$ маємо $a = 0$. Якщо $f_1(x) = x,\ f_2(x) = x^2$,то $a = \infty$. Підставляючи формально $x = 0$ у вираз $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, щоразу дістаємо $\frac{0}{0}$. Таку ситуацію називають невизначеною (невизначеністю), оскільки після знаходження (звичайно, після повних перетворень) вказані границі (розкриття невизначеності) можна мати у відповіді як конкретне число так і нескінченність (в інших випадках границя може і не існувати). Є ще й такі невизначеності:

$$\frac{\infty}{\infty}, \infty-\infty, 0\cdot\infty, 1^{\infty}.$$

3.2. Приклади розкриття невизначеностей

Розглянемо окремі приклади на знаходження границь у разі невизначеностей.

Приклад 1. Знати границю

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x+1}{2x^2+5x+3}.$$

Маємо невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$. Поділимо чисельник і знаменник на x^2 (найвищий степінь). Маємо

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

Як бачимо, границею є відношення коефіцієнтів при *x* в найвищому степені в чисельнику і знаменнику.

Приклад 2. Знайти границю

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}.$$

Маємо невизначеність $\frac{0}{0}$. Розкладемо чисельник і знаменник на множники (множники x - 1 обов'язкові). Дістаємо

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x-2}{x+1} = -\frac{1}{2}.$$

Зазначимо, що не завжди можна робити так, як у прикладі з п. 3.1, тобто під знак границі підставляти граничне значення аргументу. Виділимо, крім раціональних функцій, множину таких функцій, для яких це робити можна. Такі функції називають *неперервними*. Поки що навіть результат $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$ є необґрунтованим.

Оператори і функціонали, які задовольняють умову лінійності (*однорідності* та *адитивності*), називають *лінійними*. Оскільки операція знаходження границі функції є лінійною, відображає функцію на число, то, взявши до уваги теореми 1 і наслідок 1, доходимо висновку, що *функціонал знаходження границі є лінійним.*

§ 4. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЙ. СТАНДАРТНІ ГРАНИЦІ

4.1. Неперервність функцій

Сформулюємо означення.

Означення. *Приростом деякої величини називається різниця її значень*.

Розглянемо функцію $y = f(x)$. Можна розглядати приріст аргументу

$$\Delta x := x_2 - x_1 = (x + \Delta x) - x \quad (x_2 = x + \Delta x, x_1 = x)$$

і приріст функції, який відповідає цьому приросту аргументу, тобто (рис. 10)

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Щодо поведінки $\Delta f(x)$ при $\Delta x \to 0$, то різні функції ведуть себе по-різному. Так, для $f(x)$ на рис.10 маємо $(\Delta x \to 0) \Rightarrow (\Delta f(x) \to 0)$, але для

$f(x)$ на рис. 9 це не так. Зокрема, для $f(x)=\sin x$ в точці $x = 0$ при $\Delta x \to 0+0$ маємо $\Delta f(x)=1$, а при $\Delta x \to 0-0$ маємо $\Delta f(x)=-1$ (див. рис. 1). З суто практичних міркувань можна говорити про те, що перша функція (рис. 10) є неперервною в точці x, решта функцій не є неперервними у відповідних точках.

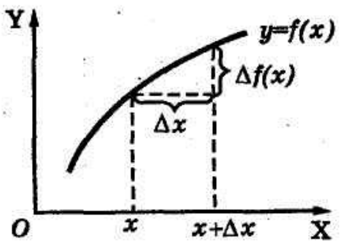


Рис.10

Ці спостереження покладені в основу означення неперервних функцій.

Наведемо три означення неперервності функції в точці. Всі вони еквівалентні між собою (це можна довести).

Означення 1. *Функція $y = f(x)$ називається неперервною в точці x_0, якщо вона визначена в цій точці та в деякому її околі і тому, що $\Delta x \to 0$ відповідає $\Delta f(x) \to 0$, тобто*

$$(\Delta x \to 0) \Rightarrow (\Delta f(x) \to 0).$$

Означення 2. *Функція $y = f(x)$ називається неперервною в точці x_0, якщо вона визначена в цій точці та в деякому її околі і*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Це означає, що границя функції в даній точці дорівнює значенню цієї функції в цій самій точці.

Рівність (10) можна записати у вигляді

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right)$$

тобто *для неперервної функції символи функції і границі можна міняти місцями.*

Скориставшись співвідношенням (1), розшифруємо означення 2.

Приходимо до такого означення.

Означення 3. *Функція $y = f(x)$ називається неперервною в точці x_0, якщо вона визначена в цій точці та в деякому її околі і*

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Наведемо ще кілька означень.

Означення. *Точкою розриву функції називається точка, в якій не виконується хоча б одна умова неперервності функції.*

Означення. *Функція називається неперервною на деякому інтервалі, якщо вона неперервна в кожній його точці (якщо інтервал замкнений, то* *непевність в кінцевих його точках розумітимемо як неперервність зліва чи справа).*

Через C^* позначатимемо множину всіх функцій, неперервних на множені X.

З огляду на означення неперервних функцій очевидною є така теорема.

Теорема 1. *Якщо* $f_1(x)$ *і* $f_2(x)$, *неперервні на деякому інтервалі, то* $f_1(x)+f_2(x)$, $f_1(x)f_2(x), \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}\left(f_2(x)\neq 0\right)$ *неперервні на такому самому інтервалі. Неперервна також суперпозиція скінченного числа неперервних функцій.*

Приклад 1. Дослідити на неперервність функцію $f(x)=x^3$.

Розв'язання. Візьмемо довільне x з області визначення $f(x), x\in R$. Маємо згідно з (9):

$$\Delta f(x)=(x+\Delta x)^3-x^3=3x^3\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3.$$

Очевидно, що

$$(\Delta x\to 0)\Rightarrow(\Delta f(x)\to 0).$$

Отже, $f(x)\in C_R$, тобто функція не перервна в області визначення.

Приклад 2. Дослідити на неперервність функцію $f(x)=\sin x$.

Розв'язання. Візьмемо x таке, як у п.1. Маємо

$$\Delta f(x)=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Скористаємося тим, що $|\sin x|\le|x|$ (див. далі (11)), і тим, що $|\cos x|\le 1$.

Тоді

$$|\Delta f(x)|\le 2\cdot\frac{|\Delta x|}{x}\cdot 1=|\Delta x|.$$

Отже, $0\le|\Delta f(x)|\le|\Delta x|$. На основі теореми 2, п 2.2 маємо

$$(\Delta x\to 0)\Rightarrow(\Delta f(x)\to 0),$$

тобто $f(x)\in C_R$ з огляду на те, що x довільне.

Можна довести неперервність інших основних елементарних функцій в області їх визначення. З теореми 1 тоді випливає таке твердження.

Теорема 2. *Усі елементарні функції неперервні в області їх визначення.*

4.2. Класифікація точок розривів функцій

Функції зображені на рис. 1, 9 і 11, мають точки розриву. Очевидно функції по-різному ведуть себе в околі цих точок.

Класифікуємо ці точки.

Означення. *Точка розриву даної функції називається точкою розриву першого роду, якщо в цій точці функція має скінченні односторонні границі.*

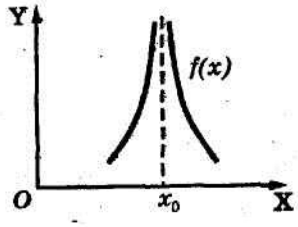


Рис. 11

Означення. *Точка розриву першого роду даної функції називається точкою усувного розриву, якщо в цій функції односторонні границі функції збігаються.*

Означення. *Точка розриву даної функції називається точкою розриву другого роду, якщо хоча б одна з односторонніх границь функції в цій точці або дорівнює* ∞*, або не існує.*

Означення. *Стрибком функції* $y = f(x)$ *у точці* x_0 *називається величина*

$$\delta(f, x) = \left| \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) - \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \right|.$$

У точках неперервності x функції $f(x)$ маємо $\delta = 0$.

Для функції $f(x) = \sin x$ (див. рис. 1) точка x = 0 - точка розриву першого роду, в точці x = 0 $\delta = 0$. Для функції зображеної на рис. 9, x_0 є точкою усувного розриву. Переозначивши цю функцію, вважаючи $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, дістанемо неперервну при $x_0 = x$ функцію. Функція зображена на рис. 11, має при $x_0 = x$ розрив другого роду, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Такий же розрив має функція $f(x) = \sin(1/x)$ при x = 0 (вона не визначена при x = 0 і $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ не існує).

У випадку точки усувного розриву розрив функції можна усунути, доозначивши чи переозначивши функцію.

4.3. Теореми про неперервні функції

Сформулюємо три теореми. Хоча вони інтуїтивно прості, доведення їх дуже складне, ми його опустимо.

Теорема 1. (про збереження знака неперервності функції). *Якщо* $f(x)$ *неперервна в точці* x_0 і $f(x_0) \neq 0$, *то існує такий окіл точки* x_0, *в якому*

$$\operatorname{sign} f(x) = \operatorname{sign} f(x_0).$$

Теорема 2. (про найбільше, найменше і проміжні значення неперервної функції). *Якщо* $f(x) \in C[a,b]$,*то на* $[a,b]$ *функція* $f(x)$ *набуває найбільшого і найменшого значень* M *і* m, *а також усіх своїх проміжних значень, тобто для довільного* $\mu, m \leq \mu \leq M$ *існує хоча б одне* $c \in [a,b]$ *таке, що* $f(c) = \mu$ (рис. 12).

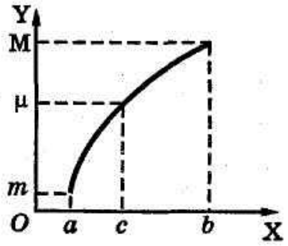


Рис. 12

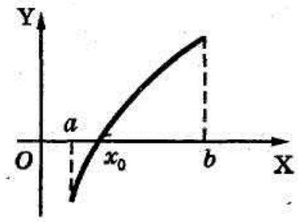


Рис. 13

Теорема 3. (про нулі неперервної функції). *Якщо* $f(x) \in C[a,b]$ *і на кінцях* $[a,b]$ *функція* $f(x)$ *набуває значень з протилежними знаками, тобто* $f(a)f(b) < 0$, *то існує хоча б одне* $x_0 \in [a,b]$, *таке, що* $f(x_0) = 0$ (*існує корінь рівняння* $f(x) = 0$)(рис. 13).

Інформація, що стосується неперервних функцій, уможливлює знаходження границі у випадках, складніших за ті, які були розглянуті.

Розглянемо кілька таких прикладів. Під знаком границі маємо неперервні функції, в усякому разі в деяких околах граничних значень аргументів.

Приклад 1. Знайти границю $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{4x+3} - \sqrt{6x+1}}{2x^2 - 2}$.

Розв'язання. Підставивши під знак границі $x = 0$ (функції неперервні), матимемо невизначеність $\frac{0}{0}$. Розкриємо її. Виконавши перетворення з ірраціональністю, перейдемо до границі:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{4x+3}-\sqrt{6x+1}\right)\left(\sqrt{4x+3}+\sqrt{6x+1}\right)}{2\left(x^2-2\right)\left(\sqrt{4x+3}+\sqrt{6x+1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\left(x^2-2\right)}{2\left(x^2-2\right)(x+1)\left(\sqrt{4x+3}+\sqrt{6x+1}\right)}=-\frac{1}{4\sqrt{7}}.$$

Приклад 2. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x-2}+1}{2x-2}$.

Розв’язання. Маємо невизначеність $\dfrac{0}{0}$. Скориставшись формулою різниці кубів, дістанемо

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt[3]{x-2}+1\right)\left(\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{x-2}+1\right)}{2(x-2)\left(\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{x-2}+1\right)}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{2(x-2)\left(\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{x-2}+1\right)}=\frac{1}{6}.$$

Приклад 3. Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+10}\right)$.

Розв’язання. Тут маємо невизначеність $\infty-\infty$. знаходимо границю за допомогою перетворень.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+}1-\sqrt{x+10}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x+}1-\sqrt{x+10}\right)\left(\sqrt{x+}1+\sqrt{x+10}\right)}{\sqrt{x+}1+\sqrt{x+10}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-9}{\sqrt{x+}1-\sqrt{x+10}}=0.$$

4.4. Перша стандартна границя

Взявши до уваги неперервність функції $f(x)=\sin x$ при x = $0\left(\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin 0=0\right)$, матимемо невизначеність $\dfrac{0}{0}$ в разі границі $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin x}{x}$. Крім того, для малих x маємо $\sin x=x$, отже, є підстава вважати, що така границя в разі, коли вона існує, або дорівнює одиниці, або до неї близька. Яка на справді ця границя?

Теорема. *Має місце* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

Доведення. Доведемо спочатку, що для довільного $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\sin x < x < \tan x$$

Побудуємо коло радіуса R і промінь під кутом x до осі Ox (рис. 14). Маємо

$$S_{\Delta OAB} < S_{\text{сект.} OAB} < S_{\Delta OCB}$$

Знайшовши площу площу кожної з цих фігур, дістанемо

$$\frac{1}{2} R^2 \sin x < \frac{1}{2} R^2 x < R^2 \tan x,$$

звідки дістанемо нерівність (11).

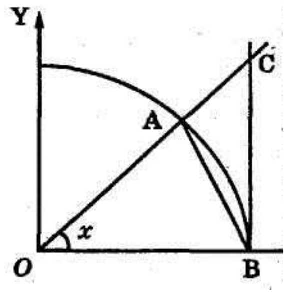


Рис. 14

Зазначимо, що коли $f_1(x) < f_2(x) \forall x \in (a, x)$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f_2(x)$ (наприклад $\sin < x \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, але $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \lim\limits_{x \to x_0} x$) (див. також теорему 5, п. 3.1).

Поділимо обидві частини нерівності (11) на $\sin x > 0$. Дістанемо

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

або

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Використаємо неперервність функції $f(x) = \cos x$ і теорему 2 (п. 2.2). Маємо

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Оскільки $\frac{\sin x}{x}$ - парна функція, то результат буде той самий при $x \to 0 - 0$.

Приклад. Знайти

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$$

Розв’язання.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x \cdot \cos 5x \cdot 3x \cdot 5}{\sin 5x \cdot 3x \cdot 5} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \lim_{x \to 0} \frac{5x}{\sin 5x} \lim_{x \to 0} \frac{3\cos 5x}{5} =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5}.$$

4.5. Друга стандартна границя

Для послідовності $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ маємо $\lim\limits_{x \to \infty} a_n = 1$. Розглянемо послідовність $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$. Маємо $u_1 = 2, u_2 = 2{,}25, u_3 = 2{,}37, u_4 = 2{,}44, \ \ldots$. Схоже, що остання послідовність зростає. Чи має вона границю? Відповідь дає така теорема.

Теорема. *Має місце*

$$\lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

де e *- трансцендентне число,* $e \approx 2{,}718$.

Доведення. Скористаємося формулою бінома Ньютона (узагальнення відомих формул при $n = 1, n = 2, n = 3$)

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^3 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots + x^n,$$

де $n \in N, n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n.$.

Маємо

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^3 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots + x^n =$$

$$1 + 1 + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{2!} + \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} \cdot \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-(n-1))}{n^{n-1}} \cdot \frac{1}{n!} =$$

$$2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\frac{1}{3!} + \ldots + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n!}.$$

Можна довести, що послідовність u_n є зростаючою, $u_{n+1} > u_n$. Отже,

$$u_n > u_1 = 2$$

Оскільки

$$1 - \frac{1}{n} < 1, \quad 1 - \frac{2}{n} < 1, \ldots, 1 - \frac{n-1}{n} < 1,$$

то

$$u_n \leq 1 + 1 - \frac{1}{2!} + - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} +$$

$$+ \ldots \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots = 1 + \frac{1}{1\frac{1}{2}} = 3.$$

Тут скористалися формулою суми спадної геометричної прогресії ($1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots$, де $a=1,\quad g=\frac{1}{2},\quad S=\frac{a}{1-g}$). Оскільки послідовність $u_n\uparrow$ і обмежена зверху числом 3, то вона має границю (теорема 6, п. 3.1), яку позначимо через e.

Зазначимо, що і у неперервному випадку маємо

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,\quad \lim_{x\to U}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

Логарифми за основою називають натуральними і позначають

$$\log_e x=\ln x.$$

Іноді користуються позначенням $e^x=\exp(x)$.

Приклад. Знайти границю

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2n}.$$

Розв’язання. Маємо

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)^{\frac{2n}{n+1}}=e^2.$$

Тут скористалися тим, що

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2,$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=e.$$

4.6. Порівняння нескінченно малих

Введемо означення, які дають змогу всі нескінченно малі функції вишикувати за певним ранжиром.

Нижче в усіх трьох означеннях $f_1(x)$ і $f_2(x)$ - нескінченно малі при $x\to x_0$ (або $x\to\infty$). Для зручності вважатимемо, що $x\to x_0$.

Означення. *Нескінченно малі функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ називаються функціями одного і того самого порядку мализни при $x\to x_0$, якщо*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=A\neq 0.$$

Означення. *Нескінченно малі функції* $f_1(x)$ і $f_2(x)$ *називаються еквівалентними при* $x \to x_0$ $\left(f_1 \approx f_2\right)$*, якщо*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1.$$

Нагадаємо, що $\sin x \sim x$ при $x \to 0$.

Означення. *Нескінченно мала функція* $f_1(x)$ *називається нескінченно малою вищого порядку, ніж* $f_2(x)$ *при* $x \to x_0$*, якщо*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 0.$$

У цьому разі записують

$$f_1(x) = 0\left(f_2(x)\right).$$

Вкажемо одне застосування еквівалентних нескінченно малих.

Теорема. *Границя відношення двох нескінченно малих функцій дорівнює границі відношення еквівалентних їм нескінченно малих, тобто якщо* $f_1 \sim \varphi$ $f_2 \sim \varphi$*, то*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}$$

Доведення. Очевидно, що

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{f_1}{f_2} \cdot \frac{\varphi_1}{\varphi_2} \cdot \frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{f_1}{\varphi_1} \cdot \frac{\varphi_2}{f_2} \cdot \frac{\varphi_1}{\varphi_2}.$$

Границі перших двох множників в останньому виразі дорівнюють 1. Тепер залишилося перейти до границі в останньому виразі.

Приклад 1. Знайти границю, користуючись еквівалентністю нескінченно малих,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \begin{Bmatrix} \sin 3x \sim 3x \\ \sin 5x \sim 5x \end{Bmatrix} = \lim_{x \to 0} \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5}.$$

Наведемо два приклади для порівняння нескінченно малих і великих.

Приклад 2. Крапля води випаровується при падінні. Її об’єм $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$, площа поверхні $\alpha = 4\pi R^3$, де R – її радіус, нескінченно спадають при $R \to 0$. Порівняємо V і σ . Маємо

$$\frac{V}{\sigma} = \frac{R}{3}, \quad \lim_{R \to 0} \frac{V}{\sigma} = 0, \quad V = 0(\sigma).$$

Цей результат дає змогу зрозуміти, чому вода, розпорошуючись форсункою, різко знижує свою температуру. Річ у тім, що при роздрібнені великої краплі на маленькі сумарний об'єм, їх залишається тим самим, а сумарна площа поверхні зростає. На створення останньої треба витратити енергію, яка покривається за рахунок кінетичної енергії молекул води, що й призводить до зниження температури.

Приклад 3. Розглянемо модель однорідного Всесвіту з рівномірно розподіленою густиною речовини *р*. Сумарна маса *М* речовини Всесвіту (радіуса *R*) $M = \frac{3}{4}\rho\pi R^3$. Вона притягує пробну частину масою *m* з силою $F = \frac{4}{3}\pi\rho\gamma m R$, де γ - відповідна стала. Якщо Всесвіт нескінченний, то $R \to 0$, але це не так (гравітаційний парадокс Всесвіту).

