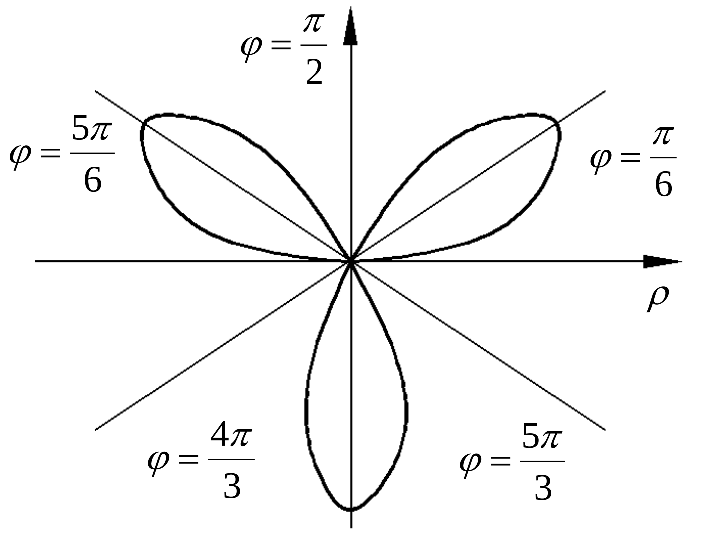
УКРАЇНА
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БІОРЕСУРСІВ І ПРИРОДОКОРИСТУВАННЯ УКРАЇНИ

Кафедра вищої та прикладної математики

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Лінійна та векторна алгебра

Методичні вказівки та індивідуальні завдання для студентів інженерних спеціальностей



Київ-2016

УДК 512.64

Методична розробка містить теоретичні відомості з лінійної та векторної алгебри. Наведено розв’язки типових прикладів. Запропоновано 30 варіантів індивідуальних завдань.

Призначено для самостійної роботи студентів інженерних спеціальностей.

Рекомендовано Вченою радою ННІ енергетики, автоматики і енергозбереження НУБіП України.

Укладачі: Р.Ф. Овчар, С.В. Шостак

Рецензенти: канд. фіз.-мат. наук, доцент О.М. Нещадим
канд. фіз.-мат. наук, доцент Я.О. Гуменюк

Навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Лінійна та векторна алгебра

Методичні вказівки та індивідуальні завдання

для студентів інженерних спеціальностей

Укладачі: ОВЧАР Раїса Федорівна
ШОСТАК Сергій Володимирович

Підписано до друку __.__.2016 р. Зам. №__
Формат 60х90 1/16. Папір офсетний. Друк – різографія.
Наклад 50 пр. Ум. друк. арк. 7,87.
Друк «ЦП «КОМПРИНТ», Свідоцтво ДК №4131, від 04.08.2011р.
м. Київ, вул. Предславинська, 28
528-05-42

© Р.Ф. Овчар, С.В. Шостак, 2016

Зміст

РОЗДІЛ І. КООРДИНАТИ НА ПРЯМІЙ, НА ПЛОЩИНІ, В ПРОСТОРІ

§1. Координатна вісь, або одновимірний простір

Візьмемо пряму лінію і задамо на ній додатний напрям (звичайно його показують стрілкою). Тоді протилежний напрям буде від'ємним (рис.1). Напрямлена пряма називається **віссю**. Якщо на осі вибрати довільну точку обліку O і масштаб, то така вісь називається **координатною** або **одновимірною системою координат**. Точка O називається **початком координат**.

Якщо координатна вісь розміщена горизонтально, то її називають **віссю абсцис** і позначають буквами x або Ox. Візьмемо на осі x точку M і визначимо її положення (рис.1). Для цього виміряємо масштабною одиницею $m = |OE|$ довжину відрізка OM. Дістанемо абстрактне число, яке буде **раціональним**, якщо масштабна одиниця і даний відрізок сумірні, та **ірраціональним**, якщо вони не сумірні.

Означення. Координатою точки M називається додатне число, яке дорівнює довжині відрізка OM, якщо точка M розміщена в додатному напрямі від початку координат, і від'ємне число, модуль якого дорівнює довжині відрізка OM, якщо точка M розміщена у від'ємному напрямі від початку координат.

Координатою початку координат вважають число нуль.

Якщо x є координатою точки М, то пишуть М (x).

Теорема. Кожній точці координатної осі відповідає єдине дійсне число, і навпаки, кожному дійсному числу відповідає тільки одна визначена точка на координатній осі.

