Практична робота 29-30

Тема: Неперервність функції.
Мета: Навчитись досліджувати функцію на неперервність, вміти класифікувати точки розриву функції.

План практичних занять

1. Неперервність функції.
2. Класифікація точок розриву функції.

Термінологічний словник ключових понять

Функція неперервна в точці, якщо в цій точці нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції. Функція є *неперервною на проміжку*, якщо вона неперервна в кожній точці цього проміжку.

Точка розриву функції — це точка $x = x_0$, в якій порушується хоча б одна з умов рівності $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x)$.

Точка розриву 1-го роду — а) *Точка $x = x_0$ називається точкою розриву 1-го роду* (розрив неусувний) для функції $y = f(x)$, якщо односторонні границі (зліва і справа) функції у цій точці існують, але не рівні між собою, тобто

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0 + 0} f(x).$$

б) *Точка $x = x_0$ називається точкою розриву 1-го роду* (розрив усувний) для функції $y = f(x)$, якщо односторонні границі функції у цій точці існують, рівні між собою, але не дорівнюють значенню функції у цій точці, або функція у цій точці не існує, тобто

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0).$$

Точка розриву 2-го роду — точка $x = x_0$ називається точкою розриву 2-го роду для функції $y = f(x)$, якщо в цій точці не існує хоча б одна з односторонніх границь (зліва чи справа).

Навчальні завдання

1. **Приклад**. Показати, що при $x = 4$ функція $y = \dfrac{x}{x-4}$ має розрив.

● Знаходимо $\lim\limits_{x \to 4-0} \dfrac{x}{x-4} = -\infty, \lim\limits_{x \to 4+0} \dfrac{x}{x-4} = +\infty.$

Таким чином, функція при $x \to 4$ не має ні правої, ні лівої скінченної границі. Звідси, $x = 4$ є точкою розриву 2-го роду.

2. **Приклад**. Показати, що при $x = 4$ функція $y = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x-4}$ має розрив.

● Якщо $x \to 4 - 0$, то $\dfrac{1}{x-4} \to -\infty, \lim\limits_{x \to 4-0} y = -\dfrac{\pi}{2}$. Якщо $x \to 4 + 0$, то $\dfrac{1}{x-4} \to +\infty, \lim\limits_{x \to 4+0} y = \dfrac{\pi}{2}$.
Таким чином, при $x \to 4$ функція має ліву та праву скінченні границі, причому

ці границі різні. Звідси, $x = 4$ є точкою розриву 1-го роду.

3. **Приклад**. Показати, що при $x = 5$ функція $y=\dfrac{x^2-25}{x-5}$ має розрив.

● У точці $x = 5$ функція має невизначеність $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. В інших точках дріб скорочується на $x - 5$, оскільки $x-5\neq 0$. Звідси, при $x\neq 5$ $y=x+5$. Легко показати, що

$$\lim_{x\to 5-0} y=\lim_{x\to 5+0} y=10.$$

Таким чином, при $x = 5$ функція має усувний розрив. Його можна усунути, якщо домовитися, що при $x = 5$ $y = 10$.

Звідси можна вважати, що функція $y=\dfrac{x^2-25}{x-5}$ неперервна при всіх значеннях x, якщо вважати, що рівність $\dfrac{x^2-25}{x-5}=x+5$ справджується при всіх значеннях x, включаючи і саму точку $x = 5$. У цьому випадку графіком функції буде пряма лінія $y=x+5$.

Завдання для перевірки знань

1. Знайти точки розриву функції $y=1/((x-1)(x-5))$.
Відповідь. $x=1,\ x=5$ — точки розриву 2-го роду.

2. Який характер розриву функції $y=1/\left(1-e^{1-x}\right)$ в точці $x = 1$?
Відповідь. $x = 1$ — точка розриву 2-го роду.

3. Знайти точки розриву функції

$$y=(\operatorname{tg}x\operatorname{arctg}(1/(x-3)))/(x(x-5)).$$

Відповідь. $x = 3$ — точка розриву 1-го роду; $x = 5$ — точка розриву 2-го роду; $x = 0$ — точка усувного розриву; $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n(0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ — точки розриву 2-го роду.

4. Знайти точки розриву функції

$$y=\left(x^3-6x^2+11x-6\right)/\left(x^2-3x+2\right).$$

Відповідь. $x = 1$, $x = 2$ — точки усувного розриву.

5. Знайти точки розриву функції $y=1/\left(x^2+x+1\right)$.
Відповідь. Функція неперервна на всій числовій прямій $(-\infty,+\infty)$.

6. Дослідити на неперервність функцію $y=\dfrac{1}{(x-1)(x-6)}$ на сегменті: а) [2, 5]; б) [4, 10]; в) [0, 7].
Відповідь. а) функція неперервна; б) має одну точку розриву 2-го роду; в) має дві точки розриву 2-го роду.

7. Дослідити на неперервність функцію $y=1/\left(x^4-26x^2+25\right)$ на сегменті: а) [6, 10]; б) [– 2, 2]; в) [– 6, 6].

Відповідь. а) функція неперервна; б) має дві точки розриву 2-го роду; в) має чотири точки розриву 2-го роду.

8. Знайти точки розриву функції $y=\left(2^{1/(x-2)}-1\right)/\left(2^{1/(x-2)}+1\right)$.
Відповідь. $x = 2$ — точка розриву 1-го роду.

9. Дослідити на неперервність та побудувати графік функції

$$y=\begin{cases}0{,}5x^2 \text{ при } |x|<2,\\ 2{,}5 \text{ при } |x|=2,\\ 3 \text{ при } |x|>2.\end{cases}$$

Відповідь. $x=\pm 2$ — точки розриву 1-го роду (розрив неусувний).

10. Дослідити на неперервність та побудувати графік функції

$$y=\frac{1}{(1+2^{\frac{1}{x}})}.$$

Відповідь. $x = 0$ — точка розриву 1-го роду (розрив неусувний).

11. Дослідити на неперервність та побудувати графік функції

$$y=\operatorname{arctg}\frac{a}{x-a}.$$

Відповідь. $x = a$ — точка розриву 1-го роду.

12. Дослідити на неперервність та побудувати графік функції

$$y=\frac{x^3-x^2}{2|x-1|}.$$

Відповідь. $x = 1$ — точка розриву 1-го роду (розрив неусувний).

13. Дослідити на неперервність та побудувати графік функції

$$y=\begin{cases}x^2+1, \text{ якщо } x>1,\\ x+1, \text{ якщо } x<1,\\ 3, \text{ якщо } x=1.\end{cases}$$

Відповідь. $x = 1$ — точка розриву 1-го роду (розрив усувний).