Як же реалізується цей парадокс? Найпростішим є уявлення про скінченність Всесвіту, але тоді його чекає "теплова смерть" відповідно до другого начала термодинаміки. Ця неприємність відсутня для нескінченного Всесвіту, оскільки в ньому енергія й ентропія нескінченні і говорити про їх зростання чи спадання не має сенсу.

Другим можливим кроком е такий. Нехай $R \to 0$, але $\rho \to 0$ за умови $\rho R = const$. Тоді знімається гравітаційний парадокс, але гіпотезу не підтверджують спостереження. Задовільний розв'язок цього парадоксу дістанемо в межах теорії "великого вибуху", згідно з якою близько 15-20 млрд років назад наш всесвіт вихлюпнувся назовні з нескінченно малої (у розумінні простору - часу), але нескінченно великої (у розумінні маси й енергії) частинки і відтоді розширюється з швидкістю, пропорційною відстані від об'єкта, який спостерігається (закон Хаббла).

На певній відстані швидкість об'єкта, що віддаляється від нас, зрівнюється зі швидкістю світла, а найвіддаленіші об'єкти провалюються за "горизонт подій" і від нас до них не надходять ніякі сигнали (наприклад, світло, тяжіння). Оскільки об'єм простору в середині "горизонту подій" скінченний, то гравітаційний парадокс відпадає. Ось до яких цікавих і глибоких речей призводить зовні проста процедура порівняння нескінченно великих і нескінченно малих.

Розділ 2. ПОХІДНА ФУНКЦІЇ

§ 1 ОЗНАЧЕННЯ ПОХІДНОЇ

Задачі, які приводять до поняття похідної

1. Задача про миттєву швидкість

Нехай шлях, пройдений матеріальною точкою за час t, задано формулою $s = s(t)$. Тоді при зміні часу від t до $t + \Delta t$ середня швидкість точки

$$Vc = \frac{s(t+\Delta t)}{\Delta t} = \frac{\Delta s(t)}{\Delta t}.$$

Оскільки навіть при незначній зміні часу Δt значення швидкості при різних t можуть істотно відрізнятися, то актуальним є поняття миттєвої швидкості при значенні часу t, тобто

$$V(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s(t)}{\Delta t}$$

2. Задача про кутовий коефіцієнт дотичної

Розглянемо графік функції $y = f(x)$. Нехай треба провести дотичну до графіка в точці M_0 з абсцисою x (рис. 1). Візьмемо на графіку $f(x)$ довільну точку M з абсцисою $x + \Delta x$. Проведемо січну M_0M.

Означення. *Дотичною до графіка даної функції в точці* M_0 *називається граничне положення січної, яка проходить через точку* M_0 *і довільну точку M графіка за умови, що M прямує вздовж графіка до* M_0.

Кутові коефіцієнти січної і дотичної є відповідно $tg\varphi$ і $tg\alpha$. З означення дотичної маємо

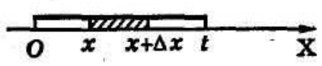
$$tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} tg\varphi$$

Оскільки $tg\varphi = \Delta f(x)/\Delta x$, то

$$tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

3.Задача про густину лінійного стержня

Нехай маємо лінійний стержень, розміщений вздовж осі Ox, і нехай маса його в кожній точці x обчислюється за формулою $m = m(x)$. Щоб визначити густину стержня в точці x, візьмемо деяку частину стержня, яка містить точку x, і знайдемо *середню густину* цієї частини. Під *густиною стержня в точці x* розуміємо границю середньої густини певної частини



стержня за умови, що ця частина стискається до точки x (довжина її прямує до нуля) (рис. 2).

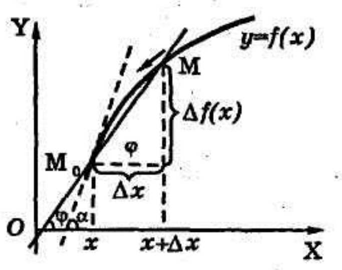


Рис. 2

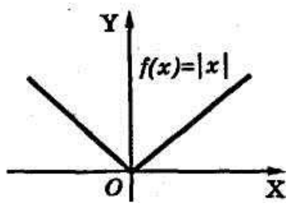


Рис. 1 *Рис. 2*

Отже, густина

$$\rho(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m(x)}{\Delta x}.$$

Усі три задачі, звичайно, доцільно розглядати за умови, коли відповідні границі існують.

Означення похідної. Її практичне тлумачення

Розв'язки розглянутих трьох задач, незважаючи на їхній зміст, з математичної точки зору однакові. Тому сукупність математичних операцій у формулах (1)-(3) є сенс вивчати. Введімо означення.

Означення. Похідною функції $y = f(x)$ в даній точці називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли останній прямує до нуля довільним чином, тобто

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

До поняття похідної І. Ньютон прийшов з міркувань про швидкість руху тіла (він ввів позначення $f(t)$), а Г. Лейбніц* прийшов до цього поняття з геометричних міркувань (він ввів позначення $\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx}$). Позначення похідної (4) запропонував Ж. Лагранж**. У подальшому застосовуватимемо також позначення $y'_x = f'(x)$.

Зазначимо, що довільне прямування Δx до нуля в (4) істотне, бо іноді відповідні границі в (4) справа і зліва можуть бути різними. Так функція $f(x) = |x|$ (рис. 3) при $\Delta x \to 0 - 0$ має границю -1, границю 1 при $\Delta x \to 0 + 0$ в точці $x = 0$.

Беручи до уваги (4) у випадках (1)-(3), дістанемо відповідно

$$v(t) = s'(t), \quad tg\alpha = f'(x), \quad \rho(x) = m'(x).$$

Ці формули виражають відповідно *механічне, геометричне і фізичне* тлумачення похідної.

Наведемо деякі геометричні міркування. Нехай маємо графік функції $y = f(x)$. Тоді рівняння дотичної і *нормалі* (перпендикуляра до дотичної в точці дотику) в точці $(x_0, f(x_0))$ графіка мають відповідно вигляд

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0); \qquad y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

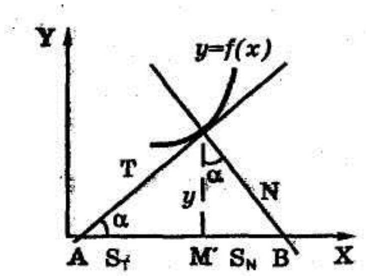


Рис. 4

З дотичною і нормаллю безпосередньо зв'язані *піддотична* і *піднормаль* (відповідно AM' і $M'B$ на рис.4). Згідно з рис. 4 маємо

$$S_T = AM' = |y\cot\alpha| = |f(x)/f'(x)|,$$
$$S_N = M'B = |y\cot\alpha| = |f(x)f'(x)|.$$

Під *кутом* φ *між двома лініями* $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$ розуміють кут між дотичними до них у точці перетину цих ліній. Нехай абсциса цієї точки x_0. Тоді, враховуючи (5), маємо

$$tg\alpha = \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0) f_2'(x_0)}.$$

Введемо ряд термінів і позначень.

Функцію, яка має скінченну похідну в даній точці, називають *диференційованою в цій точці*. Функцію диференційовану в кожній точці інтервалу, називають *диференційованою на інтервалі* (в крайніх точках інтервалу границі в (4) розуміємо як односторонні). Множину всіх функцій, диференційованих на $[a,b]$, позначатимемо через $W_{[a,b]}$. Тоді той факт, що $f(x)$ диференційована на $[a,b]$, можна записати як $f \in W_{[a,b]}$.

Розділ математичного аналізу, в якому вивчають питання. Зв'язані з похідною, називають *диференціальним численням*.

1.3. Диференційованість і неперервність

Зазначимо, що у формулі (4) маємо $\Delta x \to 0$. Якщо $\Delta f(x)$ не прямує до нуля, то $f'(x)$ або не існує, або є нескінченно великою($f'(x) = \infty$). Для існування скінченої похідної залишається випадок, коли $\Delta f(x) \to 0$, тобто випадок неперервної функції. Точніше, слушна така теорема.

Теорема 1) Будь-яка диференційована в точці функція є неперервною в цій точці.

2) Існують неперервні в точках функції, не диференційовані в цих точках.

Доведення. 1) Нехай $f(x)$ диференційована в точці *x*. Отже, існує

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

За теоремою про зв'язок границі функції з нескінченою малою(теорема 2, п. 2.2) в околі точки $\Delta x = 0$ (*x* фіксоване) маємо

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x), \quad \Delta f(x) = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x.$$

Очевидно, що при $\Delta x \to 0$ маємо $\Delta f(x) \to 0$, а це означає, що $f(x)$ є неперервною в точці *x*.

2) Цей пункт ілюструє функція $f(x) = |x|$ (рис. 3), яка є неперервною, але не є диференційованою при $x = 0$ ($f'(0)$ не існує), або функція з вертикальною дотичною (графік однієї з таких функцій показано на рис. 5, тут $f'(0) = \infty$, бо похідна дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної).

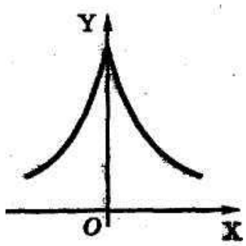


Рис.5

Приклад функції, неперервної на інтервал і не диференційованої в жодній точці цього інтервалу, належить А. Комогорову*.

З наведеної теореми випливає, що множина диференційованих на даній множені функцій є підмножиною множини неперервних там же функцій, тобто

$$W_{[a,b]} \subset C_{[a,b]}.$$

§ 2. ТЕХНІКА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЙ

2.1 Правила диференціювання

Основні правила диференціювання у вигляді теорем.

Теорема 1. *Похідна сталої дорівнює нулю.*
Твердження очевидне, оскільки для сталої функції

$$f(x) = c, \quad \Delta f(x) = 0$$

Для довільного *x*.

Теорема 2. *Похідна суми скінченого числа диференційовних функцій дорівнює сумі похідних цих функцій*.

Доведення. Розглянемо суму двох диференційованих функцій $f(x) = u(x) + v(x)$.
Згідно з (4)

$$\Delta f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x)\right) - \left(u(x) + v(x)\right)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} = u'(x) + v'(x).$$

Доведений результат неважко перенести на суму скінченого числа функцій.

Теорема 3. *Похідна добутку двох дифенційованих функцій* $u = u(x)$ *і* $v = v(x)$ *має вигляд.*

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Доведення. Зазначимо, що оскільки $u(x)$ і $v(x)$ диференційовані, то вони є неперервними у відповідних точках. Розглянемо функцію $f(x) = u(v(x))$.

Маємо

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}=\{\mp u(x)v(x+\Delta x)\}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}v(x+\Delta x)\right)+\lim_{\Delta x\to 0}\left(u(x)\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right)=$$

$$=u'(x)v(x)+u(x)v'(x).$$

Тут використано неперервність $v(x)\left(\lim\limits_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)=v(x)\right)$.

Звичайно теорему можна поширити на випадок скінченого числа множників, застосовуючи що разу похідну добутку двох функцій.

Наслідок. *Сталий множник можна виносити за знак похідної, тобто*

$$(cf(x))'=cf'(x).$$

Теорема 4. *Похідна части двох деференційовних функцій* $u=u(x)$, $v=v(x)$, $(v(x)=0$ в околі точки *x*) має вигляд

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

Доведення цієї теореми аналогічно доведенню теореми 3.

Теорема 5. (похідна складеної функції). *Нехай функції* $y=f(u)$, $u=u(x)$ *диференційовані у відповідних точках. Тоді похідна функції існує* $y=y(u(x))$, *і дорівнює*

$$y'_x=y'_u u'_x$$

Доведення. Ураховуючи співвідношення між діференційовністю та неперервністю функцій маємо

$$(\Delta x\to 0)\Rightarrow(\Delta u\to 0)\Rightarrow(\Delta y\to 0).$$

Застосуємо теорему 2. (2.2). дістанемо

$$\left(y'_u = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}\right) \Rightarrow \left(\frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u + \alpha(\Delta u)\right) \Rightarrow \left(\Delta y = y'_u \Delta u + \alpha(\Delta u)\Delta u\right).$$

Останню рівність, де є нескінченно малою при $\Delta u \to 0$, поділимо на і перейдемо до границі при $\Delta x \to 0 \left((\Delta x \to 0) \Rightarrow (\Delta u \to 0)\right)$. Знаходимо

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u + \alpha(\Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x}, \quad y'_x = y'_u u'_x.$$

Останній результат означає, що похідна складеної функції за початковим аргументом дорівнює добутку похідної цієї функції за проміжним аргументом і прохідної проміжного аргументу за початковим.

Звертаємо увагу на те, що в результаті застосування операції дифиренцювання певної функції одна функція відображається на іншу , тобто така операція є оператором. Ураховуючи теорему 2 і наслідок з теореми 3 (п. 2.1), доходимо висновку, що оператор диференціювання лінійний.

2.2. Диферніцювання основних елементарних функцій

1. Диференціювання тригонометричних функцій.

1) $f(x) = \sin x.$

Маємо

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right) = 1\cos x = \cos x.$$

Отже, $(\sin x)' = \cos x.$

Тут скористалися першою стандартною границею і перервні сю функції $f(x) = \cos x$. Неперервністю функцій користуємося далі, не оговорюючи цього:

2) $f(x) = \cos x.$

Маємо $(\cos x)' = \sin x.$ (див. п. 1). Можна провести пряме доведення, як у випадку функції $f(x) = \sin x.$

3) $f(x) = \tan x.$

Скористаємося формулою похідної дробу:

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\sec^2 x.$$

4. $f(x) = \mathrm{ctg} x,\ \ f(x) = \sec x,\ \ f(x) = \mathrm{cosec} x.$

Маємо

$$(\mathrm{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin x} = -\mathrm{cosec} x,$$

$$(\sec x) = \sec x\ \mathrm{tg} x,$$

$$(\mathrm{cosec} x) = -\mathrm{cosec} x\ \mathrm{tg} x.$$

2. Диференціювання логарифмічної функції $f(x) = \log_a x$.

Спочатку застосовуємо другу стандартну границю, а потім перетворимо логарифм до основи $e(\ln e = 1)$. Маємо

$$(\log_a x)' = \lim_{\Delta x\to 0}(\log_a(x+\Delta x) - \log_a x)/\Delta x =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\log_a \frac{x+\Delta x}{x}\right)/\Delta x = \lim_{\Delta x\to 0}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{1/\Delta x} =$$

$$= \log_a \lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{1/\Delta x} = \log_a \lim_{\Delta x\to 0}\left(\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}\right)^{1/x} =$$

$$= \log_a e^{1/x} = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1\cdot 1}{x\ln a}.$$

Отже, $(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1\cdot 1}{x\ln a}$. В окремому випадку коли, маємо $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Для знаходження похідних інших функцій використаємо попереднє Логарифмування відповідних виразів, а потім правило Диференціювання складеної функції (5). Така процедура називається *логарифмічний диференціюванням*.

3. Диференціювання степеневої функції $y = x^{\alpha}, \alpha \in R$.

Нехай $x^{\alpha} > 0$. Тоді $\ln y = \alpha \ln x$ і $\frac{1}{y} y' = \alpha \frac{1}{x}$.

Звідси $y' = \alpha \frac{y}{x} = \alpha \frac{x^{\alpha}}{x} = a x^{\alpha - 1}$, тобто $\left(x^{a}\right)' = \alpha x^{\alpha - 1}$.

Якщо $x^{\alpha} < 0$, то результат буде той самий (логарифмуємо - y).

4. Диференціювання показникової функції $y = a^{x}$.

Очевидно, що $a^{x} > 0$. Тоді $\ln y = x \ln a$ і $\frac{1}{y} y' = \ln a$. Звідси $y' = y \ln a$, або $y' = a^{x} \ln a$.

Остаточно

$$\left(a^{x}\right)' = a^{x} \ln a.$$

В окремому випадку, коли $a = e$, маємо

$$\left(e^{x}\right)' = e^{x}.$$

Таким чином, порядок з функцією $f(x) = 0$ функція $f(x) = e^{x}$ інваріантно щодо операції диференціювання.

5. Диференціювання обернених тригонометричних функцій.

Означення. *Функція* $x = f^{-1}(y)$ *називається оберненою до прямої функції* $y = f(x)$ *яка відображує множину Y на X, якщо* f^{-1} *відображує Y на X із зображенням тієї самої відповідності між елементами.*

Пряма й обернена функції часто позначається як $y = y(x)$ та $x = x(y)$.

Функція, графік якої зображено на рис. 6, має обернену, функція на рис. 7 – не має оберненої, бо одному значенню відповідає більше ніж одне значення x (на рис. 7 x_1 і x_2). На рис. 6 зображено графік монотонної (зростаючої) функції, на рис. 7 – не монотонної. Отже, справедлива така теорема.

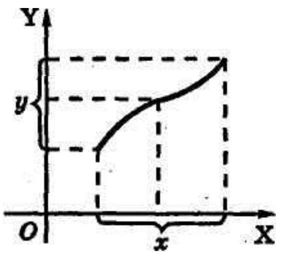


Рис. 6

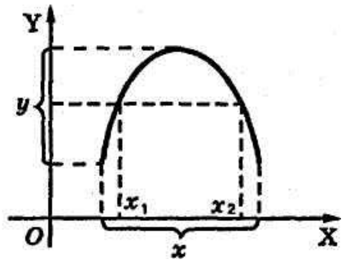


Рис. 7

Теорема 1. *Будь-яка монотонно зростаюча чи монотонно спадна функція має обернені функцію.*

Графіки прямої і оберненої функції, але якщо обернену функцію записати у вигляді $y = f^{-1}(x)$ (x і y поміняти місцями), то відповідні графіки є дзеркальними відображенням один одного, щодо лінії $y = x$.

Теорема 2. *Похідні прямої* $y = y(x)$ *та оберненої* $x = x(y)$ *функцій зв'язані співвідношенням*

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}.$$

Нехай $y = y(x)$ і $x = x(y)$ - взаємно оберненні функції. Розглянемо складену функцію $y = y\left(x(y)\right)$. Про диференціюємо її по y. Проміжним аргументом є x. Тоді згідно з (6)

$$(y'_y = y'_x \cdot x'_y) \Rightarrow (1 = y'_x \cdot x'_y) \Rightarrow \left(y'_x = \frac{1}{x'_y} \right).$$

Тепер про диференціювання прямих тригонометричних функцій.

Для функції $y = \arcsin x$ оберненою $x = \sin y$, причому $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ (за теоремою про існування оберненої функції). Про диференціюємо останню і врахуємо. Що для вказаних значень $\cos y \ge 0$. Маємо

$$\left(x'_y = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}\right) \Rightarrow \left(y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \right).$$

Отже,

$$\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Аналогічно

$$(\arccos x)' = 1/\sqrt{1-x^2},$$
$$(\operatorname{arctg} x)' = 1/\left(1+x^2\right),$$
$$(\operatorname{arcctg} x)' = 1/\left(1+x^2\right)$$

Отримані для основних елементів функцій результати зведемо в таблицю, розглядаючи відповіді функції як складені і враховуючи (5).