При цьому говорять, що встановлено **взаємно однозначну відповідність** між точками координатної осі і дійсними числами. Координатну вісь називають ще **числовою** або **дійсною віссю**.

§2 Кут між осями

Нехай дано дві осі, які перетинаються, і вказано порядок розміщення їх у просторі; такі осі називаються **впорядкованими**.

Означення. Кутом між двома впорядкованими осями x_1 і x_2 називається кут, на який треба повернути вісь x_1 до x_2 навколо осі, перпендикулярної до площини, в якій лежать ці осі, щоб напрями осей x_1 і x_2 збігалися (рис.2).

Якщо поворот здійснюється протилежно до напряму обертання годинникової стрілки, то кут вважається **додатним**, а якщо за годинниковою стрілкою, то **від'ємним**. Легко помітити, що кут між осями

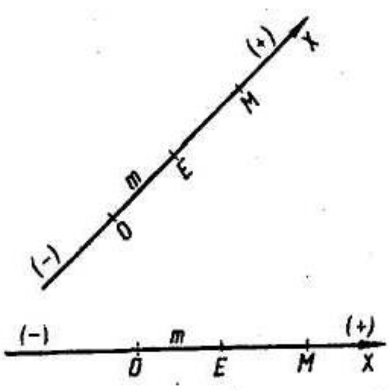


Рис. 1

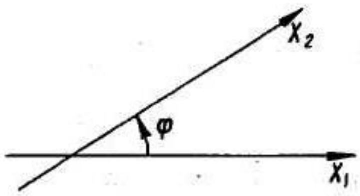


Рис. 2

визначається неоднозначно. Якщо найменший по модулю кут між осями позначити через φ, то кут $\varphi + 2\pi k$, де $k \in Z$, також буде кутом між цими осями. Якщо треба знайти кут однозначно, то накладають обмеження, розглядаючи, наприклад, $0 \le \varphi < 2\pi$, або $-\pi < \varphi < \pi$. Надалі вважатимемо, що $0 \le \varphi < 2\pi$.

§3 Косокутна і прямокутна системи координат на площині. Двовимірний простір

Нехай дано дві впорядковані координатні осі X_1 і X_2, які перетинаються під кутом φ. Точка перетину осей приймається за початок відліку осей координат.

Впорядковані координатні осі, які розміщені в одній площині і перетинаються під кутом φ у точці, що приймається за початок відліку, складають косокутну систему координат на площині (рис.3). Ця площина називається **координатною**. Візьмемо в координатній площині точку P і проведемо через неї прямі, паралельні осям X_1

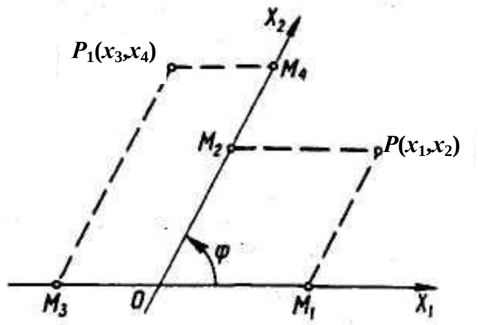


Рис. 3

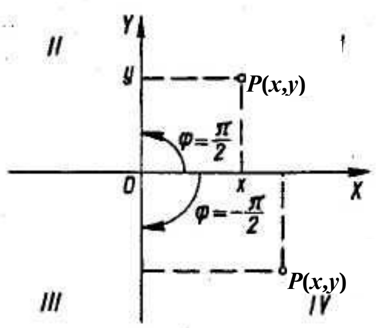


Рис. 4

і X_2. Точки перетину цих прямих з осями координат позначимо через M_1 і M_2, а їхні координати — відповідно через x_1 і x_2.

Таким чином, точці P відповідає пара чисел (x_1, x_2). Ці числа записують у порядку розміщення координатних осей і називають косокутними координатами точки P. Легко помітити, що кожній точці P, яка розміщена в координатній площині, відповідає упорядкована пара чисел. При цьому записують: $P(x_1, x_2)$. Навпаки, кожній заданій упорядкованій парі чисел $(x_3;x_4)$ у координатній площині відповідає точка P_1. Щоб знайти її, треба через точки $M_3(x_3)$ і M_4 (x_4) провести прямі, паралельні координатним осям. Точка перетину їх є шуканою точкою P_1 (рис.3).

