

Практична робота 27-28

Тема: Особливі границі функції.

Мета: Навчитись застосовувати нескінченно малі величини при обчисленні границі функції.

План практичних занять

1. Дві особливі границі.
2. Застосування нескінченно малих величин при обчисленні границь.

Термінологічний словник ключових понять

Перша особлива границя — $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Друга особлива границя — $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

Навчальні завдання

1. **Приклад.** Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x^2} = \left[\frac{0}{0} \right]$.

● Маємо

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{5x}{2}}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{5x}{2}}{x} \right)^2 = 2 \left(\frac{5}{2} \right)^2 = \frac{25}{2}.$$

2. **Приклад.** Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 3x + 7} \right)^x = [1^\infty]$.

● Діленням чисельника дробу на знаменник виділяємо цілу частину

$$\frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 3x + 7} = 1 + \frac{8x - 3}{x^2 - 3x + 7}.$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 3x + 7} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{8x - 3}{x^2 - 3x + 7} \right)^x = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{8x - 3}{x^2 - 3x + 7} \right)^{\frac{x(8x-3)}{8x-3}} \right)^{\frac{x(8x-3)}{x^2-3x+7}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{8x - 3}{x^2 - 3x + 7} \right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}} \right)^{\frac{8-\frac{3}{x}}{1-\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}}}; \end{aligned}$$

оскільки $\frac{8x-3}{x^2-3x+7} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, то $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{8x-3}{x^2-3x+7} \right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}} = e$.

Зауважимо, що $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8-3/x}{1-3/x+7/x^2} = 8$. Дістанемо:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 3x + 7} \right)^x = e^8.$$

3. Приклад. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x \sin x)}{\operatorname{tg}(x^2)}$.

● Замінімо чисельник та знаменник дробу еквівалентними н.м.в.:
 $\ln(1 + 3x \sin x) \sim 3x \sin x, \operatorname{tg}(x^2) \sim x^2$, тоді

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x \sin x)}{\operatorname{tg}(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \sin x}{x^2} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 3.$$

Завдання для перевірки знань

1. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} nx}{\sin nx}$. Відповідь. $\frac{m}{n}$.
2. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{1 - \cos 3x}$. Відповідь. $\frac{25}{9}$.
3. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$. Відповідь. $\frac{1}{2}$.
4. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + mx)}{x}$. Відповідь. m .
5. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - x}{\ln(x + 1)}$. Відповідь. 2.
6. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m}$ ($n, m \in \mathbb{N}$). Відповідь. $\begin{cases} 0, \text{ якщо } n > m \\ 1, \text{ якщо } n = m \\ \infty, \text{ якщо } n < m \end{cases}$.
7. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin 2x}$. Відповідь. $\frac{3}{4}$.
8. Знайти $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt[3]{(1 - \cos \alpha)^2}}$. Відповідь. ∞ .
9. Знайти $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos \alpha)^2}{\operatorname{tg}^3 \alpha - \sin^3 \alpha}$. Відповідь. ∞ .
10. Знайти $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$. Відповідь. $-\frac{3}{2}$.
11. Знайти $\lim_{y \rightarrow a} \left(\sin \frac{y-a}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi y}{2a} \right)$. Відповідь. $-\frac{a}{\pi}$.
12. Знайти $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}$. Відповідь. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
13. Знайти $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x}$. Відповідь. 2.
14. Знайти $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(2x \operatorname{tg} x - \frac{\pi}{\cos x} \right)$. Відповідь. -2.

15. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(a+x) - \cos(a-x)}{x}$. *Відповідь.* $-2 \sin a$.
16. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2}$. *Відповідь.* $\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}$.
17. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x) - \sin(a-x)}{\operatorname{tg}(a+x) - \operatorname{tg}(a-x)}$. *Відповідь.* $\cos^3 a$.
18. Знайти $\lim_{\alpha \rightarrow \beta} \frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}{\alpha^2 - \beta^2}$. *Відповідь.* $\frac{\sin 2\beta}{2\beta}$.
19. Знайти $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+2h) - 2\sin(a+h) + \sin a}{h^2}$. *Відповідь.* $-\sin a$.
20. Знайти $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(a+2h) - 2\operatorname{tg}(a+h) + \operatorname{tga}}{h^2}$. *Відповідь.* $\frac{2 \sin a}{\cos^3 a}$.
26. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+3} \right)^{x+1}$. *Відповідь.* e^{-1} .
27. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+5}{3x+7} \right)^{3x+2}$. *Відповідь.* e^{-2} .
28. Знайти $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{x+2}{3x+4} \right)^{2x}$. *Відповідь.* $\begin{cases} 0 & \text{при } x \rightarrow +\infty \\ \infty & \text{при } x \rightarrow -\infty. \end{cases}$
29. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{x^2}$. *Відповідь.* e^2 .
30. Знайти $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{x+1}{2x-1} \right)^x$. *Відповідь.* $\begin{cases} 0 & \text{при } x \rightarrow +\infty \\ \infty & \text{при } x \rightarrow -\infty. \end{cases}$
31. Знайти $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)^x$. *Відповідь.* $\begin{cases} \infty & \text{при } x \rightarrow +\infty \\ 0 & \text{при } x \rightarrow -\infty. \end{cases}$
32. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^x$. *Відповідь.* 1.
33. Знайти $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x^2}$. *Відповідь.* $\begin{cases} \infty & \text{при } x \rightarrow +\infty \\ 0 & \text{при } x \rightarrow -\infty. \end{cases}$
34. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\operatorname{cosec} x}$. *Відповідь.* e .
35. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x} \right)^{\frac{1}{2x}}$. *Відповідь.* \sqrt{e} .
36. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{x \ln x}$. *Відповідь.* 1.
37. Знайти $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{x-2}}$. *Відповідь.* \sqrt{e} .
38. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\ln^2(1+2x)}$. *Відповідь.* $9/4$.
39. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1+x-3x^2+2x^3)}{\ln(1+3x-4x^2+x^3)}$. *Відповідь.* $-1/2$.

40. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\ln(1+x^2)}$. *Відповідь.* $-1/2$.

41. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}$. *Відповідь.* -2 .

42. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x-1}$. *Відповідь.* e .

43. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$. *Відповідь.* 2 .

44. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{x}$. *Відповідь.* 1 .

45. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$. *Відповідь.* $a-b$.

46. Задана функція $y = x^3$.

а) Показати, що Δy та Δx при $x \rightarrow 0$ ($x \neq 0$) є н.м.в. одного порядку мализни.

б) Перевірити, що при $x = 0$ змінна величина Δy є н.м.в. вищого порядку мализни, ніж н.м.в. Δx .

в) При якому значенні x прирости Δx та Δy будуть еквівалентними н.м.в.?

Відповідь. $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$.