Таблиця похідних

1. $\left(u^{\alpha}\right)' = \alpha u^{\alpha-1}u',\ \left(\dfrac{1}{u}\right)' = \dfrac{1}{u^2}u',\ \left(\sqrt{u}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'.$

2. $\left(a^{u}\right)' = a^{u}\ln u',\ \left(e^{u}\right)' = e^{u}\cdot u'.$

3. $\left(\log_a u\right) = \dfrac{1}{u}\log_a e\cdot u' = \dfrac{1}{u}\cdot\dfrac{1}{\ln a}\cdot u',\ \left(\ln u\right)' = \dfrac{1}{u}\cdot u'.$

4. $\left(\sin u\right)' = \cos u\cdot u'.$

5. $\left(\cos u\right)' = \sin u\cdot u'.$

6. $\left(\operatorname{tg} u\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 u}u' = \sec^2 u\cdot u'.$

7. $\left(\operatorname{ctg} u\right)' = \dfrac{1}{\sin^2 u}u' = \operatorname{cosec}^2 u\cdot u'.$

8. $\left(\sec u\right)' = \sec u\cdot\tan u\cdot u'.$

9. $\left(\operatorname{cosec} u\right)' = \operatorname{cosec} u\cdot\cot u\cdot u'.$

10. $\left(\arcsin u\right)' = \left(1/\sqrt{1-u^2}\right)\cdot u'.$

11. $\left(\arccos u\right)' = -\left(1/\sqrt{1-u^2}\right)\cdot u'.$

12. $(\mathrm{arctg}u)' = (1/(1+u^2))\cdot u'.$

13. $(\mathrm{arcctg}u)' = -(1/(1+u^2))\cdot u'.$

Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 1. Знайти похідні функцій

1) $f(x) = e^{2x}\cos 3x.$

Розв'язання. $f(x) = \left(e^{2x}\right)'\cos 3x + e^{2x}(\cos 3x)' = 2e^{2x}\cos 3x - 3e^{2x}\sin 3x.$

2) $f(x) = \mathrm{arctg}2x - \dfrac{\sin^2 3x}{x^3}.$

Розв'язання.

$$f'(x) = \frac{1}{1+(2x)^2}\cdot 2 - \frac{(\sin 3x)x^3 - \sin^2 3x\left(x^3\right)'}{\left(x^3\right)^2} =$$

$$= \frac{2}{1+4x^2} - \frac{2\sin 3x(\sin 3x)x^3 - 3x^3\sin^2 3x}{x^6} = \frac{2}{1+4x^2} - \frac{\sin 3x^3 6x - 3x^2\sin^2 3x}{x^6}.$$

Приклад 2. Знайти похідну степеневої показникової функції $y = (u(x))^{(x)} = u$.

Розв'язання. Нехай $u(x) > 0$. Тоді, застосовуючи логарифмічне диференціювання, маємо

$$\ln y = v\ln u,$$

$$\frac{1}{y}y' = v'\ln u + v\frac{1}{u}u', \quad y' = y\left(v'\ln u + \frac{v}{u}\cdot u'\right),$$

$$y' = u'\left(v'\ln u + \frac{v}{u}\cdot u\right), \quad y' = u'\ln uv' + vu^{v-1}u'.$$

Результат буде той самий. Якщо задану функцію спочатку продиферинціювати як степеневу, а потім як показникову і результати додати.

2.3. Диференціювання неявних функцій

Нехай маємо функціональну залежність $y = f(x)$, або $y - f(x) = 0$, тобто співвідношення $F(x, y) = 0$.

Означення. *Співвідношення* $F(x, y) = 0$ *визначає неявну функцію* $y = f(x)$*, якщо* $F(x, f(x)) = 0$ *для всіх значень x.*

Наприклад, $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ визначаємо неявну функцію $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$, бо $x^2 + \left(-\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 - R^2 = 0$ для всіх значень x.

Наявні функції диференціюють як складені.

Приклад. Знайти y', якщо $x^2 y - x + 2y = 0$.

Розв’язання. Маємо

$$2xy^3 - 3x^2 y^2 y' - 3x^2 + 2y' = 0,$$
$$y'\left(2 - 3y^2 x^2\right) = 3x^2 - 2xy^3,$$
$$y' = \left(3x^2 - 2xy^3\right) / \left(2 - 3x^2 y^2\right).$$

Звертаємо увагу на те, що похідна неявної функції є також неявною функцією.

2.4. Диференціювання параметрично заданих функцій

Теорема. *Нехай, маємо параметрично задану функцію*

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t), \end{cases}$$

причому функції $x = x(t)$, $y = y(t)$ *диференційовані при певних* t, a $x(t)$ *має обернену функцію. Тоді*

$$y'_x = y'_t / x'_t.$$

Доведення. Нехай обернена для $x(t)$ і $t = t(x)$. Побудуємо складену функцію $y = y(t(x))$. Тут x – початковий аргумент, t - проміжний. Про диференціюємо останню функцію по x. Дістанемо

$$\left(t'_x = \frac{1}{x'_t}\right),$$

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \frac{1}{x'_t} = y'_t / x'_t.$$

2.5. Диференційовані гіперболічних функцій

Гіперболічні функції дуже схожі на тригонометричні. Їх широко застосовують на практиці. Визначають гіперболічний синус, косинус, тангенс і котангенс так:

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right), \quad \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right),$$
$$\operatorname{th} x = (\operatorname{sh} x)/(\operatorname{ch} x), \quad \operatorname{cth} x = (\operatorname{ch} x)/(\operatorname{sh} x).$$

Неважко впевнитися в справедливості тотожності

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{ch}^2 x = 1$$

(вона аналогічна відомій тотожності $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$), а також у тому, що

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x,$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch} x}, \quad (\operatorname{cth} x)' = \frac{-1}{\operatorname{sh} x}.$$

§ 3. ДИФЕРЕНЦІАЛ.
ПОХІДНІ Й ДИФЕРЕНЦІАЛИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

3.1. Диференціал

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована точці *x*. Тоді

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

За теоремою 2 (п. 2.2.) маємо (α - нескінчена мала при $\Delta x \to 0$)

$$\left(\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x) \right) \Rightarrow \left(\Delta f(x) = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x \right).$$

Тобто приріст функції можна подати у вигляді двох додатків. Один залежить від Δx лінійного, а другий містить степені Δx вищих за перший.

Означення. *Диференціалом функції називається головна частина її приросту, лінійна щодо приросту аргументу, тобто*

$$dy = df(x) = f'(x)\Delta x.$$

Для $f(x) = x$ маємо $dx = \Delta x$, тобто диференціал і приріст аргументу збігаються. Отже,

$$(dy = f'(x)dx) \Rightarrow \left(f'(x) = \frac{dy}{dx} \right),$$

тобто, формулу обчислення диференціала можна подати у вигляді $df(x) = f'(x)\Delta x$ так і $df(x) = f'(x)dx.$. З останньої формули маємо

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}.$$

Отже, похідну функції можна подати і як відношення двох провідних диференціалів. Раніше ж ми праву частину останньої формули розуміли як єдиний символ.

Розглянемо рис.8. З ΔMAB маємо $(AM = MB\tan\alpha) \Rightarrow (AB = f'(x)\Delta x) \Rightarrow (AB = fd(x))$.

Таким чином, геометричне тлумачення диференціала функції полягає в тому, що останній являє собою приріст *ординати дотичної* до даної функції (на рис. 8 приростом функції є $M'B$, а диференціалом - AB).

Сформульований результат широко використовують на практиці.

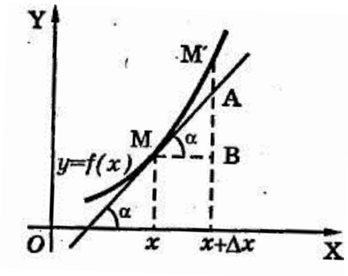


Рис. 8

З означення (7) випливає, що властивості диференціала аналогічні властивостям похідної. Наприклад

$$d(u+v)=du+dv; \quad d(uv)=vdu+udv.$$

3.2. Застосування диференціала

Застосування диференціала ґрунтується на наближеній рівності

$$\Delta f(x)=df(x).$$

1. Наближені обчислення.

Нехай відомо значення $f(x_0)$. Тоді для $f(x_0+h)$ згідно з (8) маємо

$$f(x_0+h)-f(x_0)=df(x_0),$$

або

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0)h.$$

Приклад. Відомо, що $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$. Треба знайти $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{20}\right)$.

Розв’язання. Застосовуючи (9), знаходимо

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{20}\right)\approx\sin\frac{\pi}{6}+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\frac{\pi}{20}\approx 0{,}5453.$$

За таблицею синусів $\sin 30^\circ\approx 0{,}5446$, тобто знайдений результат непоганий.

2. Оцінка похибки.

Нехай маємо $y=f(x)$ залежність, а x вимірюється з похибкою Δx, яка при обчислені призводить до похибки Δy. Застосовуючи (8) дістаємо

$$|\Delta y|\approx|dy|=|df(x)|\approx|f'(x)||\Delta x|.$$

Приклад 2. Знайти величину похибки при обчислені $\ln 2{,}1$.

Розв'язання. Оскільки $x = 2{,}1$, похибка округлена $\Delta x = 0{,}005$. Тоді

$$|\Delta y| \approx \frac{1}{1{,}2} 0{,}05 \approx 0{,}0237.$$

3.3. Похідні вищих порядків

Оскільки $y = f(x)$ похідна $f'(x) = \varphi(x)$ є деякою функцією. То природно поставити питання про її диференціювання. Приходимо *до другої похідної* функції $f(x)$. Аналогічно приходимо до поняття *похідної довільного порядку*. Тобто

$$y'' \overset{\text{def}}{=} (f'(x))', \quad y''' \overset{\text{def}}{=} (f''(x))', \ldots y^{(n)} \overset{\text{def}}{=} (f^{(n-1)}(x))', \quad n \in N.$$

Якщо функція задана параметрично, то

$$y''_x \overset{\text{def}}{=} (y')' / x'_1$$

Механічне тлумачення другої похідної полягає в тому, що така похідна є прискоренням точки, яка рухається вздовж траєкторії, що є графіком даної функції. Безпосередньо геометричної інтерпретації друга похідна не має, але певні міркування щодо знака і значення у вказаному напрямі наведемо пізніше.

Приклад. Знайти $f^{(n)}(x)$ для $f(x) = \sin x$.

Розв'язання. Маємо

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right),$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin(\pi + x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right),$$

$$f'''(x) = \cos x = \sin\left(3\frac{\pi}{2} + x\right),$$

$$f^{iV}(x) = -\sin x = \sin(\pi + x) = \sin\left(4\frac{\pi}{2} + x\right),$$

………………………………………………………

Отже $$f^{(n)}(x) = -\sin\left(n\frac{\pi}{2} + x\right), \quad \text{для } \mathrm{n} \in \mathrm{N}.$$

3.4. Диференціальні вищих порядків

Як у випадку похідних вищих порядків має місце поняття диференціалів вищих порядків. Наведемо означення.

Означення. $d^n f(x) \overset{\text{def}}{=} d(d^{n-1} f(x))$ для довільного $n \in N$.

Звертаємо увагу, що згідно з означеннями як похідні, так і диференціали довільних порядків зводяться до відповідних понять першого порядку.

Приклад. Знайти формулу для диференціала другого порядку двічі диференційованої функції $y = f(x)$.

Розв'язання. Згідно з означеннями маємо(dx - стала, змінною x)

$$d^2 f(x) = d(df(x)) = d(f'(x)dx) = f''(x)(dx)^2.$$

Міркуючи так, як і в попередньому прикладі, приходимо до формули диференціала n-го порядку раз диференційованої функції ($n \in N$):

$$d^2 f(x) = f^{(n)}(x)(dx)^n.$$

3.5. Диференціал складеної функції

Нехай $y = y(u)$, а $u = u$. Побудуємо складену функцію $y = y(u(x))$. Тоді (якщо це можливо), $y'_x = y'_u u'_x$ а диференціал набирає вигляду

$$dy = y'_u u'_x dx = f'(u)du,$$

тобто *форма першого диференціала не залежить від того, чи є аргумент функції незалежною зміною, чи є в свою чергу функцією другого аргументу (інваріантність форми першого диференціала).*

Для диференціала вищих порядків це твердження не виконується.

§ 4. ТЕОРЕМИ ПРО ДИФЕРЕНЦІЙОВАНІ ФУНКЦІЇ

Сформулюємо кілька важливих теорем, які є проміжною ламкою між теорією і технікою диференціювання та застосування їх на практиці, зокрема в геометрії.

4.1 Теорема Ролля

Теорема. *Якщо функція* $y = f(x)$ *така, що*

1) $f \in C_{[a,b]}$,

2) $f \in W_{[a,b]}$,

3) $f(a) = f(b)$,

то існує хоча б одна точка с, $c \in (a,b)$ *що* $f'(c)$.

Доведення. 1) Нехай $f(x) = \text{const}\,\forall\; x \in [a,b]$. Тоді $f(x) = 0 \forall x \in [a,b]$ і c - довільна точка [a, b] (9).

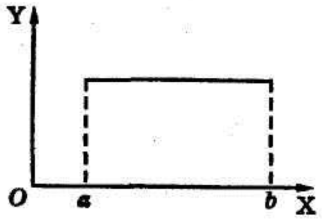


Рис. 9

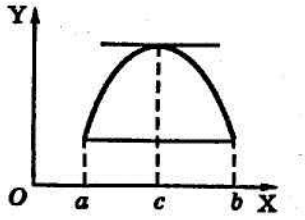


Рис. 10

2) Нехай $f(x) \neq \text{const}$. Оскільки $f \in C_{[a,b]}$, то за теоремою 2 (п. 4.3) $f(x)$ набуває на [a, b] більшого і найменшого значень, при ому хоча б одне з них – у внутрішній точці інтервалу (внаслідок умови 3) теорема Ролля). Нехай $f(x)$ набуває *найбільшого* значення в точці (рис. 10). Тоді $f(c+\Delta c) - f(c) < 0$ як для $\Delta c < 0$, так і $\Delta c > 0$. При $\Delta c < 0$ і $\Delta c > 0$ маємо відповідно

$$\frac{f(c+\Delta c) - f(c)}{\Delta c} > 0, \quad \frac{f(c+\Delta c) - f(c)}{\Delta c} < 0.$$

В останніх нерівностях перейдемо до границі. Використаємо теорему про граничний перехід в нерівності (5, 3.1) та означення похідної (4). Маємо відповідно

$$f'(c) \geq 0, \quad f'(c) \leq 0.$$

Ураховуючи єдність границі (теорема 7, 3.1), дістанемо $f'(c) = 0$.

Якщо ж $f(x)$ набуває *найменшого* значення у внутрішній точці c інтервалу [a, b], то доведення теореми аналогічне.

Усі умови теореми суттєві, зокрема неперервність. Так, для $f(x) = |x|$ на [- a, a] точки c, де $f'(c) = 0$ не існує.

Геометричне тлумачення теореми полягає в тому, що на графіку функції, яка задовольняє умови теореми, існує хоча б одна точка, в якій дотична до графіка паралельна осі Ox.

4.2. Теорема Лангранжа

Теорема. *Якщо функція* $f(x)$ *така, що:*

1) $f \in C_{[a,b]}$,

2) $f \in W_{[a,b]}$,

то існує хоча б одна така точка c, $c \in (a,b)$ *що*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a},$$

або

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

(формула Лангранжа).

Доведення. Нехай $f(x)$ задовольняє умови теореми. Складемо рівняння січної, яка проходить через точки A і B (рис. 11). Використаємо рівняння прямої, яка проходить через дві точки $A(a, f(a))$ і $B(b, f(b))$, а саме

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)}.$$

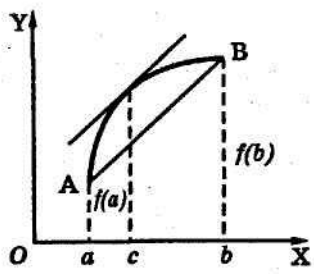


Рис. 11

Звідси

$$y = f(a) + \frac{x-a}{b-a}(f(b) - f(a)).$$

Побудуємо проміжну функцію $F(x)$, яка являє собою різницю між ординатами $f(x)$ і ординатами січної, тобто

$$F(x) = f(x) - y = f(x) - f(a) - \frac{x-a}{b-a}(f(b) - f(a)).$$

Функція $F(x)$ задовольняє умови теореми Лагранжа (їх задовольняють $f(x)$ і лінійна функція y) а також умови $F(b) = F(a) = 0$ (згідно з побудовою $F(x)$ проте це можна перевірити безпосередньо). Отже $F(x)$, задовольняє теорему Ролля, а це означає, що існує точка $c \in (a,b)$ така, що $F'(c) = 0$. Знайдемо похідну

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a},$$

Звідки

$$\left(F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = 0 \right) \Rightarrow \left(f'(c)\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = 0 \right).$$

Розглянемо геометричне тлумачення теореми. З ΔABC маємо $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$, проте $\mathrm{tg}\alpha = f'(c)$, тобто дістаємо (9) і (10). *Отже, геометричне тлумачення теореми Лагранжа полягає в тому, що на графіку функції . яка задовольняє на певному інтервалі умови теореми, існує хоча б одна така точка, якій дотична до графіка функції паралельні* *січній, що проходить через крайні точки графіка функції на цьому інтервалі.*

Прокоментуємо твердження (11). Як відомо, $\Delta f(x) = df(x)$ а це можна записати у вигляді

$$\Delta f(x) = f(b) - f(a) = f'(a) \cdot (b-a).$$

Маємо наближену рівність (11) точна, але точка c неконструктивна (теорема Лагранжа стверджує, що вона лише існує).

Формулу Лагранжа називають формулою скінчених приростів (і рівності (10) ні $(b-a)$, ні $(f(b) - f(a))$ не прямують до нуля). Теорему Лагранжа з огляду на її глибину і широкі застосування називають ще основною теоремою диференціального числення.

4.3. Правило Лопіталя

Теорема. *Якщо функції* $f_1(x)$ *і* $f_2(x)$ *такі, що*

1) $f_1 \in C_{[x_0, x]},\ f_1 \in W_{[x_0, x]}$,
2) $f_2 \in C_{[x_0, x]},\ f_2 \in W_{[x_0, x]}$,
3) $f_1(x_0) = f_2(x_0) = 0$,

то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)},$$

якщо остання границя існує.

Сформульовану теорему називають *теоремою Лопіталя*, а правило розкриття невизначеності $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ за допомогою цієї теореми (12) – *правилом Лопіталя*.

Доведення. Оскільки обидві функції і на задовольняють теорему Лагранжа, то застосувавши (11), матимемо

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{f_1(x) - f_1(x_0)}{f_2(x) - f_2(x_0)} = \frac{f_1'(c_1)}{f_2'(c_2)}, \quad c_1 \in (x_0, x), \quad c_2 \in (x_0, x).$$

Проте насправді маємо більш тонкий результат а саме

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{f_1'(c)}{f_2'(c)}.$$

Перейшовши в останньому співвідношенні до границі при $x \to x_0$ отримаємо (12).

Зауваження

1. Правило Лопіталя можна застосувати повторно.

2. Застосування правила Лопіталя не виключає застосування стандартних границь та інших способів розкриття невизначеності.

3. За допомогою правила Лопіталя можна розкривати й інші невизначеності ($\frac{\infty}{\infty}$ - безпосередньо, інші – після перших перетворень)

Приклад. 1. Знайти границі

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2\ln x)$; 3) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin 3x} = a.$

Оскільки всі границі відповідних відношень похідних існують, то розв'язання прикладів писатимемо у формі

$$\lim_{x\to 0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = \dots$$

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{x} = 1;$

2) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2\ln x) = (0\cdot\infty) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{2} = 0;$

3) $$a = \lim_{x\to 0} x^{\sin 3x} = (0^0), \quad \ln a = \ln\lim_{x\to 0} x^{\sin 3x} = \lim_{x\to 0}(\sin(3x)\cdot\ln x) =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)\cdot\ln x\cdot 3x}{3x} = \lim_{x\to 0}(3x\ln x) = (0\cdot\infty) = 0.$$

Тут використовуємо ті самі міркування, то й у прикладі 2).

Оскільки $\ln a = 0$, то $a = 1$.

4.4. Формула Тейлора

1. Ньютон поставив перед своїми учнями К. Маклореном, Б. Тейлором задачу про *апроксимацію* (наближення) функції многочленом. Обидва математика розв'язували цю задачу незалежно один від одного, проте однаковими методами. Отримані ними формули відрізняються в деталях. Наведемо їхні міркування.

Нехай маємо многочлен n-го степеня

$$f(x) = P_n(x).$$

Запишемо цей многочлен за зростаючими степенями різниці $x - x_0$ де x - довільна точка з R, тобто

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \dots + a_n(x-x_0)^n,$$

де $a_0, a_1, \dots, a_n$ - невизначені коефіцієнти.