Теорема. Між точками координатної площини і впорядкованими парами дійсних чисел існує взаємно однозначна відповідність.

Означення. Множина впорядкованих пар чисел (x_1, x_2) в обраній системі координат називається **двовимірним простором** і позначається $\boldsymbol{R}_2$.

Якщо в косокутній системі координат на площині кут $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$, то така система координат називається **прямокутною декартовою системою координат на площині**. Якщо $\varphi = +\frac{\pi}{2}$, то система називається **правою** (рис.4), якщо $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, то система називається **лівою**. Горизонтальна вісь координат називається **віссю абсцис** і позначається X або OX, а вертикальна вісь — **віссю ординат** і позначається Y або OY.

Зазначимо, що координатні осі розбивають координатну площину на чотири частини, або квадранти, які нумерують римськими цифрами I, II, III, IV.

§4. Полярна система координат

Означення. Спосіб визначення положення точок чи інших об'єктів на площині і в просторі за допомогою чисел називають **методом координат.**

Розглянемо так звану полярну систему координат, яку часто використовують під час пояснення багатьох фізичних явищ. Виберемо в площині довільну точку O, назвемо її **полюсом** і проведемо промінь OP, який називається **полярною віссю**, задамо масштабну одиницю довжини $m = |OE|$. Положення будь-якої точки M у площині визначимо так. Сполучимо відрізком прямої полюс з точкою M. Довжину відрізка OM позначимо через ρ. Цей відрізок називається **полярним радіусом** точки M; задамо на ньому напрям від O до M. Дістанемо вісь OM. Таким чином, маємо дві осі: перша — полярна вісь, а друга — вісь OM. Величину кута ρOM (з урахуванням напряму повороту) позначимо через φ (у градусах, радіанах або абстрактних одиницях) і назвемо його **полярним кутом** точки M (рис.5).

Означення. Полярними координатами точки M називається упорядкована пара чисел (ρ, φ), де ρ — довжина полярного радіуса; φ — величина полярного кута точки M.

Для полюса $\rho = 0$, а φ має довільне значення. Той факт, що числа ρ і φ — координати точки M, записують так: M (ρ,φ).

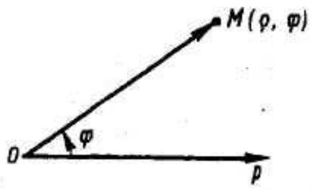


Рис. 5

Полярні координати ρ і φ однозначно визначають положення точки на площині. Обернене твердження неправильне, оскільки кожній точці координатної площини відповідає одне й те саме ρ і нескінченна множина полярних кутів, які можуть відрізнятись один від одного на $2\pi k$, де $k \in Z$.

Для того щоб дістати взаємно однозначну відповідність, на полярний кут φ накладають обмеження:

$$0 \le \varphi < 2\pi \text{, або } -\pi < \varphi \le \pi. \tag{1}$$

Ці значення називаються **головними значеннями полярного кута**.

Знайдемо залежність між полярними і прямокутними декартовими координатами точки M. Сумістимо прямокутну систему координат XOY з полярною так, щоб початок координат збігався з полюсом, а полярна вісь — з додатною піввіссю абсцис (рис.6).

Нехай точка M у декартовій системі визначається координатами (x, y), а у полярній — координатами (ρ,φ). Використовуючи означення тригонометричних функцій, знаходимо

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi. \tag{2}$$

Ці формули виражають декартові координати точки площини через полярні. Розв'язуючи систему (2) відносно ρ і φ за умови, що $\rho \ge 0$

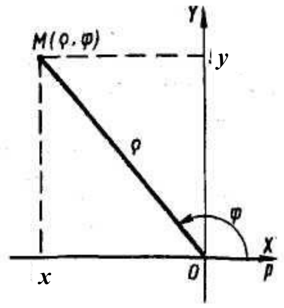


Рис. 6

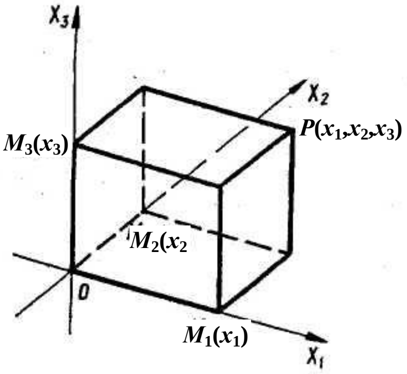


Рис. 7

і $0 \le \varphi < 2\pi$, маємо

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{3}$$

$$\varphi = \begin{cases} \arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & при\ \ y \ge 0; \\ 2\pi - \arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & при\ \ y < 0. \end{cases} \tag{4}$$

Формули (3) і (4) показують взаємно однозначну відповідність між прямокутними і полярними координатами точок площини.

§5. Косокутна система координат у просторі. Тривимірний простір

Візьмемо три впорядковані координатні осі X_1, X_2, X_3, які не лежать в одній площині і перетинаються в одній точці O. Вважатимемо цю точку за початок відліку. Упорядковані координатні осі, які не лежать в одній площині та мають одну спільну точку, називаються **косокутною системою координат у просторі**. Площини OX_1X_2, OX_1X_3, OX_2X_3 називають **координатними**. Нехай P — довільна точка простору. Проведемо через неї площини, паралельні координатним площинам (рис.7).

Точки перетину площин з відповідними осями позначимо через $M_1(x_1)$, $M_2(x_2)$, $M_3(x_3)$. **Координатами точки** P в даній системі координат називають упорядковану трійку чисел (x_1, x_2, x_3) і записують P (x_1, x_2, x_3).

Очевидно, *що кожній точці простору відповідає у вибраній системі координат упорядкована трійка чисел. Справедливе і обернене твердження: кожній упорядкованій трійці чисел у вибраній системі координат відповідає точка простору.* Таким чином, установлено взаємно однозначну відповідність між точками простору і упорядкованими трійками дійсних чисел.

Означення Множина упорядкованих трійок чисел в обраній системі координат називається **тривимірним простором** і позначається $\boldsymbol{R}_3$.

Означення Якщо координатні осі X_1, X_2, X_3 взаємно перпендикулярні, то косокутну систему координат називають **прямокутного декартовою системою координат у просторі** і позначають $X_1X_2X_3$ або XYZ.

§6. Прямокутна декартова система координат у просторі

Нехай дано прямокутну декартову систему координат XYZ (рис.8).

Площини XOY, YOZ і XOZ називаються **координатними площинами**. Координатна вісь OX називається **віссю абсцис**, OY — віссю ординат, OZ — **віссю аплікат**. Відповідно називаються і координати точок: x — **абсциса**, y — **ордината**, z — **апліката**. Координатні

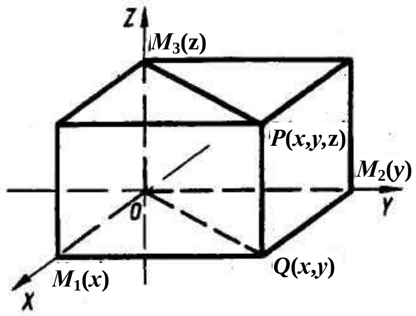


Рис. 8

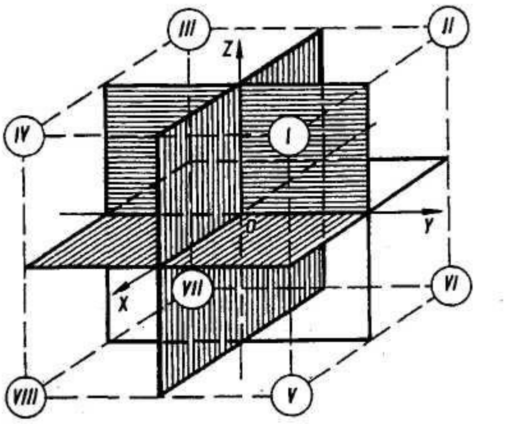


Рис. 9

площини розбивають простір на вісім октант (рис.9). Координати точок, розміщених в октантах, задовольняють такі умови:

$$I\begin{cases}x\ge 0,\\ y\ge 0,\\ z\ge 0;\end{cases}\quad II\begin{cases}x\le 0,\\ y\ge 0,\\ z\ge 0;\end{cases}\quad III\begin{cases}x\le 0,\\ y\le 0,\\ z\ge 0;\end{cases}\quad IV\begin{cases}x\ge 0,\\ y\le 0,\\ z\ge 0;\end{cases}$$

$$V\begin{cases}x\ge 0,\\ y\ge 0,\\ z\le 0;\end{cases}\quad VI\begin{cases}x\le 0,\\ y\ge 0,\\ z\le 0;\end{cases}\quad VII\begin{cases}x\le 0,\\ y\le 0,\\ z\le 0;\end{cases}\quad VIII\begin{cases}x\ge 0,\\ y\le 0,\\ z\le 0.\end{cases}$$

Упорядкована трійка координатних осей, які не лежать в одній площині, називається **правою**, якщо з кінця додатного напряму третьої осі найкоротший поворот від першої осі до другої видно проти руху годинникової стрілки. У противному разі система координат називається **лівою** (рис.10).