Знайдемо невизначені коефіцієнти a. Маємо

$$P_n'(x) = a_0 + 2a_1(x - x_0) + 3a_2(x - x_0)^2 + \ldots + na_n(x - x_0)^{n-1},$$

$$P_n''(x) = 2a_0 + 2 \cdot 3a_1(x - x_0) + \ldots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2},$$

$$P_n'''(x) = 3 \cdot 2a_0 + \ldots + n(n-1)(n-2)a_n(x - x_0)^{n-3},$$

…………………………………………………………………………

$$P_n^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot 1a_n, \quad P_n^{(k)}(x) = 0, \quad k > n.$$

Звідси

$$P_n'(x_0) = a_0, \quad P_n''(x_0) = a_1, \quad P_n''(x_0) = 2a_2,$$

$$P_n'''(x_0) = 3!a_3, \ldots, P_n^{(n)}(x_0) = n!a_n.$$

Нарешті

$$a_0 = P_n(x_0), \quad a_1 = P_n'(x_0), \quad a_0 = \frac{P_n''(x_0)}{2!}, \ldots, a_0 = \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Тоді шукана формула $P_n(x)$ для набирає вигляду

$$P_n(x) = P_n(x_0) + P_n'(x_0)(x - x_0) + \frac{P_n''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 +$$

$$+ \ldots + \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Це і є формула Тейлора для многочленів, а формула Маклорена – її окремий випадок при $x = 0$, тобто

$$P(x) = P_n(0) + P_n'(0)x + \frac{P_n''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{P_n^{(n)}(0)}{n!}x.$$

Довільну функцію (не многочлен) не можна подати за допомогою скінчених сум (13) або (14). Проте таку функцію можна подати за формулою Лагранжа на $[x, x_0]$, тобто

$$f(x) = f(x_0) + f'(c)(x - x_0), \quad c \in (x_0, x),$$

де $f'(x)$ обчислена в точці c, а не x_0 як в (13). З огляду на останній вираз для $f(x)$ і (14) істотно вважати, що

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

де $P_n(x)$ як в (13) або $R_n(x)$ (14). Називають *залишковим членом* відповідної формули. Лагранж довів, що коли $f(x)$ має $n + 1$ похідну, то

$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n!+1)}(x - x_0)^{n+1}, c \in (x_0, x)((x, x_0)).$$

Існують інші формули для $R_n(x)$.

Коли вважати, що 0! = 1, то формули Тейлора і Маклорена і залишковим членом у формі (15) набирають вигляду

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-x_0)^{n+1}+\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^n, c\in(0,x).$$

Приклад 1. Подати за формулою Маклорена

1) $f(x)=e^x$, 2) $f(x)=\sin x$, 3) $f(x)=\cos x$.

Розв'язання. 1) Маємо $f(0)=f'(0)=\ldots=f^{(n)}(0)=e^0=1, f^{n+1}(c)=e^c$.

Отже $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}+\dfrac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$.

Очевидно $e^x\approx 1+x+\dfrac{x^2}{2!}$, тобто експоненціальну функцію замінили параболою.

2) Оскільки $f^{(n)}(x)=\sin\left(n\dfrac{\pi}{2}+x\right)$, то $f(0)=0$, $f'(0)=0$, $f''(0)=0$, $f'''(0)=-1,\ldots$, звідки $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\ldots+\dfrac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n!}x^n+\dfrac{\sin\left((n+1)\frac{\pi}{2}+c\right)}{(n+1)!}x^{n+1}$.

Отже, дістанемо, наприклад, $\sin x\approx x, \sin x\approx x,-\dfrac{x^3}{6}$.

3) Маємо

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{\cos n\frac{\pi}{2}}{n!}x^n+\frac{\cos\left((n+1)\frac{\pi}{2}+c\right)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Заміна довільної функції лінійної називають *лінеаризацією* цієї функції. Лінеаризацією функції можна виконати. Зокрема, за допомогою формули Тейлора при n = 0 (власне, формула Лагранжа).

§ 5. ЕЛАСТИЧНІСТЬ ФУНКЦІЙ

5.1. Означення та обчислення еластичності

Похідна функції залежить від одиниць виміру аргументу та функції. В деяких випадках (переважно в економіці) для вимірювання швидкості зміни функції використовується безрозмірну величину, яку називають *еластичністю функції*. Перейдемо до відповідних означень.

Означення. *Відносним приростом деякої величини називається відношення приросту цієї величини до її початкового значення.*

Якщо маємо функцію $y = f(x)$. То відносні прирости аргументу та функції є відповідно величини $\delta\, x = \dfrac{\Delta x}{x}$ та $\delta\, x = \dfrac{\Delta f(x)}{f(x)}$.

Введемо означення еластичності.

Означення. *Еластичністю функції* $f(x) > 0$ *в точці* $x > 0$ *називається величина*

$$E_f(x) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta f(x)}{\delta x}.$$

Очевидно, для скінчених значень той факт, що $\delta\, x \to 0$ еквівалентний тому, що $\Delta x \to 0$.

Враховуючи це, маємо

$$E_f(x) = \lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f(x)}{f(x)} \cdot \frac{x}{\Delta x} \right) = \frac{x}{f(x)} \lim_{\delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{df(x)}{dx} \cdot \frac{x}{f(x)} = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)}.$$

Отже, для обчислення еластичності зручно користуватися формулою

$$E_f(x) = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)}.$$

Приклад. Знайти еластичність для $f_1(x) = x^2$ і $f_2(x) = x^3$.

Розв’язання. Враховуючи (15), маємо $E_{f_1}(x) = 2, \quad E_{f_2}(x) = 3$.

5.2. Властивості еластичності

Встановимо деякі властивості еластичності. Які дуже корисні при її застосуванні.

1) $\operatorname{sign} E_f(x) = \operatorname{sign} E_f(x) \operatorname{sign} E'_f(x)$.

Властивість стає очевидною, якщо враховувати (15) і той факт, що $x > 0$, та $f(x) > 0$.

Наслідок. Для зростаючої функції еластичність набуває додатніх значень, для спадної – від'ємних.

2) Еластичність є безрозмірною величиною, що випливає з її означення.

3) $E_y(x) = \dfrac{1}{E_x(y)}$.

$$E_y(x) = y'_x \cdot \frac{x}{y} = \frac{1}{x'_y \cdot \frac{y}{x}} = \frac{1}{E_x(y)}.$$

4) Має місце формула

$$E_f(x) = \frac{d(\ln f(x))}{d(\ln x)} = \frac{d(\log_a f(x))}{d(\log_a x)}$$

для довільного $a > 0, a \neq 1$.

$$E_f(x) = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)} = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)} \cdot \frac{dx}{dx} = \frac{f'(x)dx}{f(x)} \cdot \frac{1}{\frac{1}{x}dx} =$$

$$= \frac{d(\ln f(x))}{d(\ln x)} = \frac{d(\log_a f(x))}{d(\log_a x)}.$$

Для доведення здійснили перехід від натурального логарифма до логарифма з основою *a*.

Наслідок. $E_{uv}(x) = E_u(x) + E_v(x),$

де $u = u(x); v = v(x).$

5) Для $f(x) = ax^b \quad E_f(x) = b.$

$$E_f(x) = abx^{b-1}\frac{x}{ax^b} = \frac{ab}{a} \cdot \frac{x^b}{b^b} = b.$$

Тут застосовували формулу (15).

Розділ III ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ

§ 1. Дослідження функцій за допомогою похідної

За допомогою похідної можна визначити багато елементів поведінки функцій, зокрема, знайти інтервали монотонності, опуклості, упру гості. А також точки екстремумів і перегину.

1.1. Монотонність функцій

Теорема. *Якщо* $f \in W_{(a,b)}$ *то* $f(x)$ *зростає (спадає) на* (a,b), *коли для довільного* $x(a,b)$ $f'(x) > 0$ $(f(x) < 0)$.

Доведення. Нехай $x_1 < x_2$ - довільної точки з (a,b). За теоремою Лагранжа

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), c \in (x_1, x_2).$$

Оскільки $x_2 - x_1 > 0$, то $\operatorname{sign}(f(x_2) - f(x_1)) = \operatorname{sign} f'(c)$. Отже, при $f'(c) > 0$ маємо $f(x_2) - f(x_1) > 0$, тобто $f(x_2) > f(x_1), f(x)$ зростає. Випадок розглядаємо аналогічно. Оскільки результат виконується для довільних x_1 і x_2, то він справедливий для всього інтервалу (a,b).

Пропонуємо самостійно сформулювати обернене твердження.

1.2. Екстремум функцій

Почнемо з означення.

Означення. *Точка* x_0 *називається точкою максимуму (мінімуму) функції* $f(x)$, *якщо існує такий окіл* U_{x_0}, *що для довільного* $x \in U'_{x_0}$

$$f(x) - f(x_0) < 0 \quad (f(x) - f(x_0) > 0).$$

Це означення ілюструє, наприклад, рис. 1.

Терміни “максимум” і “мінімум” об’єднують загальним терміном “екстремум”.

Значення функції в точці екстремуму називають *екстремумом функції.*

1. Необхідні умови екстремуму.

З теореми Ролля безпосередньо випливає така теорема.

Теорема 1. Ферма. *Якщо функція* $f(x)$ *диференційована в околі точки* x_0 *і має в цій точці екстремум, то* $f'(x_0) = 0$.

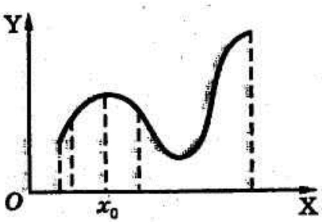


Рис. 1

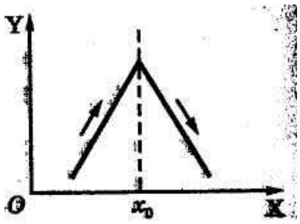


Рис. 2

Теорема Ферма не вичерпує всіх варіантів точок. В яких функція море мати екстремум.

Теорема (необхідні умови екстремуму). *Якщо функція* $f(x)$ *має в точці* x_0 *екстремум, то або* $f(x)$ *диференційована в цій точці і тоді* $f'(x_0) = 0$ (рис. 1.10 п. 4.1) *або недиференційована, тобто* $f'(x_0) = \infty$ *або ж* $f'(x_0)$ *не існує* (рис. 5, п. 13), 1 розділ II)

Сформульовані умови не є достатніми. У цьому можна впевнитись, розглянувши рис. 3.

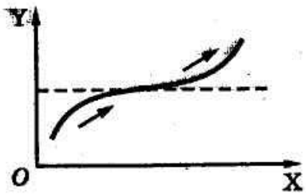


Рис. 3

Точки x_0, в яких $f'(x_0) = 0$ називають *стаціонарними*, бо швидкість зміни функції дорівнює нулю і відповідний процес у точці зупиняється. Всі точки, в яких функція може мати екстремум, називають *критичними* точками функції.

2. Достатні умови екстремуму.

Теорема 2.(перша достатня умова екстремуму). *Якщо функція* $y = f(x)$ *диференційована в деякому околі критичної точки* x_0 *і* $f'(x)$ *змінює знак при переході (через* $x = x_0$ *то* $f(x)$ *має екстремум у цій точці, причому якщо при переході зліва направо знак* $f'(x)$ *змінюється з* «+» *на* «-»*, то максимум, якщо навпаки, - мінімум.*

Справді. При переході через критичну точку x_0 перехідні функцій, зображених на рис. 5 (п. 13, 1 розділ II), 10 (п. 4.1, 4 розділ II), 2,(п. 12, 1 розділ III) змінюють знак і функції мають екстремум (максимум). На рис. 3, такої зміни немає, відповідна функція не має екстремуму.

Теорема. 3.(друга достатня умова екстремуму). *Якщо функція* $y = f(x)$ *двічі диференційована в точці* $x = x_0$ *причому* $f'(x_0) = 0$ *а* $f'(x_0) \neq 0$ *і* $f''(x)$, *неперервна в деякому околі точки* $x = x_0$ *то в точці*

$x = x_0$ *функція* $f(x)$, *має екстремум, причому максимум, якщо* $f''(x_0) < 0$, *і мінімум, якщо* $f''(x_0) > 0$.

Доведення. Нехай $y = f(x)$ задовольняє умови теореми. Запишемо функцію за формулою Тейлора так $(n=1)$.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2}(x - x_0)^2, \quad c \in (x_0, x) \text{ чи } c \in (x, x_0)$$

Оскільки $f'(x_0) = 0$, то

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f''(c)}{2}(x - x_2)^2.$$

Ураховуючи неперервність $f''(x)$ і теорему про збереження знака неперервної функції (теорема 1 п. 4.3.), маємо

$$\operatorname{sign}(f(x) - f(x_0)) = \operatorname{sign}(f''(c)) = \operatorname{sign}(f'''(x_0)).$$

Тепер дістанемо (аналогічно при $f''(x_0) > 0$)

$$\left(f''(x_0) > 0\right) \Rightarrow (f(x) - f(x_0) > 0) \Rightarrow (\max f(x) = f(x_0)).$$

Розглянутий екстремум називають локальним, бо він характеризує поведінку функції тільки в околі деякої точки.

4. Найбільше і найменше значення функції.

Проаналізуємо графік функції, зображеної на рис. 1. згідно з цим графіком для функції. Заданої на замкнутому інтервалі, максимум може не бути найбільшим значенням (це стосується мінімуму та найменшого значення). У цьому разі треба знайти критичні точки функції, відібрати ті з них які належать даному інтервалу. Після цього треба зайти значення функції як в точках, які залишилися. Так і в кінцевих точках інтервалу. Серед здобутих значень відібрати найбільше і найменше. Ці значення називають ще глобальним максимумом і мінімумом функції.

Введемо такі позначення: $\max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ - найбільше значення $f(x)$ на $[a,b]$; $\min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ - найменше значення $f(x)$ на $[a,b]$.

Приклад. Дослідити на екстремум і монотон ність функції $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Знайти найбільше й найменше значення $f(x)$ на $[0,2]$.

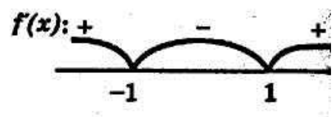


Рис. 4

Розв'язання. Очевидно $X = R$. Маємо. Отже $f'(x) = 3x^2 - 3$, при $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ тобто $\{-1,1\} \subset R$. Точки x_1 і x_2 ділять область визначення $f(x)$ на три інтервали (рис. 4). Знак похідної в кожному інтегралі визначимо за її знаком у будь-якій точці цього інтервалу. Взявши, наприклад, $f'(-2) > 0, f'(0) < 0, f'(-2) > 0$. На основі відповідних теорем про монотонність і екстремум функції маємо

$$f \uparrow \text{ при } x \in [-\infty;-1], \text{ і при } x \in [-\infty;-1);$$

$$f \downarrow \text{при } x \in [-1;1];$$

$$\max f(x) = f(-1) = 3, \ \min f(x) = f(1) = -1.$$

Щодо найбільшого і найменшого значень, то, оскільки $\{-1\} \in [0,2]$, досить знайти $f(1) = -1, f(0) = 1, f(2) = 3.$. Отже,

$$\max_{x \in [0,2]} f(x) = f(-1) = 3, \ \min_{x \in [0,2]} f(x) = f(1) = -1.$$

1.3. Опуклість і угнутість функцій

В основу наступного означення покладення спостереження за графіком функції. Зображено на рис. 5.

Означення. *Функція називається опуклою (угнутою) на інтервалі, якщо всі точки її графіка лежать нижче (вище) точок дотичних. Проведених до графіка функції в кожній точці інтервалу (крім точок дотику).*

Користуємося позначеннями $\bigcup, \bigcap$ відповідно для опуклості й угнутості.

Теорема 1. *Нехай функція $y = f(x)$ двічі диференційована на (a,b). Тоді $f(x)$ опукла (угнута), якщо $f''(x) < 0 (f''(x) > 0)$ для довільного $x \in (a,b)$.*

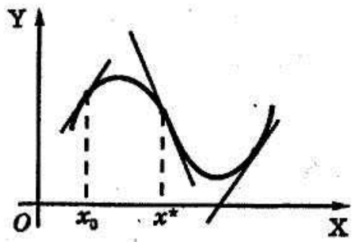


Рис. 5

Доведення. У довільній точці $x_0 \in [a,b]$ проведемо дотичну до графіка функції $y = f(x)$.

Матимемо

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Запишемо $f(x)$ у вигляді формули Тейлора при $n = 1$:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2}(x - x_0)^2.$$

Розглянемо різницю

$$\mathrm{sign}(y - f(x)) = -\mathrm{sign}(f''(c)).$$

Очевидно, що

Нехай $f''(x)>0$ для довільного $x_0 \in [a,b]$. Тоді $f''(c)>0$ і $y-f(x)>0$ або $y>f(x)$, тобто $f(x)$ угнута на $[a,b]$. Аналогічно й для $f''(x)<0$. Оскільки x_0 вибрано довільно. То теоремою доведено.

Означення. *Точка в якій функція змінює опуклість на угнутість називається точкою перегину функції* (на рис. 5 це точка $x=x$).

Теорема 2. (достатня умова перегину). *Якщо* $f''(x_0)=0$ *або не існує і* $f''(x)$ *змінює знак при переході через* x_0; *то* x_0 *точкою перегину функції* $f(x)$.

Якщо функція $y=f(x)$ така, що $f'(x_0)=f''(x_0)=...=f^{(n)}(x_0)=0$, а $f^{(n+1)}(x_0)\neq 0$, то для того щоб з'ясувати, чи є точка x_0 точкою екстремуму або точкою перегину, слід звернути увагу на парність чи непарність n (довести це можна за допомогою формули Тейлора з відповідним числом членів). Отже, якщо n непарне, то точка x_0 є точкою екстремуму функції $f(x)$ (максимуму, якщо $f^{(n+1)}(x_0)<0$ мінімуму при $f^{(n+1)}(x_0)>0$, якщо парне n, то x_0 - точка перегину функції $f(x)$).

1.4. Асимптоти функції

Цей пункт непов'язаний з диференціальними числами. Але доповнює попередню інформацію про поведінку функції.

Для довільних функцій розрізняють *вертикальні* й *похилі*, зокрема горизонтальні *асимптоти*.

У разі вертикальної асимптоти $x=x_0$ маємо

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$$

або хоча б при $x\to x_0-0$ чи $x\to x_0+0$.

Перейдемо до похилих асимптот $y=kx+b$ функції $y=f(x)$. При цьому означення асимптоти еквівалентне тому, що $f(x)-y\to 0$ при $x\to\infty$. Тоді матимемо

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx-b=0,$$

або

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\left(\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right)\right)=0.$$

Остання границя як границя добутку двох множників за умови, що один уже прямує до нескінченості $(x\to\infty)$, може набути нульового значення тільки тоді, коли

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right)=0.$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{b}{x}=0$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-k\right)=0.$

Отже,

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

З рівності (1) знаходимо (після того як знайдемо k)

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx).$$

Зауваження. При знаходженні k і b за формулами (2) і (3) можна отримувати різні їх значення при $x\to-\infty$ і $x\to\infty$, тобто функція може мати дві різні похилі асимптоти при $x\to-\infty$ і $x\to\infty$.

Приклад. Знайти асимптоти функції $f(x)=\frac{x^2+2x-1}{x}$.

Розв'язання. Вертикальна асимптота $x=0$. Для похилої асимптоти маємо

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-1}{x},\quad b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{x}-x\right)=2,$$

тобто $y=x+2$.

1.5. Загальна тема дослідження функції

Одним із способів будови графіка функції є його будова «за точками». Але. Сполучаючи значення функції на дискретній множині значень аргументу (сітці) неперервною лінією. Можна дістати будь-який результат.

Диференціальне числення дає змогу об'єктивно відтворити графік функції зі зображенням його характерних особливостей.

Схема дослідження функції $f(x)$.