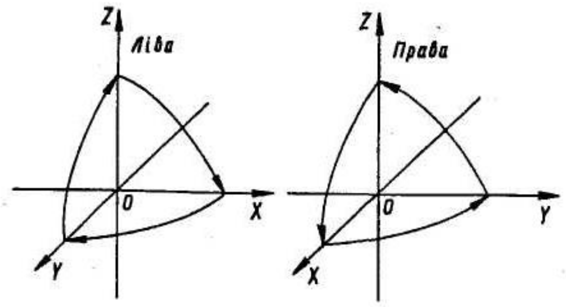


Рис. 10

§7. Циліндрична система координат

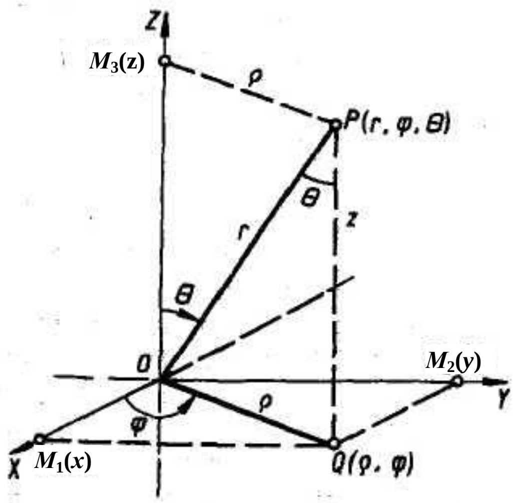


Рис. 11

Якщо в прямокутній системі координат *XYZ* замість перших двох координат *x* і *y* взяти полярні координати, а третю залишити без змін, то дістанемо **циліндричну систему координат. Координати точки *P*** простору в цій системі записуються у вигляді *P* (ρ,φ,z).

Далі при побудові систем координат масштаб не зображатимемо. Звичайно на всіх осях координат задають один і той самий масштаб.

Знайдемо залежності між прямокутними декартовими координатами точки *P* (x, y, z) і її циліндричними координатами *P* (ρ,φ,z). (рис.11). Враховуючи формули (2), маємо

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi; \\ y = \rho\sin\varphi; \\ z = z, \end{cases}$$

де $0 \le \rho < +\infty; 0 \le \varphi < 2\pi; -\infty \le z < +\infty.$

§8. Сферична система координат

У тривимірному просторі *XYZ* візьмемо точку *P* і через цю точку та вісь аплікат проведемо площину. Нехай відстань точки *P* від початку координат (полюса) дорівнює *r*, двогранний кут між координатною площиною *XOZ* і площиною *ZOP* дорівнює φ, а кут між віссю *OZ* і променем OP дорівнює θ. Упорядкована трійка чисел (r, φ, θ) однозначно визначає положення точки P у просторі XYZ. Ці числа називають **сферичними координатами точки** P і записують $P(r, \varphi, \theta)$.

Знайдемо залежність між прямокутними декартовими координатами і сферичними координатами точки. З прямокутного трикутника OQP (рис.11) знаходимо

$$z = r\cos\theta, \rho = r\sin\theta.$$

З прямокутного трикутника OQM_1 дістанемо

$$x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi.$$

Тоді

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\theta, \end{cases} \qquad (6)$$

де $0 \le r < +\infty; 0 \le \varphi < 2\pi; 0 \le \theta < \pi.$

Формули (6) визначають взаємно однозначну відповідність між прямокутними декартовими і сферичними координатами точок простору XYZ.

§ 9. *n*-Вимірний простір

Розглянуті в і §5, §6 координати називаються **прямолінійними,** оскільки координати точки P (рис.7) отримуються в результаті перетину координатних осей X_1, X_2, X_3 з площинами. Якщо замість площин через точку P проводити за якимось законом поверхні, то отримані координати називаються **криволінійними**. Прикладом останніх є циліндричні, сферичні координати.

Як було показано, між множиною дійсних чисел і множиною точок одновимірного простору існує взаємно однозначна відповідність. Те саме стосується двовимірного і тривимірного простору. *Точками двовимірного простору є упорядковані пари дійсних чисел, а точками тривимірного простору — упорядковані трійки чисел.* Природно ввести поняття n-вимірного простору.

Означення *n*-Вимірним (скінченновимірним) простором або **простором *n* вимірів** називають множину упорядкованих сукупностей дійсних чисел (x_1, x_2, ..., x_n) в обраній системі координат і позначають $\mathbf{R}_n$, ($\mathbf{R}^n$).

Множина $\mathbf{R}_n$ називається ще **афінним простором** n вимірів. У цьому просторі зберігаються операції додавання, множення на число з переставним, розподільним і сполучним законами.

Елемент (x_1, x_2, ..., x_n) множини $\mathbf{R}_n$**,** де x_1, x_2, ..., x_n — задані дійсні числа, називають точкою n-вимірного простору, а числа —

координатами цієї точки і записують P (x_1, x_2, ..., x_n). Якщо точка P належить простору $\mathbf{R}_n$, то пишуть $P \in \mathbf{R}_n$, або (x_1, x_2, ..., x_n) $\in \mathbf{R}_n$.

Зазначимо, що окремими випадками n-вимірного простору є одновимірний простір $\mathbf{R}_1$ ($\mathbf{R}^1$), двовимірний простір $\mathbf{R}_2$ ($\mathbf{R}^2$) і тривимірний простір $\mathbf{R}_3$ ($\mathbf{R}^3$), які можна зобразити геометрично. Далі простори $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$, $\mathbf{R}_3$, називатимемо **наочними просторами**. Для n-вимірного простору, де $n \geq 4$, ця наочність зникає. Так, зрозуміло як ввести поняття кута між двома осями в тривимірному просторі, а як це зробити для n-вимірного простору, поки що невідомо (взагалі це можна зробити за допомогою поняття вектора).

РОЗДІЛ II. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

§1. Векторні і скалярні величини

Відомо такі два типи величин:

1) величини, для визначення яких досить задати число. Ці величини називаються **скалярними** (наприклад, довжина, густина, температура);

2) величини, для визначення яких недостатньо знати тільки число. Ці величини називаються **векторними** або просто **векторами**. Далі під вектором будемо розуміти напрямлений відрізок. Векторними величинами є, наприклад, сила, швидкість, прискорення.

Розрізняють вектори **зв'язані, ковзні і вільні**.

Означення. Зв'язаний вектор — це величина, яка задається числом, точкою прикладання, лінією дії та напрямом (наприклад, сила).

Означення. Якщо величина визначається числом, лінією дії та напрямом, то така величина називається **ковзним вектором** (наприклад, кутова швидкість).

Означення. Вільним вектором називається величина, яка визначається числом і напрямом, а лінія дії і точка прикладання можуть бути довільними.

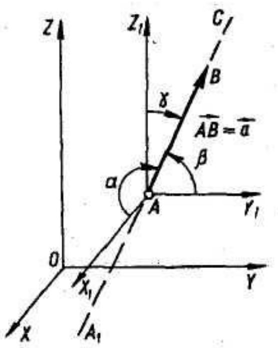


Рис. 12

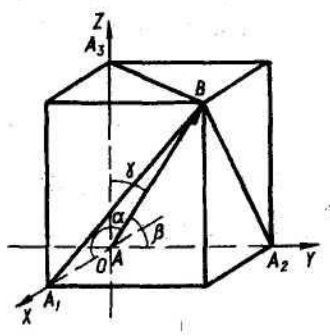


Рис. 13

Далі розглядатимемо лише вільні вектори і називатимемо їх просто векторами.

Число визначає довжину вектора, а напрям визначає ту пряму, на якій розміщено вектор (пряма A_1C, рис.12). Для напряму вектора достатньо задати кути, які складає пряма A_1C з осями координат, вони позначаються через α, β, γ. Косинуси цих кутів називаються **напрямними косинусами**. Для побудови кутів α, β, γ, досить із довільної точки A на прямій A_1C побудувати осі AX_1, AY_1, AZ_1, паралельні OX, OY, OZ.