1. Знаходимо область визначення функції X.

2. Перевіряємо функцію на періодичність, парність. Непарність. У разі необхідності знаходимо характерні точки графіка. Наприклад, точки перетину з координатними осями.

3. Знаходимо $f'(x)$ і критичну точки $f(x)$.

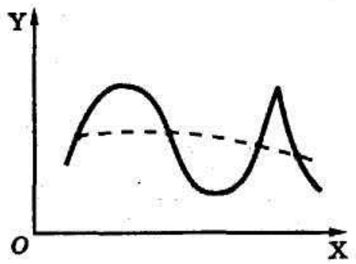


Рис. 5.6

4. *Знаходимо* $f''(x)$ *і критичну точки* $f'(x)$.

5. *Здобуті дані зводимо в таблицю. З якої дістанемо інтервали монотонності та опуклості чи угнутості. А також точки екстремуму та перетину* (заповнивши відповідні клітини знаками похідних функцій).

6. *Знаходимо асимптоти функції (інколи асимптоти зручно знайти раніше).*

7. *Будуємо* графік функції.

Приклад. Дослідивши рівняння $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, побудуємо еліпс.

Розв'язання. Зобразимо еліпс спочатку в межах першої чверті $x \geq 0, y \geq 0$ а потім, користуючись його симетрією, а на всій площині. Отже, дослідимо функцію $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ при $x \in [0,a]$. Якщо $x \in (0,a)$, то $y'=-\frac{b}{a}\left(x/\sqrt{a^2-x^2}\right)$.

Отже графік спадає від $y(0)=b$ до $y(a)=0$. Знайдемо другу похідну $y''=-ab(a^2-x^2)^{-3/2}$. Оскільки $y''<0$, то графік опуклий.

Асимптот немає (вертикальних асимптот немає, бо функція неперервна на скінченому інтервалі, а похилих – тому що інтервал скінчений). Будуємо еліпс.

Приклад. Дослідивши рівняння $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ будуємо гіперболу.

Розв'язання. Дослідимо функцію $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, при $x \in [a,\infty)$. Якщо $x \in (a,\infty)$, то $y'=-\frac{b}{a}x(x^2-a^2)^{-1/2}$.

Оскільки $y'>0$, то зростає від $y(a)(=0)$ до $\infty(=\lim\limits_{x\to\infty} y)$. Маємо $y''=ab(a^2-x^2)^{3/2}<0$, тобто графік опуклий. Як і у випадку еліпса, вертикальних асимптот немає.

Знайдемо похилі $y=kx+b$. Маємо $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-a^2}/x)=\frac{b}{a}$. Розкриваючи невизначеність $\infty-\infty$ у випадку ірраціональності знаходимо

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-a^2}-x)=-ab\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-a^2}-x)^{-1}=0.$$

Отже, гіпербола має асимптоти $y=\frac{b}{a}x, \quad y=-\frac{b}{a}x$.

Будуємо гіперболу.

Приклад 3. Дослідити функцію $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}}$ та побудувати її графік.

Розв'язання. Для зручності позначимо $c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Відповідно до загальної схеми дослідження функцій маємо:

1. $X(\varphi) = R, \quad Y(\varphi) = (0, \infty)$.

2. $\varphi(x)$ неперіодична, парна $(f(-x) = f(x))$, отже її графік симетричний відносно осі Oy і дослідження достатньо виконати на півосі. Обмежимося, таким чином, невід'ємною піввіссю $[0, \infty)$.

3. $\varphi'(x) = -cxe^{-\frac{x^2}{2}}, x_1 = 0.$

4. $\varphi''(x) = c(x^2 - 1)e^{-\frac{x^2}{2}}, x_2 = 1.$ ($x_1 = -1$ не належить до згаданої півосі).

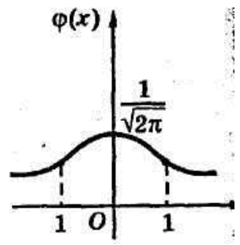
5. Знаходимо асимптоти. Помітно, що вертикальних асимптот немає. А для похилих маємо $y = kx + b$, де

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = ck = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{xe^{x^2/2}} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (\varphi(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \frac{c}{e^{x^2/2}} = 0$$

Отже, маємо похилу (горизонтальну) асимптоту $y = 0$.

6. Складемо таблицю:

x	0	(0, 1)	1	$(1, \infty)$	 *Рис. 7*
$f'(x)$	0	-	-	-	
$f''(x)$	-	-	0	+	
$f(x)$	max $c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$		перегин $1/\sqrt{2\pi e}$		

7. Графік функції зображено на рис. 7.

Розглянута функція називається функцією Лампаса і широко застосовується в теорії ймовірностей.

Приклад. Дослідити функцію $f(x) = \frac{2x - 1}{(x-1)^2}$ і побудувати графік.

Розв'язання. Маємо

1. $X = R \setminus \{1\},$

2. $f(x)$ неперіодична. Оскільки $f(-x)=\frac{2x+1}{(x+1)^2}$, тобто $f(-x)\neq -f(x)$ і $f(-x)\neq f(x)$, то $f(x)$ ні парна, ні непарна.

3. $f'(x)=-\frac{2x}{(x-1)^3}, x_1=0.$

4. $f''(x)=-\frac{4x+2}{(x-1)^4}, x_2=-\frac{1}{2}.$

5. Складемо таблицю:

x	$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2},0\right)$	0	(0, 1)	1	$(1,\infty)$
$f'(x)$	-	-	-	0	+	∞	-
$f''(x)$	-	0	+	+	+	∞	+
$f(x)$		перегин $-8/9$		min -1		∞	

(щодо знаків у таблиці див. приклад в п. 1.2, 1 розділ III).

Знайдемо асимптоти. Вертикальною асимптотою є $x=1$, а похилою - $y=kx+b$, де

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=ck=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x(x-1)^2}=0,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=0.$$

Отже, $y=0$.

6. Графік цієї функції зображено на рис. 8.

§ 2. ПРАКТИЧНІ ЗАДАЧІ НА НАЙБІЛЬШЕ ТА НАЙМЕНШЕ ЗНАЧЕННЯ

Люди в своїй практичній діяльності намагаються все зробити якомога оптимальніше, затративши найменше часу і матеріальних засобів, але дістати найбільший ефект. Крім того, всі процеси в природі відбуваються так. Що деяка характеристика процесу набуває екстремуму. Вся складність теорії екстремуму полягає не в тому, щоб знайти похідну і прирівняти її до нуля, а в тому, яка з характеристик вибирати для оптимізації.

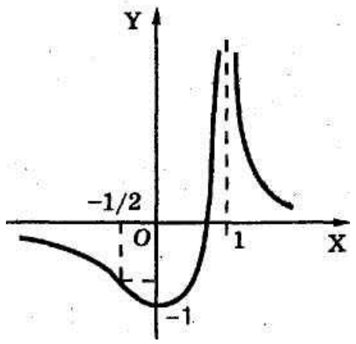


Рис. 8

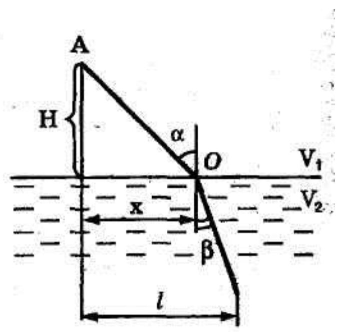


Рис. 9

Розглянемо кілька задач практичного змісту.

Приклад. 1. Знайти форму променя світла. Який заломлюється на межі двох середовищ так, щоб з точки A в B точку (рис. 9) промінь пройшов найкоротший час (*принцип Ферма* для світла).

Розв'язання. Виходи темо з того, що в однорідному середовищі світло рухається по прямій зі сталою швидкістю. Його шлях у повітрі $AO = \sqrt{x^2 + H^2}$. При цьому промінь рухається зі швидкістю v_1. У воді шлях променя $OB = \sqrt{(l-x)^2 + h^2}$, а швидкість $v_2 (v_1 > v_2)$. Тоді перехід A в B здійсниться за час

$$t(x) = \frac{1}{v_1}\sqrt{H^2 + x^2} + \frac{1}{v_2}\sqrt{h^2 + (l-x)^2}.$$

Згідно з необхідною умовою екстремум

$$\frac{x}{v_1\sqrt{H^2 + x^2}} = \frac{l-x}{v_2\sqrt{h^2 + (l-x)^2}}.$$

Як бачимо на рис.9

$$\sin\alpha = x / \sqrt{H^2 + x^2}, \sin\beta = (l-1) / \sqrt{h^2 + (l-x)^2}.$$

Отже, $\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$

Це є закон. Сннеліуса для заломлення світла не межі двох середовищ. Оскільки закон встановлено експериментально, то підтверджується принцип Ферма на якому ґрунтується розв'язання задачі.

Достатні умови екстремуму тут не перевірено, бо це недоцільно, оскільки характер екстремуму зрозумілий з практичного змісту задачі.

Приклад. 2. Треба збудувати циліндричне нафтосховище заданого об’єму $V = \pi R^2 h$ (рис. 10) так, щоб витрати на спорудження його були найменшими.

Розв’язання. Витрати визначаються в основному вартістю матеріалів і трудомісткістю виготовлення. Зрозуміло, що обидва види витрат пропорційні площі поверхні циліндра.

Таким чином, за критерій оптимізації слід взяти площу поверхні циліндра $S = 2\pi R^2 + 2\pi Rh$.

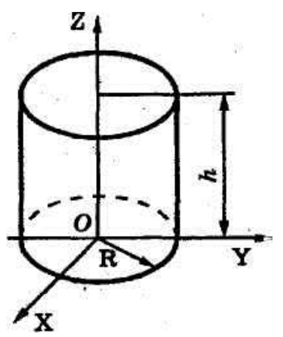


Рис. 10

Дістанемо функцію двох змінних R і h, на які накладено додаткову залежність. Оскільки об’єм заданий. Вилучаючи величину h двох рівностей, маємо

$$S(R) = 2\pi R^2 + 2V/R, \quad 0 < R < \infty.$$

Скористаємося необхідною умовою екстремуму $\left(S'(R) = 0\right)$. Маємо $4\pi R - 2V/R^2 = 0$, звідки $h = 2R$.

Оскільки $S''(R) = \left(4\pi + 4V/R^3\right) > 0 \forall R > 0,$ то $S(R)$. Має мінімум. Це єдиний екстремум $S(R)$ на відкритому інтервалі. Отже $S(R)$ при $h = 2R$ набуває найменшого значення для вказаного R.

Таким чином, висота циліндричного нафтосховища має дорівнювати його діаметру (якщо брати до уваги оптимізацію за вказаним критерієм).

Приклад. 3. Треба з найменшими затратами виготовити циліндричне відро, об’єм якого $V = \pi R^2 h$ (теж нафтосховище. Але менших розмірів і без верхньої кришки).

Розв’язання. Маємо $S(R) = \pi R^2 + 2V/R,\ S'(R) = 0$, звідки $R = h$.

Проте такі низькі відра не роблять. Річ у тім що великий резервуар складається з багатьох листів металу і загальна довжина зварних швів приблизно пропорційна його поверхні. Відро ж виготовляють з одного листа металу, вартість якого нижча вартості роботи із зварювання шва на бічній поверхні та її спряжені з дном. Загальна довжина шва не пропорційна поверхня.

Якщо виходити лише з трудомісткістю, ігноруючи вартість матеріалу. То відро має бути конічної форми. Саме так роблять пожежні відра. Вони мають кілька специфічних переваг над звичайними відрами, мають велику відкриту площу, через те, що центри має таких відер (разом з водою) розміщені високо.

Якщо зважати на вартість і трудомісткість виготовлення, то матимемо класичне відро у формі зрізаного конуса. Проте, коли відро (барило) виготовляти з дерев’яних клепок, де швів багато, то знайденій розв’язок правильний $(R = h)$.

§ 3. НАЙБЛИЖЧЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СКІНЧЕННИХ РІВНЯНЬ

Скінченим рівнянням називають рівняння $f(x)=0$, де $f(x)$ – довільна функція. Назва цих рівнянь свідчить про те. Що вони містять скінченні величину на відміну від так званий *диференціальних рівнянь*, які містять диференціали змінних.

Нагадуємо, що *коренем (нулем) рівняння* $f(x)=0$ *називається число* $x=x_0$*, таке що* $f(x_0)=0$.

Якщо $f(x)$ – многочлен, то відповідне рівняння, тобто $a_0+a_1x+...+a_nx^n=0$ називають *алгебричним* (степеня n, якщо $a_n\neq 0$), всі інші рівняння називають *трансцендентними*.

В інженерній практиці часто постає питання про найближче розв'язування рівнянь. Це пояснюється тим, що не для всіх класів рівнянь розроблені методи їх розв'язування. І , крім того. Оскільки не існує абсолютно точних вимірювань. Тобто значень певних величин, від яких залежить коефіцієнти рівнянь, то й немає потреби знаходити точки значення коренів рівнянь. Виникає тільки рівняння про точність знайденого кореня.

Ісу методи наближеного розв'язування рівнянь ділять на дві групи. До першої належить ті, які дають змогу відділити корінь. Тобто вказати деякий інтервал, до якого цей корінь належить, до другої – ті, які дають змогу уточнити корінь, тобто знайти його з будь-якою точністю.

3.1 Метод проб

Цей метод належить до першої групи. У подальшому матимемо справу з рівняннями

$$f(x)=0.$$

Нехай функція $f(x)$ неперервна на $[a,b]$, набуває на його кінцях значень різних знаків, тобто $f(a)\cdot f(b)<0$. Тоді з теореми 3 (п. 4.3, 4 розділ 5) випливає, Що існує таке x_0, що $f(x_0)=0$. Якщо функція $f(x)$ монотонна на $[a,b]$, то цей корінь єдиний. Вибираємо довільним способом $c\in(a,b)$ - нульове наближення до x_0 наприклад c_0 - середина $[a,b]$. З'ясуємо, в якому з інтервалів $[a,c]$ чи $[c,b]$ знаходимо корінь, і втому інтервалі виберемо наступне наближення c_1, до кореня x_1 так, як і c_0. Процес продовжують доти, доки це можливо (рис. 11).

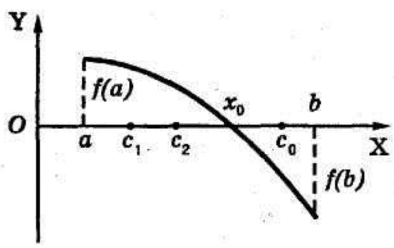


Рис. 11

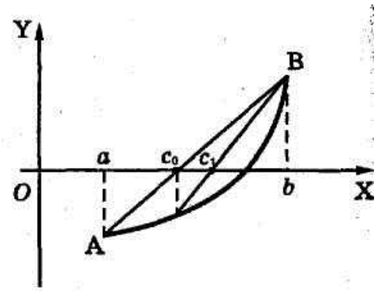


Рис. 12

Ще один спосіб першої групи – графічний, він добре відомий зі шкільного курсу математики.

У подальшому вважатимемо, що корінь ізольовано в інтервалі $[a,b]$, причому $f'(x)$ і $f''(x)$ зберігають знак на $[a,b]$ (якщо це не так, то беруть частину інтервалу, де назначена властивість $f(x)$ виконується). Переходимо до способів другої групи.

3.2. Метод хорд

Ідея цього методу полягає в тому, що містить точки перетину графіка функції $f(x)$ з(4) з віссю Ox (точки x_0) беруть точки перетину з цієї віссю хорди, яка стягує крайні точки графіка функції на інтервалі ізоляції кореня (рис. 12).

Складемо рівняння хорди як рівняння прямої, яка проходить через точки *A* і *B*:

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a).$$

Оскільки точка $(c_0,0)$ належить хорді, то

$$c_0 = a - f(a)(b-a)/(f(b) - f(a)).$$

Далі замість a беремо c_0. Повторюючи цей процес, знаходимо

$$c_1 = c_0 - f(c_0)(b-c_0)/(f(b) - f(c_0)).$$

Продовжимо процес. На n-му кроці, матимемо

$$c_n = c_{n-1} - \frac{f(c_{n-1})(b-c_{n-1})}{f(b) - f(c_{n-1})}.$$

Це є формула методу хорд. Метод добре алгоритмізований. Але наближення до кореня однобічне (до одного боку).

3.3. Метод дотичних

Ідея цього методу полягає в тому. Що замість точки перетину графіка функції $y = f(x)$ з (4) з віссю Ox знаходять точки перетину з *цією віссю дотичної до графіка в одній з точок ізоляції кореня.* Графічний аналіз усіх випадків свідчить про те, що такою точкою буде та, в якій знаки $f(x)$ і $f'(x)$ однакові. Нехай такою точкою є $B(b,0)$.

Рівняння дотичної має вигляд (рис. 13)

$$y = f(b) + f'(b)(x - b).$$

Оскільки точка B лежить на дотичній, то

$$c_0 = b - f(b) / f'(b).$$

Процес продовжуємо далі. На *n*-му кроці дістанемо

$$c_n = c_{n-1} - f(c_{n-1}) / f'(c_{n-1}).$$

Це формула методу дотичних, запропоновано Ньютоном. Метод також добре алгоритмізований, але теж дає однобічне наближення.

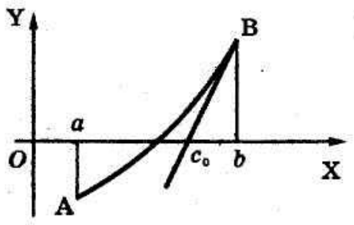


Рис. 13

Розглянемо так званий *комбінований* метод. Він полягає в послідовному застосуванні методів хорд і дотичних з урахувань того, що вони дають однобічні наближені до шуканого кореня, але з різних боків обчислення виконується доти. Доки не буде справедливою нерівність

$$|c_n - c_{n-1}| < \delta,$$

де δ – абсолютна максимальна допустима похибка, яку задають заздалегідь.

3.4. Метод ітерацій (послідовних наближень)

Зведемо рівняння $f(x) = 0$ до вигляду $x = \delta(x)$ (додамо, наприклад, до обох частин *x*). За перше наближення візьмемо довільне число x_1, або $x_1 = 0$ чи $x_1 = b$. Якщо корінь ізольований. Наступні наближення будуємо за схемою

$$x_n = \varphi(x_{n-1}).$$

Дістанемо послідовність $\{x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, ...\}$. Метод побудови такої послідовності називають методом *ітерацій*.

Теорема. *Послідовність утворення за схемою (5.5), є збіжною до кореня рівняння* $f(x) = 0$*, якщо* $|\varphi'(x)| < 1$.

Доведення. Розглянемо

$$|x_{n+1} - x_n| = |\varphi'(x_n) - \varphi(x_{n-1})|.$$

За теоремою Лагранжа і умовою $|\varphi'(x)| < 1$, маємо

$|x_{n+1} - x_n| = |\varphi'(c)||x_{n-1} - x_n| - |x_n - x_{n-1}|$, тобто $d(x_{n+1}, x_n) < (x_n - x_{n-1})$.

Вважатимемо, що звідси випливає збіжність $\{x_n\}$. Можна показати. Що ця послідовність є збіжною саме до кореня рівняння $f(x)=0$.

Метод ітерацій добре алгоритмізований. Кількість необхідних ітерацій визначається за умовою (6).

Приклад. Знайти корінь рівняння $x^3-3x+1=0$ з точністю $\delta=0{,}01$.

Розв’язання. Запишемо рівняння у вигляді $x=\sqrt[3]{3x-1}$. Візьмемо $x_1=2$. Маємо $x_2=1{,}71, x_3=1{,}60, x_4=1{,}56, x_5=1{,}54, x_6=1{,}535$. Оскільки $|x_6-x_5|<0{,}01$, то $x_0=1{,}54$.

Якщо рівняння записати у вигляді $x=\frac{1}{3}(1+x^3)$, то процес розбіжний. (Пропонуємо самостійно перевірити це.)

Зауважимо, що зведення рівняння $f(x)=0$ до $x=\varphi(x)$ неоднозначне. Наприклад, у випадку рівняння $\sin x-\ln x=0$ $\quad x=x+\sin x-\ln x,$ $x=Arc\sin\ln x,\quad x=e^{\sin x}$.

ПОЧАТКИ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

1. Функція. Означення. Залежність змінної y від змінної x називається функцією, якщо кожному значенню x відповідає єдине значення y.

Позначення: $y = f(x)$.

Функція $y = f(x)$, яка визначена на множник D називається парною, якщо $\forall x \in D$ виконується умова: $-x \in D$ і $f(-x) = f(x)$; непарною, якщо $f(-x) = -f(x)$.

Якщо границя функції $f(x)$ у точці $x = a$ дорівнює значенню функції в цій точці, тобто

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

то функція називається неперервною у точці $x = a$.

Функція називається періодичною, якщо існує таке число $T \neq 0$, що $f(x) = f(x \pm T)$ для будь-яких x, $x \pm T$ із області визначення функції.

Точка називається точкою максимуму (мінімуму) функції $f(x)$, якщо для всіх x із околу x_0 виконується умова

$$f(x_0) > f(x) \quad (f(x_0) < f(x)).$$

2. Означення похідної функції $y = f(x)$ ***у точці.*** Нехай функція $f(x)$ визначена в деякій області точки x_0. Похідною функції $f(x)$ у точці x_0 називається границя відношення приросту функції $\Delta f(x_0)$ до приросту аргумента Δx при $\Delta x \to 0$.

Позначення: $f'(x_0)$.

За означенням $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Операція знаходження похідної функції називається її диференціюванням.

3. Геометричний зміст похідної. Похідна функції $f(x)$ у точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції у точці $M_0(x_0, y_0)$, тобто

$f'(x_0) = k$, де $k = tg\alpha$, (α - кут, який утворює дотична з додатним напрямом осі Ox)

4. Рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці $M_0(x_0, y_0)$ має вигляд

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

5. Механічний зміст похідної. Миттєва швидкість прямолінійного руху матеріальної точки в довільний момент часу t є похідна від шляху S від часу t:

$$V(t)=S'(t).$$

6. Правила диференціювання. Нехай $u=u(x)$, $v=v(x)$. Тоді:

$(u\pm v)'=u'\pm v'$,

$(uv)'=u'\cdot v+u\cdot v'$,

$(Cu)'=Cu'$, де $C\equiv const$,

$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$, $v\neq 0$.

Важливо: $C'=0, C\equiv const.$

7. Похідна складеної функції:

Якщо $y=f(u)$, де $u=\varphi(x)$, то $y'_x=y'_u\cdot u'_x$.

8. Таблиця похідних елементарних функцій:

$f'(x)$	$f'(u), u=u(x)$
Степенева функція	
1) $(x^k)'=k\cdot x^{k-1}$. 1а) $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$. 1б) $(\sqrt{x})'=-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.	1) $(u^k)'=k\cdot u^{k-1}\cdot u'_x$. 1а) $\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{1}{u^2}\cdot u'_x$. 1б) $(\sqrt{u})'=-\dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'_x$.
Показникова функція	
2) $(a^x)'=a^x\ln a$. 2а) $(e^x)'=e^x$.	2) $(a^u)'=a^u\ln a\cdot u'_x$. 2а) $(e^u)'=e^u\cdot u'_x$.
Логарифмічна функція	
3) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$. 3а) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.	3) $(\log_a u)'=\dfrac{1}{u\ln a}\cdot u'_x$. 3а) $(\ln u)'=\dfrac{1}{u}\cdot u'_x$.
Тригонометричні функції	
4) $(\sin x)'=\cos x$. 5) $(\cos x)'=-\sin x$. 6) $(tg\, x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$. 7) $(ctgx)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$.	4) $(\sin u)'=\cos u\cdot u'_x$. 5) $(\cos u)'=-\sin u\cdot u'_x$. 6) $(tg\, u)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}\cdot u'_x$. 7) $(ctgu)'=-\dfrac{1}{\sin^2 u}\cdot u'_x$.

9. Важливо:

а) Якщо $y = f(x)$ на $(a;b)$ має додатну похідну $(y' > 0)$, то ця функція зростає на цьому інтервалі, якщо від'ємну $(y' < 0)$, то ця функція спадає на $(a;b)$.

б) Якщо $f(x)$ неперервна при $x = x_0$, $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ в (a, x_0) і $f'(x) < 0$ $(f'(x) > 0)$ в (x_0, b), то точка x_0 буде <u>точкою максимуму</u> функції $f(x)$ (<u>точкою мінімуму</u> $f(x)$).

в) Значення функції у точці максимуму (мінімуму) називається максимумом (мінімумом) функції. Максимум і мінімум функції називається <u>екстремумами функції.</u>

10. Формула Ньютона – Лейбніца

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

де $F(x)$ - первісна для $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$.

<u>Таблиця значень тригонометричних функцій деяких кутів</u>

Аргумент		Функція			
град.	рад.	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
0°	0	0	1	0	не існує
30°	$\frac{\pi}{6}$	0,5	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0,5	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	не існує	0
120°	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-0{,}5$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
135°	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
150°	$\frac{5\pi}{6}$	0,5	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
180°	π	0	-1	0	не існує
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	не існує	0
360°	0	0	1	0	не існує

ВЛАСТИВОСТІ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ ТА ЇХ ГРАФІКИ

1.Основні властивості функції $y = \sin x$:

а) область визначення – множина всіх дійсних чисел: $D(f) \in R$;

б) область значень – відрізок $[-1;1]$, тобто $E(f) = [-1;1]$, отже, синус – функція обмежена;

в) функція непарна: $\sin(-x) = -\sin x$ для всіх $x \in R$;

г) функція періодична з найменшим додатним періодом 2π, тобто $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ для всіх $x \in R$.

ґ) $\sin x = 0$ при $x = \pi k, k \in Z$;

$\sin x > 0$ при всіх $x \in (2\pi k; \pi + 2\pi k), k \in Z$;

$\sin x < 0$ при всіх $x \in (\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k), k \in Z$.

д) функція зростає від -1 до 1 на проміжках

$\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in Z$;

функція спадає від 1 до -1 на проміжках $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in Z$.

е) функція приймає найбільше значення, рівне 1, в точках $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$;

функція приймає найменше значення, рівне -1, в точках

$x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$.

Графік функції $y = \sin x$ будуємо, виходячи з перелічених властивостей, причому достатньо спочатку побудувати його на проміжку $[-\pi;\pi]$, тобто на проміжку довжина якого дорівнює періоду функції (рис. 28),

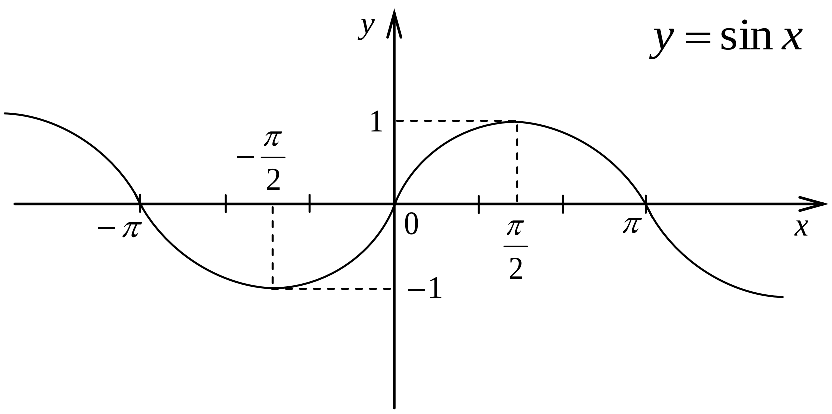


Рис.28

2. <u>Основні властивості функції</u> $y = \cos x$:

а) область визначення – множина всіх дійсних чисел $D(f) \in R$;

б) область значень – відрізок $[-1;1]$, тобто $E(f) = [-1;1]$, отже, косинус – функція обмежена;

в) функція парна: $\cos(-x) = \cos x$ для всіх $x \in R$;

г) функція періодична з найменшим додатним періодом 2π, тобто $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ для всіх $x \in R$.

ґ) $\cos x = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$;

д) $\cos x > 0$ при всіх $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in Z$;

$\cos x < 0$ при всіх $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; -\frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in Z$.

е) функція спадає від 1 до -1 на проміжках $(2\pi k; \pi + 2\pi k), k \in Z$;

функція зростає від -1 до 1 на проміжках $(-\pi + 2\pi k; 2\pi k), k \in Z$.

є) функція приймає найбільше значення, рівне 1, в точках $x = 2\pi k, k \in Z$;

функція приймає найменше значення, рівне -1, в точках $x = \pi + 2\pi k, k \in Z$.

Графік функції $y = \cos x$ будуємо, виходячи з перелічених властивостей, причому достатньо спочатку побудувати його на проміжку $[-\pi;\pi]$, тобто на проміжку, довжина якого дорівнює періоду функції (рис. 29),

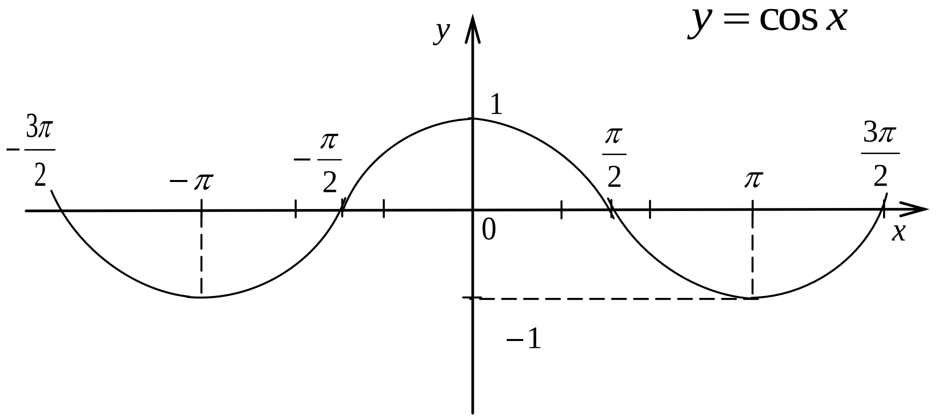


Рис. 29

3. <u>Основні властивості функції</u> $y = tgx$:

а) область визначення – множина всіх дійсних чисел, крім чисел виду $\frac{\pi}{2}+\pi k, k \in Z$;

б) множина значень – вся числова пряма, таким чином, тангенс – функція необмежена;

в) функція непарна: $tg(-x) = -tgx$, для всіх x із області визначення;

г) функція періодична з найменшим додатним періодом π, тобто $tg(x+\pi) = tgx$ для всіх x із області визначення;

ґ) $tgx = 0$ при $x = \pi k, k \in Z$;

д) $tgx > 0$ при всіх $x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi k\right), k \in Z$;

$tgx < 0$ при всіх $x \in \left(-\frac{\pi}{2}+\pi k; \pi k\right), k \in Z$.

е) функція зростає на кожному з проміжків $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi k\right), k \in Z$.

Графік функції $y = tgx$ достатньо спочатку побудувати на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тобто на проміжку, довжина якого дорівнює періоду функції, а потім і на всій числовій осі (рис.30),

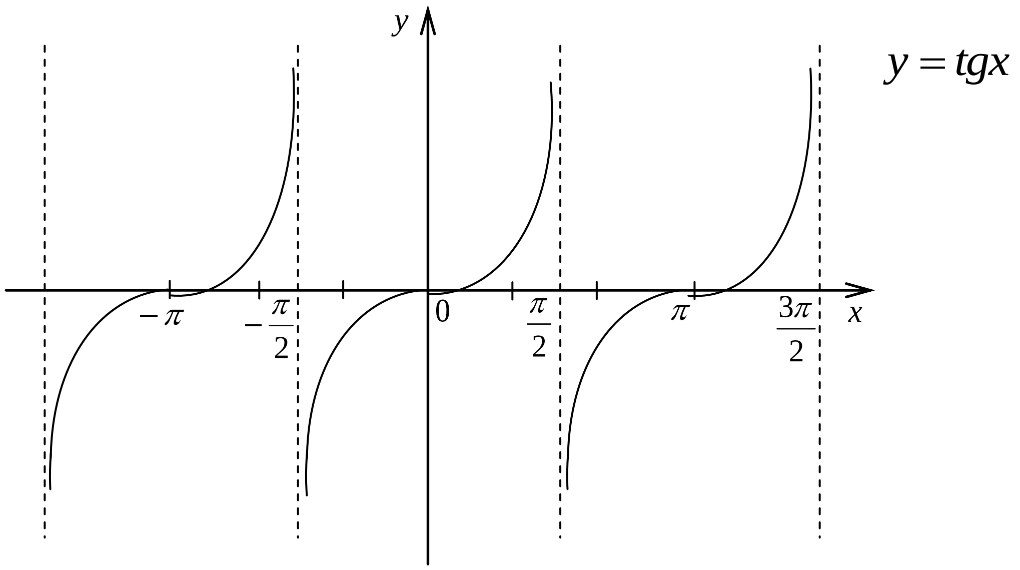


Рис. 30

4. <u>Основні властивості функції</u> $y = ctgx$:

а) область визначення – множина всіх дійсних чисел, крім чисел виду $\pi k, k \in Z$;

б) множина значень – вся числова пряма, таким чином, котангенс – функція необмежена;

в) функція непарна: $ctg(-x) = -ctgx$, для всіх x із області визначення;

г) функція періодична з найменшим додатним періодом π, тобто $ctg(x+\pi) = ctgx$ для всіх x із області визначення;

ґ) $ctgx = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$;

д) $ctgx > 0$ при всіх $x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in Z$; $x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in Z$

$ctgx < 0$ при всіх $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right), k \in Z$,

е) функція спадає на проміжках $(\pi k; \pi + \pi k), k \in Z$.

Графік функції $y = ctgx$ достатньо спочатку побудувати на проміжку $(0;\pi)$, тобто на проміжку, довжина якого дорівнює періоду функції, а потім і на всій числовій осі (Рис. 31),

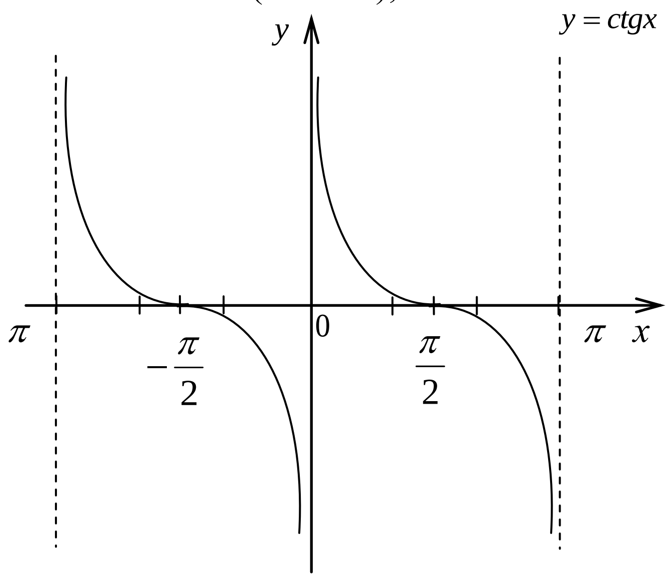


Рис. 31

XIII. Найпростіші тригонометричні рівняння

1. Найпростішими тригонометричними рівняннями називаються рівняння виду: $\sin x = a$, $\cos x = a$, $tg\, x = a$, $ctg\, x = a$.

а) $\sin x = a$.

При $|a| > 1$ рівняння розв'язків немає.

При $|a| \le 1$: $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z$.

Частинні випадки:

$\sin x = 1, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$;

$\sin x = 0, \quad x = \pi n, n \in Z$;

$\sin x = -1, \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$.

б) $\cos x = a$

При $|a| > 1$ рівняння розв'язків немає.

При $|a| \le 1$: $x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in Z$.

Частинні випадки:

$\cos x = 1, \quad x = 2\pi n, n \in Z$;

$\cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$;

$\cos x = -1, \quad x = \pi + 2\pi n, n \in Z$.

в) $tg\, x = b, b \in R$.

$x = arctg\, b + \pi n, n \in Z$.

г) $ctg\, x = b, b \in R$.

$x = arcctg\, b + \pi n, n \in Z$.

XIV. <u>Обернені тригонометричні функції</u>

1. Арксинус. <u>Означення.</u> Нехай число m за модулем не перевищує одиницю. Арксинусом числа m називається кут $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус якого дорівнює m.

Позначення: $x = \arcsin m$.

2. Арккосинус. <u>Означення.</u> Нехай число m- число, яке за модулем не перевищує одиниці. Арккосинусом числа m називається кут $x \in [0; \pi]$, косинус якого дорівнює m.

Позначення: $x = \arccos m$.

3. Арктангенс. <u>Означення</u>. Арктангенсом числа m називається кут $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює m.

Позначення: $x = arctg\, m$.

4. Арккотангенс. <u>Означення</u>. Арккотангенсом числа m називається кут $x \in (0; \pi)$, котангенс якого дорівнює m.

Позначення: $x = arcctg\, m$.

5. Важливо:

а) Для будь-якого $m \in [-1; 1]$ маємо:

$\sin(\arcsin m) = m$, $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin m \le \frac{\pi}{2}$.

б) Для будь-якого $m \in [-1; 1]$ маємо:

$\cos(\arccos m) = m$, $0 \le \arccos m \le \pi$.

в) Для будь-якого m маємо:

$tg(arctg\, m) = m$, $-\dfrac{\pi}{2} < arctg\, m < \dfrac{\pi}{2}$.

г) Для будь-якого m маємо:

$ctg(arcctg\, m) = m$, $0 < arcctg\, m < \pi$.

6. Основні тотожності:

а) Для всіх $m \in [-1;1]$:

$\arcsin(-m) = -\arcsin m$;

$\arccos(-m) = \pi - \arccos m$;

$arctg(-m) = -arctg m$;

$arcctg(-m) = \pi - arcctg\, m$.

б) Для всіх $m \in [0;1]$:

$\arcsin m = \arccos\sqrt{1-m^2}$;

$\arccos m = \arcsin\sqrt{1-m^2}$.

в) Для всіх $m \in (0;+\infty)$:

$arctg\, m = arcctg\,\dfrac{1}{m}$; $arcctg\, m = arctg\,\dfrac{1}{m}$;

$\arcsin m = \dfrac{\pi}{2} - \arccos m = arctg\,\dfrac{m}{\sqrt{1-m^2}}$;

$\arccos m = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin m = arcctg\,\dfrac{m}{\sqrt{1-m^2}}$;

$arctg\, m = \dfrac{\pi}{2} - arcctg\, m = \arcsin\dfrac{m}{\sqrt{1+m^2}}$;

$arcctg\, m = \dfrac{\pi}{2} - arctg\, m = \arccos\dfrac{m}{\sqrt{1+m^2}}$.

7. Властивості обернених тригонометричних функцій та їх графіки

1). Функція $y = \arcsin x$.

$$D(f): x \in [-1;1]; \quad E(f): y \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right].$$

Графік $y = \arcsin x$ (рис. 32) симетричний до графіка функції $y = \sin x$, $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ відносно прямої $y = x$.

Основними властивостями $y = \arcsin x$ є:

а) $\arcsin(-x) = -\arcsin x$, тобто $y = \arcsin x$ - непарна функція;

б) функція $y = \arcsin x$ зростаюча;

в) $\sin(\arcsin x) = x$, якщо $x \in [-1;1]$.

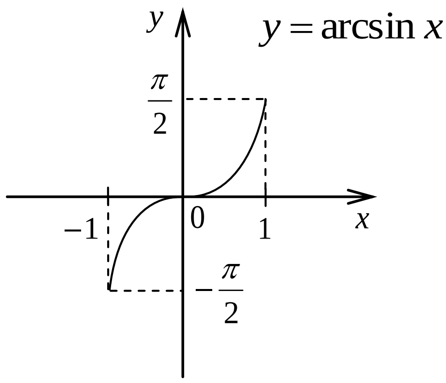


Рис. 32.

2). Функція $y = \arccos x$**.**

$$D(f): x \in [-1;1]; \quad E(f): y \in [0;\pi].$$

Графік $y = \arccos x$ (рис. 33) симетричний до графіка функції $y = \cos x$, $x \in [0;\pi]$ відносно прямої $y = x$.

Основними властивостями функції $y = \arccos x$ є:

а) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$, тобто $y = \arccos x$ є функцією загального виду;

б) функція $y = \arccos x$ спадна;

в) $\cos(\arccos x) = x$, якщо $x \in [-1;1]$.

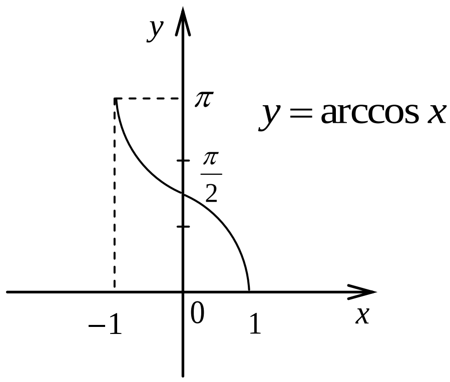


Рис. 33.

3). Функція $y = arctg\, x$**.**

$$D(f): x \in (-\infty;+\infty) \quad E(f): y \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right).$$

Графік $y = arctg\,x$ (рис. 34) симетричний до графіка функції $y = tg\,x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ відносно прямої $y = x$. Прямі $y = \pm\frac{\pi}{2}$ є горизонтальними асимптотами графіка функції $y = arctg\,x$.

Основними властивостями $y = arctg\,x$ є:

а) $arctg(-x) = -arctg\,x$, тобто $y = arctg\,x$ - непарна функція;

б) функція $y = arctgx$ зростаюча;

в) $tg(arctgx) = x$, якщо $x \in (-\infty; +\infty)$.

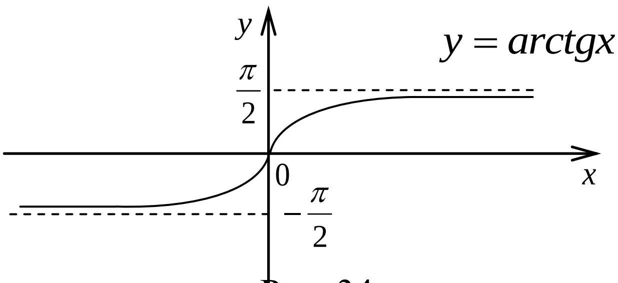


Рис. 34.

4). Функція $y = arcctg\,x$.

$$D(f): x \in (-\infty; +\infty) \qquad E(f): y \in (0; \pi).$$

Графік $y = arcctg\,x$ (рис. 35) симетричний до графіка функції $y = ctg\,x$, $x \in [0; \pi]$ відносно прямої $y = x$. Прямі $y = 0$ і $y = \pi$ є горизонтальними асимптотами графіка функції $y = arcctg\,x$.

Основними властивостями $y = arcctg\,x$ є:

а) $arcctg(-x) = \pi - arcctg\,x$, тобто $y = arcctg\,x$ є функцією загального виду;

б) функція $y = arcctg\,x$ спадна;

в) $ctg(arcctgx) = x$, якщо $x \in (-\infty; +\infty)$.

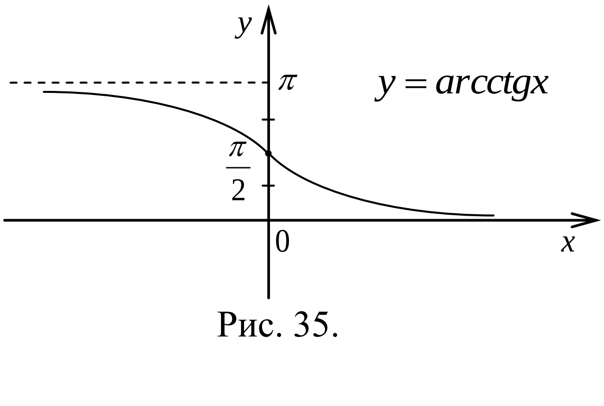


Рис. 35.

Тригонометричні нерівності

1. Найпростішими тригонометричними нерівностями називаються нерівності виду $f(x)>a$ (або $f(x)<a$, $f(x)\geq a$, $f(x)\leq a$), де $f(x)$ - одна з тригонометричних функцій.

а) $\sin x>m$, $x\in(\arcsin m+2\pi n;\pi-\arcsin m+2\pi n)$, $n\in Z$.
$|m|<1$

б) $\sin x<m$, $x\in(-\pi-\arcsin m+2\pi n;\arcsin m+2\pi n)$, $n\in Z$.
$|m|<1$

в) $\cos x>m$, $x\in(-\arccos m+2\pi n;\arccos m+2\pi n)$, $n\in Z$.
$|m|<1$

г) $\cos x<m$, $x\in(\arccos m+2\pi n;2\pi-\arccos m+2\pi n)$, $n\in Z$.
$|m|<1$

ґ) $tg\,x>m$, $x\in\left(arctg\,m+\pi n;\dfrac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in Z$.

д) $tg\,x<m$, $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2}+\pi n;arctg\,m+\pi n;\right)$, $n\in Z$.

е) $ctg\,x>m$, $x\in(\pi n;arcctg\,m+\pi n)$, $n\in Z$.

є) $ctg\,x<m$, $x\in(arcctg\,m+\pi n;\pi n+\pi)$, $n\in Z$.

Індивідуальні завдання

ВАРІАНТ 1

1. Знайти похідні функцій :

$$a)\, y = 5^{tg\,2x} \cdot \arcsin\left(x^2\right); \qquad b)\, y = \left(3x^2 - \frac{4}{\sqrt{x}} + 5\right)^3;$$

$$c)\, y = \ln\left(arctg\,\frac{x}{3} + \cos^2 6x\right) + \ln 5; \qquad d)\, e^y + 5x^2 e^{-y} = 4x;$$

$$e)\, y = \left(\cos\sqrt[3]{x}\right)^{-x}.$$

2. Знайти границі функцій :

$$a)\, \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{tg^2 x}; \qquad b)\, \lim_{x \to +0} (\arcsin x)^{tgx}.$$

3. Скласти рівняння такої нормалі до параболи $y = x^2 - 3x + 12$, яка перпендикулярна до прямої $x - y - 16 = 0$.

4. Який із прямокутних трикутників даного периметра $2p$ має найбільшу площу ?

5. Дослідити функцію та побудувати її графік : $y = \dfrac{x^2 + 16}{4x}$.

ВАРІАНТ 2

1. Знайти похідні функцій:

$$a)\, y=\frac{\arcsin 2x}{1-8x^2}; \qquad b)\, y=\left(6x^2-\frac{2}{x^4}+10\right)^3;$$

$$c)\, y=e^{-\cos^4 5x}; \qquad d)\, x^2=arctg\left(x+y\right)+\sqrt{y};$$

$$e)\, y=\left(x+\ln x\right)^{\frac{1}{x}}.$$

2. Знайти границі функцій:

$$a)\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x}; \qquad b)\lim_{x\to 0} x\cdot\ln\left(\frac{2}{\pi}arctgx\right).$$

3. Знайти найбільше та найменше значення функції $x+\sqrt{x}$ на відрізку [0;4].

4. Які розміри повинен мати циліндр найбільшої повної поверхні, вписаний в кулю радіуса R=5 см?

5. Дослідити функцію та побудувати графік: $y=\dfrac{x^2+8x}{1-x}$.

ВАРІАНТ 3

1. Знайти похідні :

$$a)\ y=\frac{5x}{\sqrt{x^3+4x^2-2}}+12^{\frac{\pi}{2}};\qquad b)\ y=\left(3^{\sin 2x}-\cos 2x\right)^3;$$

$$c)\ y=\arcsin^2 \ln 2x;\qquad d)\ x tgy-x^2+2y^2=5;$$

$$e)\ y=(x+1)^3\cdot\sqrt[5]{(x-2)^3\cdot(3-x)^{-2}};$$

2. Знайти границі функцій:

$$a)\ \lim_{x\to+0}\frac{3+\ln x}{2-3\ln\sin x};\qquad b)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)tgx.$$

3. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=x^3+2x^2-4x-3$ в точці (-1;2).

4. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 48 см. Знайти значення довжини його основи , при якому площа трикутника найбільша.

5. Дослідити функцію та побудувати її графік: $y=\dfrac{x^2-1}{x^4}$.

ВАРІАНТ 4

1. Знайти похідні функцій:

$$a)\, y=\frac{\sqrt{1+3x^2}}{2+3x^2}; \qquad b)\, y=arctg\left(x^3\right)+3^{x\cos^2 x};$$

$$c)\, y=\ln\arcsin\sqrt{3x}; \qquad d)\, x\cdot\sin 2y+y\cdot\cos 2y=0$$

$$e)\, y=\left(ctgx\right)^{x^3}.$$

2. Знайти границі функцій :

$$a)\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}; \qquad b)\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\arcsin x}\right).$$

3. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$y=\frac{2x+1}{\left(x+1\right)^2} \quad \text{на відрізку} \quad [-2;2].$$

4. Поверхня прямокутного паралелепіпеда з квадратною основою дорівнює $S=600$ см^2. Які розміри його ребер , коли його об’єм $\boldsymbol{V}$ найбільший ?

5. Дослідити функцію та побудувати її графік: $y=\dfrac{2x^4}{\left(1-x\right)^3}$.

ВАРІАНТ 5

1. Знайти похідні функцій :

$$a)\, y=\frac{2^{x^3-1}}{e^{3\sin x}}+4; \qquad b)\, y=\left(5x^3+3\sqrt[4]{x}-4\right)^5;$$

$$c)\, y=\arcsin\sqrt{1-4x^2}; \qquad d)\, x^2+y^2=\ln y;$$

$$e)\, y=(ctgx)^{\frac{x-7}{5}}.$$

2. Знайти границі функцій :

$$a)\lim_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}; \qquad b)\lim_{x\to 0} x\cdot ctg\pi x.$$

3. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$y=\frac{x-2}{x^2+5}$$ на відрізку [-3;5].

4. З куска дроту 50 см завдовжки зігнути прямокутник , який має найбільшу площу.

5. Дослідити функцію і побудувати її графік: $y=\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2}$.

ВАРІАНТ 6

1. Знайти похідні функцій :

$$a)\, y=\frac{4x+5}{\sqrt[3]{x^3-5x-2}}; \qquad b)\, y=\sqrt[7]{2^{3x}-\sec^5 3x};$$

$$c)\, y=\ln ctg\sqrt[3]{x}; \qquad d)\, x\cos y-\sin 2y=3$$

$$e)\, y=(\arcsin x)^{\sqrt{1-x^2}}.$$

2. Знайти границі функцій :

$$a)\lim_{x\to 0}\frac{tgx+\sec x-1}{tgx-\sec x+1}; \qquad b)\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right).$$

3. Знайти точки, в яких дотичні до кривої $y=3x^4+4x^3-12x^2+20$ паралельні осі абсцис.

4. Бічні сторони і менша основа трапеції дорівнюють по 10 см. Визначити її більшу основу так, щоб площа трапеції була найбільшою.

5. Дослідити функцію та побудувати її графік : $y=\dfrac{x^2+4x+1}{x+4}$.

ВАРІАНТ 7

1. Знайти похідні функцій :

$a) y = 2^{x^3+1} \cdot \operatorname{cosec} 3x;$ $\qquad$ $b) y = \frac{1}{5} \ln \frac{x+1}{\sqrt{x^2 - 3x}};$

$c) y = \ln \arcsin \frac{5}{\sqrt{x}};$ $\qquad$ $d) \sin(x - y) - 4x + 2y = 0$

$$e) y = \frac{x^2 (x+1)^5}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

2. Знайти границі функцій :

$a) \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x - 2tgx}{1 + \cos 4x};$ $\qquad$ $b) \lim\limits_{x \to 0} \left(e^x + e^{-x} - 2\right) \cdot ctgx$

3. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = x - 2\ln x$ на відрізку [1;e].

4. Довести , що з усіх рівнобедрених трикутників з заданим периметром найбільшу площу має рівносторонній трикутник.

5. Дослідити функцію та побудувати її графік : $y = \frac{x^3}{3(x^2 - 3)}$.

ВАРІАНТ 8

1. Знайти похідні функцій :

$$a)\, y=\frac{tg\frac{x}{2}}{arctg\, 2x};\qquad b)\, y=\sqrt[3]{1+x\sqrt{x+3}};$$

$$c)\, y=\arcsin\ln\cos x;\qquad d)\, 2y\cdot\ln x-x\ln y=x+y$$

$$e)\, y=(ctgx)^{\sin^2 x}.$$

2. Знайти границі функцій :

$$a)\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{\sin^3 x};\qquad b)\lim_{x\to o}=\left(\frac{1}{xarctgx}-\frac{1}{x^2}\right).$$

3. Знайти найбільше та найменше значення функції $y=\frac{1}{2}x-\sin x$ на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$.

4. Відкритий кузов вантажного автомобіля має форму прямокутного паралелепіпеда з площею поверхні $2S$. Якими повинні бути довжина і ширина кузова , щоб його об'єм був найбільшим , а відношення довжини до ширини дорівнювало $\frac{5}{2}$?

5. Дослідити функцію та побудувати її графік : $y=\dfrac{2x^2+4x-4}{x+3}$.

ВАРІАНТ 9

1. Знайти похідні функцій :

$$a)\, y = 2^{\sqrt{3x}} \cdot ctg^5 \frac{x}{3}; \qquad b)\, y = \left(2^{\arcsin x} + \arccos x\right)^2;$$

$$c)\, y = \ln tg \frac{e^{3\cos x}}{4}; \qquad d)\, (x+y)^2 + (x-2y)^3 = 0$$

$$e)\, y = (x + \sin x)^{x^2}.$$

2. Знайти границі функцій :

$$a)\, \lim_{x \to +0} \frac{\ln \sin x}{ctgx}; \qquad b)\, \lim_{x \to 1} (1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}}.$$

3. До кривої $y = 2x^2 - 8x + 5$ проведена дотична , паралельна осі Ox . Знайти координати точки дотику.

4. В прямокутний трикутник з катетами , що дорівнюють 2 см і 4 см , впишіть прямокутник найбільшої площі зі сторонами, паралельними катетам трикутника.

5. Дослідити функцію та побудувати її графік : $y = \dfrac{3 - x^2}{x + 2}$

ВАРІАНТ 10

1. Знайти похідні функцій :

$$a)\, y=\sqrt[7]{\sin^3 2x}\cdot 2^{-\frac{3}{7}x};\qquad b)\, y=\ln\left(\frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\right);$$

$$c)\, y=e^{\arccos\sqrt{1-2x}};\qquad d)\, y=2x+arcctg\,\frac{x}{y};$$

$$e)\, y=(x+5)^{\arcsin\frac{x}{5}}.$$

2. Знайти границі функцій :

$$a)\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2};\qquad b)\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{ctgx}$$

3. Знайти найбільше та найменше значення функції $y=x\ln\frac{x}{5}$ на відрізку [1;5].

4. В конус радіуса 4 дм і висотою 6 дм вписано циліндр найбільшого об’єму. Знайти цей об’єм.

5. Дослідити функцію та побудувати її графік : $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$.

ВАРІАНТ 11

1. Знайти похідні функцій :

$$a)\, y = 2^{\sin 3x} \cdot \arcsin 2x; \qquad b)\, y = \left(x^5 + \sqrt[7]{x} + 2\right)^5;$$

$$c)\, y = arctg^3 \cos 5x; \qquad d)\, \frac{x}{y} + \ln y - 2\ln x = 10;$$

$$e)\, y = \left(x^2 + 4\right)^{\sqrt{x}}.$$

2. Знайти границі функцій :

$$a)\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{ctgx - 1}{\sin 4x}; \qquad b)\lim_{x\to\infty}\left(x + 2^x\right)^{\frac{1}{x}}.$$

3. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = x - 2\cos x$ на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

4. Задане додатне число *a* розкласти на два доданки так , щоб їхній добуток був найбільшим.

5. Дослідити функцію та побудувати графік : $y = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$.

ВАРІАНТ 12

1. Знайти похідні функцій :

$$a)\, y = 3^{-5x} \cdot \sqrt[3]{\sin 5x}; \qquad b)\, y = \ln \sqrt[3]{\left(\frac{2+x^3}{2-x^3}\right)^5};$$

$$c)\, y = e^{arctg^2 \sqrt{x}} + \lg e; \qquad d)\, e^{3y} - e^{-2x} + 5 \cdot \frac{y}{x} = 3$$

$$e)\, y = \left(\cos\frac{x}{3}\right)^{ctgx}.$$

2. Знайти границі функцій :

$$a)\, \lim_{x\to 1+0} \frac{\ln(x-1) - x}{tg\,\frac{\pi}{2x}}; \qquad b)\, \lim_{x\to +0} \left[\ln(x+e)\right]^{\frac{1}{x}}.$$

3. Скласти рівняння нормалі до графіка функції $y = -\sqrt{x} + 2$ в точці перетину з бісектрисою першого координатного кута.

4. Знайти на параболі $y = x^2$ точку, найближчу до точки $A\left(2; \frac{1}{2}\right)$.

5. Дослідити функцію та побудувати її графік : $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x-1}$.

ВАРІАНТ 13

1. Знайти похідні функцій :

$$a)\, y = e^{\sqrt[7]{x^3}} \cdot 7^{-3x}; \qquad b)\, y = \left(3^{tg\,2x} - ctg\,3x\right)^4;$$

$$c)\, y = \arccos e^{x^2}; \qquad d)\, y\ln x - x\ln y = \ln(xy);$$

$$e)\, y = (arctg\,2x)^{\sin 3x}.$$

2. Знайти границі функцій :

$$a)\lim_{x\to 0}\frac{e^x + \sin x - 1}{\ln(1+x)}; \qquad b)\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\pi}{2} - arctgx\right)^{\frac{1}{x}}.$$

3. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = 2xe^{x+1}$ на відрізку [-3;0].

4. У прямокутний трикутник з гіпотенузою 8 см і кутом $60°$ вписано прямокутник, основа якого розміщена на гіпотенузі. Які повинні бути розміри прямокутника, щоб його площа була максимальною ?

5. Дослідити функцію та побудувати її графік : $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$.

ВАРІАНТ 14

1. Знайти похідні функцій :

$$a)\, y = e^{\arcsin 5x} \cdot ctg3x; \qquad b)\, y = \left(x^3 - \frac{5}{x^2} + 4 \right)^2;$$

$$c)\, y = \ln\cos 7x + \ln^3 2x \qquad d)\, y - x^2 = arctgy;$$

$$e)\, y = (\sin 3x)^{\sqrt{x}}.$$

2. Знайти границі функцій :

$$a)\lim_{x\to 1} \frac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi x}{2}}; \qquad b)\lim_{x\to 0}(ctgx)^x.$$

3. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ в точці з абсцисою 2.

4. Сума катетів прямокутного трикутника стала і дорівнює a >0. Для якого трикутника гіпотенуза має найменшу довжину ?

5. Дослідити функцію та побудувати її графік : $y = \dfrac{(x-5)(x+3)}{(x+2)^2}$.

ВАРІАНТ 15

1. Знайти похідні функцій :

$$a)\, y=\frac{5x}{\sqrt{x^3+4x^2-2}}+12^{\frac{\pi}{2}}; \qquad b)\, y=\left(3^{\sin 2x}-\cos 2x\right)^3;$$

$$c)\, y=\arcsin^2 \ln 2x; \qquad d)\, xtgy-x^2+2y^2=5;$$

$$e)\, y=(x+1)^3\cdot\sqrt[5]{(x-2)^3\cdot(3-x)^{-2}}.$$

2. Знайти границі функцій :

$$a)\, \lim_{x\to+0}\frac{3+\ln x}{2-3\ln\sin x}; \qquad b)\, \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)tgx.$$

3. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=x^3+2x^2-4x-3$ в точці (-1;2).

4. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 48 см. Знайти значення довжини його основи , при якому площа трикутника найбільша.

5. Дослідити функцію та побудувати її графік : $y=\dfrac{x^2-1}{x^4}$.

ВАРІАНТ 16.

1. Знайти похідні функцій :

$$a)\, y=\frac{3x-2}{\sqrt{x^2+3x+2}}; \qquad b)\, y=\sqrt{e^{2x}+\operatorname{cosec}5x};$$

$$c)\, y=\ln arcctg\,\frac{1}{x}; \qquad d)\, 3^{x+y}-xy\ln 5=12;$$

$$e)\, y=\left(1+x^2\right)^{\sin 2x}.$$

2. Знайти границі функцій :

$$a)\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}; \qquad b)\lim_{x\to+\infty}\left(\pi-2arctg\sqrt{x}\right)\sqrt{x}.$$

3. На кривій $y=x^3$ задано дві точки *A*(-1;-1) і *B*(2;8). В якій точці кривої дотична до неї буде паралельна проведеній січній *AB*?

4. При якому значенні довжини висоти прямокутна трапеція з гострим кутом $45°$ і периметром 4 см має найбільшу площу ?

5. Дослідити функцію та побудувати її графік : $y=\dfrac{-x^2+3x-1}{x}$.

ВАРІАНТ 17

1. Знайти похідні функцій :

$$a)\, y = e^{tgx} \cdot \ln 2x; \qquad b)\, y = \sqrt[7]{\left(1+\sin^3 3x\right)^2};$$

$$c)\, y = \cos e^{2\sqrt{3x}}; \qquad d)\, arctg\left(\frac{y}{x}\right) = \ln\left(x^2 + y^2\right);$$

$$e)\, y = \left(3 - e^{\sqrt{x}}\right)^{tg^2 x}.$$

2. Знайти границі функцій :

$$a)\, \lim_{x\to +0} \frac{\ln\left(1-\cos x\right)}{\ln tgx}; \qquad b)\, \lim_{x\to 0} \left(ctgx\right)^{\sin x}.$$

3. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = 2\sqrt[3]{x^2} - x$ на відрізку [-1;3].

4. Серед усіх прямокутників з даною площею S знайти прямокутник з найменшим периметром.

5. Дослідити функцію та побудувати її графік : $y = \dfrac{x^3}{x-1}$

ВАРІАНТ 18

1. Знайти похідні функцій :

$$a)\, y = e^{\frac{x}{\sqrt{5}}} \cdot arctg^3 3x; \qquad b)\, y = \sqrt[8]{\sec 5x - e^{5x}};$$

$$c)\, y = \log_3\left(2x^2 + \sqrt{x^4 + 1}\right) + \sqrt{3}; \quad d)\cos(x + y) = 2 + x^3 \cdot e^y;$$

$$e)\, y = \left(\arccos\sqrt{x}\right)^{tgx}.$$

2. Знайти границі функцій :

$$a)\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x} - 1}{\arcsin 3x}; \qquad b)\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\pi - 2x)^{\cos x}.$$

3. В яких точках кривої $y = 2 + x - x^3$ дотична до неї паралельна прямій $11x + y + 1 = 0$.

4. Серед усіх прямокутників з даним периметром $2p$ знайти той, у якого діагональ найменша.

5. Дослідити функцію та побудувати її графік : $y = \dfrac{1 - x}{(x - 2)^3}$.

ВАРІАНТ 19

1. Знайти похідні функцій :

$$a)\, y=\frac{e^{\arccos 2x}}{\sqrt{1-4x^2}}; \qquad b)\, y=\left(3^{tg\,3x}-\sec 3x\right)^2;$$

$$c)\, y=\ln arctg\sqrt{x-2}; \qquad d)\, x^2y-y^2x+(x-y)^3=0;$$

$$e)\, y=\frac{x^2\left(x^2+1\right)^3}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

2. Знайти границі функцій :

$$a)\, \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\frac{\ln\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{tgx}; \qquad b)\, \lim_{x\to 0} x^2\cdot e^{\frac{1}{x^2}}.$$

3. Знайти найбільше та найменше значення функції $y=x+2\sin x$ на відрізку $[0;\pi]$.

4. Знайти на гіперболі $\frac{x^2}{2}-y^2=1$ точку, найближчу до точки (3;0).

5. Дослідити функцію та побудувати її графік : $y=\frac{20x^2}{(x-1)^3}$.

ВАРІАНТ 20

1. Знайти похідні функцій :

$$a)\, y=\sin^2 3x\cdot\cos^3 2x; \qquad b)\, y=\ln\sqrt[3]{\frac{10}{e^{3x}-e^{-3x}}};$$

$$c)\, y=\arccos\left(\sin\frac{x}{2}\right); \qquad d)\, e^{xy}-x^2+y^2=0$$

$$c)\, y=\left(x^3+5\right)^{\sin x}.$$

2. Знайти границі функцій :

$$a)\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}; \qquad b)\lim_{x\to +0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}.$$

3. Знайти найбільшу та найменше значення функції $y=x\ln x-x$ на відрізку $\left[e^{-1};e\right]$.

4. Гіпотенуза прямокутного трикутника $c=9\sqrt{2}$. Якими повинні бути катети a і b, щоб периметр трикутника був найбільшим ?

5. Дослідити функцію та побудувати її графік : $y=\dfrac{1-x^3}{x^2}$.

ВАРІАНТ 21

1. Знайти похідні функцій :

$$a)\, y = tg^2 5x \cdot \cos^3(3 - x); \qquad b)\, y = \sqrt[3]{x^2 - \frac{1}{x^5} + 5\sqrt{x}};$$

$$c)\, y = 2^{\frac{1-x}{1+x}} + tg8; \qquad d)\, arctgx - \ln\sqrt{3y + 2} = 5;$$

$$e)\, y = (\arccos x)^{\ln^2 x}.$$

2. Знайти границі функцій :

$$a)\, \lim_{x \to 3+0} \frac{\cos x \cdot \ln(x - 3)}{\ln(e^x - e^3)}; \qquad b)\, \lim_{x \to 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}.$$

3. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = e^{-x}(x^2 + x - 5)$ на відрізку [-4;4].

4. Сума двох чисел дорівнює a. Якими мають бути ці числа, щоб сума їхніх квадратів була найменшою ?

5. Дослідити функцію та побудувати її графік : $y = \dfrac{(x+1)^2}{x-2}$.

ВАРІАНТ 22

1. Знайти похідні функцій :

$$a)\, y=\frac{x^4+tg2x}{\sqrt{8x^2+9}}; \qquad b)\, y=\ln\sqrt[3]{\frac{0{,}1-5x^3}{x^2+8x+15}};$$

$$c)\, y=\sin^2\ln 5x+ctg5; \qquad d)\, x-y=\arccos x-\arccos y$$

$$e)\, y=(\cos 5x)^{x^3+4}.$$

2. Знайти границі функцій :

$$a)\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\ln\cos 3x}; \qquad b)\lim_{\alpha\to 0}\left[\frac{2}{\sec^2\alpha}-\frac{1}{1-\cos\alpha}\right].$$

3. Знайти найбільше та найменше значення функції $y=\frac{4-x^2}{4+x^2}$ на відрізку [-2;3].

4. Основа трикутника дорівнює 12 см , а сума бічних сторін – 20см. Знайти таке значення висоти трикутника , щоб його площа була найбільшою.

5. Дослідити функцію та побудувати її графік : $y=x-3+\frac{2}{x}$.

ВАРІАНТ 23

1. Знайти похідні функцій :

$$a)\ y=\frac{5x+7\ln x^2}{\sqrt{1+9x^2}};\qquad b)\ y=\sin^2\left(x^2-3x+\frac{x}{3}\right);$$

$$c)\ y=arcctg\left(tg\sqrt{x}\right)+2\ln\frac{\pi}{2};\qquad d)\ x^3+y^3+3xy=5;$$

$$e)\ y=(\cos 2x)^{tg\,2x}.$$

2. Знайти границі функцій :

$$a)\ \lim_{x\to 1}\frac{tg\frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)};\qquad b)\ \lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}(\sec\alpha-tg\alpha).$$

3. Знайти найбільше та найменше значення функції $y=x^5-5x^4+5x^3+1$ на відрізку [-1;2].

4. Довести , що якщо добуток двох додатних чисел є стале число , то їхня сума буде найменшою , коли ці числа рівні між собою.

5. Дослідити функцію та побудувати її графік : $y=\dfrac{x+\sqrt{2}}{x^2-1}$.

ВАРІАНТ 24

1. Знайти похідні функцій :

$$a)\ y = e^{ctg\,2x} \cdot \sqrt[3]{\sin 5x}; \qquad b)\ y = \sqrt[3]{x + x\sqrt[5]{x}};$$

$$c)\ y = \ln \arccos \frac{1}{\sqrt{x}} + \sin 3; \qquad d)\ x\cos y = \sin x + \sin 2y;$$

$$e)\ y = x^{\arcsin x}.$$

2. Знайти границі функцій :

$$a)\ \lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 7x - 5}{x^3 + 2x^2 - 9x + 6}; \qquad b)\ \lim_{x\to +0} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^x.$$

3. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = \frac{1}{2}x + \cos x$ на відрізку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

4. Якою повинна бути основа рівнобедреного трикутника з заданою площею *S*, щоб його периметр був найбільшим ?

5. Дослідити функцію та побудувати її графік : $y = \frac{x^3}{2(x-1)^2}$.

ВАРІАНТ 25

1. Знайти похідні функцій :

$$a)\, y = \frac{\arcsin 2x}{arctg\,\frac{2}{x}}; \qquad b)\, y = \left(x^3 + 5\sqrt[5]{x^3} + 2\right)^3;$$

$$c)\, y = \ln\sin\left(3^{x^2}\right) + 7^{\frac{\pi}{3}}; \qquad d)\, e^y \cdot \sin x = e^{-x} \cdot \cos y;$$

$$e)\, y = \left(x^2 + arctg\,2x\right)^{\sin 3x}.$$

2. Знайти границі функцій :

$$a)\, \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)}{\ln(1+x)}; \qquad b)\, \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (1 - tgx)\cdot \sec 2x.$$

3. Скласти рівняння такої дотичної до параболи $y = x^2 + 5x + 3$, яка паралельна до прямої $5x - y + 12 = 0$.

4. Ділянка землі має форму паралелограма з гострим кутом $\alpha = 60°$. При яких розмірах її сторін дротом довжиною l=24 м можна огородити найбільшу площу ?

5. Дослідити функцію та побудувати її графік : $y = \dfrac{x^4}{(1+x)^3}$.

ВАРІАНТ 26

1. Знайти похідні функцій :

$$a)\, y=\sin\left(\ln 5x\right)\cdot\cos(\ln\frac{x}{5});\qquad b)\, y=\frac{3}{\sqrt{2}}arctg^{5}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^{2}}};$$

$$c)\, y=e^{\arcsin\frac{1}{x}}+5^{\ln 2};\qquad d)\, xy^{2}=\cos\frac{x}{y};$$

$$e)\, y=\left(ctg\,4x\right)^{\sin 4x}.$$

2. Знайти границі функцій :

$$a)\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{tgx-x};\qquad b)\lim_{x\to+\infty}\left(\ln 2x\right)^{\frac{1}{\ln x}}.$$

3. Знайти найбільше значення функції $y=\frac{x}{8}+\frac{2}{x}$ на відрізку [1;6].

4. Периметр осьового перерізу циліндра дорівнює 12 см. Знайти найбільший об’єм такого циліндра.

5. Дослідити функцію та побудувати її графік : $y=\frac{x^{2}-x+1}{x-1}$.

ВАРІАНТ 27

1. Знайти похідні функцій :

$$a)\, y=\frac{\sqrt[3]{3-5x^2}}{e^x-ctgx}; \qquad b)\, y=\sqrt{x+\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x^3}};$$

$$c)\, y=\sin\left(\cos^2(tgx)\right)+3; \qquad d)=\ln\left(x^2+y^2\right)+arctg\,\frac{x}{y}=x\cdot y$$

$$e)\, y=(tg3x)^{\frac{x}{2}}.$$

2. Знайти границі функцій :

$$a)\lim_{x\to 3}\frac{\ln\left(x^2-8\right)}{2x^2-5x-3}; \qquad b)\lim_{x\to 1}\left[\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right].$$

3. Який кут утворює з віссю Ox отична до параболи $y=x^2-3x+5$, що проведена в точці $P(2;3)$? Написати рівняння цієї дотичної.

4.Знайти найбільшу площу прямокутника, вписаного в круг радіуса R.

5. Дослідити функцію та побудувати її графік : $y=\dfrac{1-x^2}{4-x^2}$.

ВАРІАНТ 28

1. Знайти похідні функцій :

$$a)\, y = e^{-3x^2} \cdot \cos^3(5x+3); \qquad b)\, y = \ln\frac{3+\sqrt{9-x^2}}{x^3};$$

$$c)\, y = arctg\,\frac{2\sqrt{x}}{1-x} + \cos 8\pi; \qquad d)\, (x+y)^2 = (x-2y)^4;$$

$$e)\, y = (arctg\,3x)^{\sin x^3}.$$

2. Знайти границі функцій :

$$a)\, \lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{1+2\ln\sin x}; \qquad b)\, \lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}.$$

3.Знайти найбільше та найменше значення функції $y = x^2 \ln x$ на відрізку $\left[e^{-2};1\right]$.

4. Знайти найбільший об'єм конуса, твірна якого дорівнює *l*.

5. Дослідити функцію та побудувати її графік : $y = x + \dfrac{x}{3x-1}$.

ВАРІАНТ 29

1. Знайти похідні функцій :

$$a)\, y = \frac{\sin 5x}{\cos 5^{x}}; \qquad b)\, y = \sqrt{x^2 - 2\sqrt[5]{x} + 4};$$

$$c)\, y = \arcsin \log_9 \frac{1}{x} - 7tg\frac{\pi}{3}; \qquad d)\, tgx - \sqrt{5y + 4} + y = 0$$

$$e)\, y = \sqrt[3]{\frac{x(1 + x^2)}{\sin^5 x}}.$$

2. Знайти границі функцій :

$$a)\, \lim_{x \to 0} \frac{e^x \sin x - x}{3x^2 + x^5}; \qquad b)\, \lim_{x \to 0} \sin x \cdot \ln ctgx.$$

3. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = x - 2\sqrt{x}$ на відрізку [0;5].

4. Яке додатне число, будучи складеним з оберненим йому числом, дає найменшу суму ?

5. Дослідити функцію та побудувати її графік : $y = \dfrac{(x-3)^2}{2(x-1)}.$

ВАРІАНТ 30

1. Знайти похідні функцій:

$$a)\, y=\frac{x+e^{-2x}}{x-e^{-2x}}; \qquad b)\, y=\ln\frac{tg\frac{x}{3}}{5+\sin^2 2x};$$

$$c)\, y=\cos^3(\log_2 5x)+5^{\frac{\pi}{2}}; \qquad d)\, y\ln y=x^2+\sqrt{x+y};$$

$$e)\, y=\sqrt{\frac{x^2(x+1)}{(1-x)^2}}.$$

2. Знайти границі функцій:

$$a)\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi-2arctgx}{e^{\frac{3}{x}}-1}; \qquad b)\lim_{x\to 0}\left[\frac{\pi}{4x}-\frac{\pi}{2x\left(e^{\pi x}+1\right)}\right].$$

3. Знайти найбільше та найменше значення функції $y=x+\frac{4}{x+2}$ на відрізку [-1;3].

4. Серед усіх циліндрів, які можуть бути вписані в конус з радіусом основи r=12 см і висотою h=36 см , знайти циліндр найбільшого об’єму.

5. Дослідити функцію і побудувати її графік: $y=\frac{x^3-x^2}{(x+1)^2}$.

ЗРАЗОК ТЕСТІВ

Тема 1. Вступ до математичного аналізу

Питання 1

	В якій точці функція $y=\frac{1}{x-1}$ має розрив?
	$x=\infty$
	$x=1$
	$x=0$
	$x=-1$

Питання 2

	Не користуючись правилом Лопіталя, знайти границю $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-7x+10}{x^2-9x+20}$
	-2
	25
	3
	$-7{,}5$
	12

Питання 3

	Знайти границю $\lim\limits_{x\to 6}\frac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}$ (не користуючись правилом Лопіталя)
	$\frac{3}{2}$
	8
	$3{,}5$
	-17
	6

Питання 4

	Знайти границю $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)$
	21
	$\frac{1}{2}$
	$-\frac{3}{2}$
	2
	-3

Питання 5

	Коли функції $\alpha_1(x)$ та $\alpha_2(x)$, нескінченно малі при $x \to x_0$, називаються еквівалентними?
	$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 0$
	$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = A$, де $A < \infty$
	$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 1$
	$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = \infty$

Тема 2. Елементи диференціального числення

Питання 6

	Знайти похідну функції $y = (5x^2 - \cos 2x)^4$
	$y' = 8(5x^2 - \cos 2x)^3 (5x + \sin 2x)$
	$y' = 4(5x^2 - \cos 2x)^3 (10x - \sin 2x)$
	$y' = 2(5x^2 - \cos 2x)^4 (5x + \sin 2x)$
	$y' = 4(5x^2 - \cos 2x)^4 (5x^2 - \cos 2x)$

Питання 7

	Знайти похідну неявно заданої функції $x + \ln y + y = 0$
	$y' = -\left(1 + \frac{1}{y}\right)$
	$y' = -2y$
	$y' = -\frac{y}{y+1}$
	$y' = y - 2 + \frac{1}{y-1}$

Питання 8

	Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої $y = f(x)$ у точці $M_0(x_0, y_0)$
	$y - y_0 = f(x)(x - x_0)$; $y - y_0 = -\frac{1}{f(x)}(x - x_0)$
	$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$; $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$
	$y = f'(x_0)(x - x_0)$; $y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$
	$y = f(x)(x - x_0)$; $y = -\frac{1}{f(x)}(x - x_0)$

Питання 9

	Знайти екстремальні значення функції $y = 2x^2 - \frac{4}{3}x^3$
	$y_{\min} = -2$; $y_{\max} = 5$
	$y_{\min} = -\frac{2}{3}$; $y_{\max} = 2$
	$y_{\min} = 0$; $y_{\max} = \frac{2}{3}$
	$y_{\min} = -3$; $y_{\max} = 1{,}5$
	$y_{\min} = 0$; $y_{\max} = \frac{1}{3}$

Питання 10

	Знайти найбільше та найменше значення функції $y = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x$ на відрізку $[0;3]$
	$M = 5$; $m = -\frac{1}{2}$
	$M = 3$; $m = 1{,}5$
	$M = 2\frac{2}{3}$; $m = \frac{1}{2}$
	$M = 1{,}5$; $m = -2$
	$M = \frac{3}{2}$; $m = 0$

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Дубовик В.П., Юрик І.І., Вища математика. –К.: 1988 А.С.К.,2001.
2. Суліма І.М., Ковтун І.І., Радчик І.А. Вища математика. Частина друга. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. –К.:Видавничий центр НАУ,2002.
3. Суліма І.М., Ковтун І.І., Батечко Н.Г., Нікітіна І.А., Яковенко В.М., Збірник задач-К.: Видавничий центр НАУ, 2006.
4. Суліма І.М., Ковтун І.І., Батечко Н.Г., Нікітіна І.А., Яковенко В.М., Вища математика у задачах і вправах. Частина перша. –К.: Видавничий центр НАУ, 2005.
5. Данко П.Е., Попов А.Г., Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть І. –М.: В. Шк., 1974.