Для побудови вектора на указаній прямій A_1C обирається точка A, яка приймається за початок вектора. Число, яке виражає довжину вектора, дає змогу знайти його кінець. Для цього із точки A у заданому напрямі A_1C відкладаємо відрізок AB, довжина якого дорівнює довжині вектора. Кінець цього відрізка і є кінцем вектора.

Побудований вектор позначається так: $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$. Положення точки B визначено однозначно, тому що кути α, β, γ, мають бути побудовані так, щоб при повороті осей OX, OY, OZ до прямої A_1C напрями вектора і осей збігалися. При цьому не враховується напрям повороту осі до вектора чи вектора до осі. Дійсно, хоч кути і будуть різними, але

$$\cos\left(\vec{a},\hat{\ }X\right)=\cos\left(X\hat{\ },\vec{a}\right)=\cos\alpha,$$

$$\cos\left(\vec{a},\hat{\ }Y\right)=\cos\left(Y\hat{\ },\vec{a}\right)=\cos\beta,$$

$$\cos\left(\vec{a},\hat{\ }Z\right)=\cos\left(Z\hat{\ },\vec{a}\right)=\cos\gamma.$$

Таким чином, побудовано вектор $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$. Початок вектора можна сумістити з початком координат. Тоді $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$ (рис.13). Якщо прийняти OB за діагональ паралелепіпеда і побудувати його, то за теоремою про квадрат діагоналі паралелепіпеда знайдемо

$$|OB|^2=|OA_1|^2+|OA_2|^2+|OA_3|^2.$$

Із прямокутних трикутників OA_1B, OA_2B, OA_3B знаходимо відповідно

$$|OA_1|=|OB|\cos\alpha;\ |OA_2|=|OB|\cos\beta;\ |OA_3|=|OB|\cos\gamma.$$

Підставимо знайдені дані у рівність для OB і поділимо її на $|OB|^2$, тоді

$$1=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma.$$

Таким чином, із трьох кутів α, β, γ лише два кути є незалежними.

Вектор, початок якого збігається з початком координат, позначають $\vec{OB}$ або $\vec{r}$.

Означення. Довжиною або **модулем вектора** $\overrightarrow{AB}$ називають довжину відрізка AB і позначають $|\vec{a}|, a, AB, |\overrightarrow{AB}|$.

Означення. Два вектори називають **рівними між собою**, якщо рівні між собою їхні довжини (модулі), вони паралельні, тобто лежать на одній прямій або на паралельних прямих, і однаково напрямлені.

Означення. Вектор, довжина якого дорівнює нулю, називають **нульовим** або **нуль-вектором** і позначають $\vec{0}$.

§2. Визначення вектора за координатами

Розглянутий спосіб описання вектора ґрунтується на наочності і узагальненню на випадок n-вимірного простору не піддається. Тому розглянемо інший спосіб описання вектора.

Візьмемо тривимірний простір XYZ. Нехай у ньому задано вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. Через початок і кінець цього вектора проведемо площини, паралельні координатним площинам. Координати точок перетину цих площин з координатними осями позначимо відповідно x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, (рис.14).

Початок і кінець вектора $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ містяться в точках A (x_1, y_1, z_1) і $B(x_2, y_2, z_2)$. Різниці $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$ називають **координатами** або **проекціями на координатні** осі вектора $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$.

Вектор $\overrightarrow{AB}$ однозначно визначається упорядкованою трійкою чисел $a_x = x_2 - x_1, a_y = y_2 - y_1, a_z = z_2 - z_1$ або координатами.

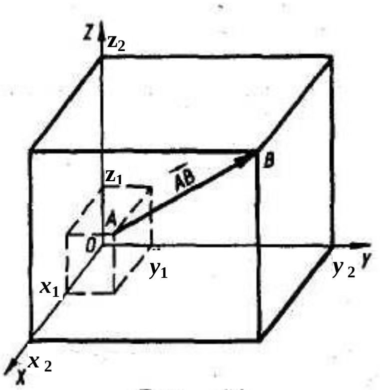


Рис. 14

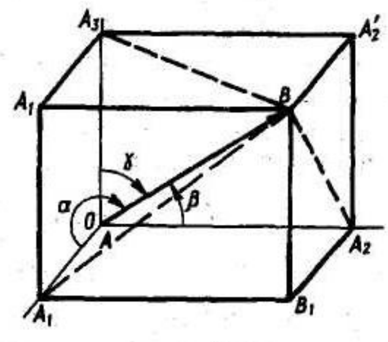


Рис. 15

Записують це так:

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z).$$

Справді, побудуємо на $\overrightarrow{AB}$, як на діагоналі, прямокутний паралелепіпед $AA_1B_1A_2A'_2BA'_1A_3$ (рис.15) із сторонами $AA_1 = x_2 - x_1$;

$AA_2 = y_2 - y_1$; $AA_3 = z_2 - z_1$. Із прямокутних трикутників AA_1B, AA_2B, AA_3B знаходимо

$$a_x = x_2 - x_1 = |\vec{a}|\cos\alpha,$$
$$a_y = y_2 - y_1 = |\vec{a}|\cos\beta,$$
$$a_z = z_2 - z_1 = |\vec{a}|\cos\gamma.$$

де $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Оскільки при паралельному переносі вектора його довжина і кути не змінюються, то два рівних між собою вектори завжди мають одні і ті самі координати.

Два вектори рівні між собою тоді і тільки тоді, коли рівні між собою їхні відповідні координати.

Означення. Якщо початок вектора збігається з початком координат, то вектор $\overrightarrow{OB}$ називається **радіусом-вектором точки** B і його координати збігаються з координатами його кінця — точки B.

Розглянемо n-вимірний простір.

Означення. Будь-яка упорядкована пара точок A і B n-вимірного простору називається **n-вимірним вектором.** Одна з цих точок називається **початком**, друга — **кінцем вектора**.

Означення. Упорядкованій парі точок A і B з координатами $A(x_1,x_2,..., x_n)$ і $B(y_1, y_2, ..., y_n)$ відповідає упорядкована сукупність різниць $a_1 = y_1 - x_1$; $a_2 = y_2 - x_2$; $a_3 = y_3 - x_3$; ...; $a_n = y_n - x_n$, які називають **координатами вектора** $\vec{a}$ і пишуть $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$

Таким чином, координати n-вимірного вектора — це упорядкований набір дійсних чисел. Тому n-вимірний вектор можна визначити як довільний упорядкований набір $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ дійсних чисел у вибраній системі координат.

Означення. Вектор, всі координати якого дорівнюють нулю, називається **нуль-вектором**.

Два n-вимірні вектори $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ вважаються рівними між собою, якщо рівні між собою їхні відповідні координати, тобто

$$\vec{a} = \vec{b}, \text{якщо}\, a_1 = b_1; a_2 = b_2; \ldots; a_n = b_n;$$
$$\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) = \vec{0}, \text{якщо}\, a_1 = 0; a_2 = 0; \ldots; a_n = 0.$$

Означення. Афінний простір називається **векторним простором**, якщо в ньому введено поняття вектора так, що:

1) будь-якій парі точок A і B відповідає єдиний вектор $\overrightarrow{AB}$;

2) для будь-якої точки A афінного простору і будь-якого вектора $\vec{a}$

існує єдина точка *B* така, що $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$;

3) для будь-яких трьох точок *A, B* і *C* справджується рівність $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

Координати *n*-вимірного вектора можна розміщувати у рядок або у стовпчик. У першому випадку говорять про **вектор-рядок** $\vec{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$, а у другому — про **вектор-стовпець**. Вектор-рядок або вектор-стовпець називають ще **матрицею-рядком** або **матрицею-стовпцем** і позначають так:

$$\vec{a}=\|a_1,a_2,...,a_n\|, \text{ або } \vec{a}=\begin{Vmatrix}a_1\\a_2\\\dots\\a_n\end{Vmatrix};$$

$$\vec{a}=\|a_1,a_2,...,a_n\|, \text{ або } \vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\dots\\a_n\end{pmatrix}.$$

§3. Операції над векторами у просторі

Додавання векторів.

Означення. **Сумою двох векторів** $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається третій вектор $\vec{c}$, напрямлений із початку першого вектора в кінець другого, якщо початок другого вектора збігається з кінцем першого (рис.16). Це правило додавання векторів називається **правилом трикутника**.

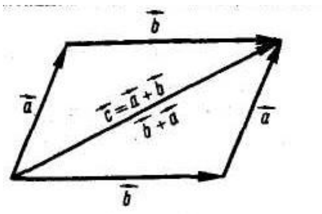


Рис. 16

Використовується також **правило паралелограма** додавання векторів.

Означення. **Сумою векторів** $\vec{a}+\vec{b}$ називається третій вектор $\vec{c}$, який виходить із спільного початку даних векторів і збігається з діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ як на сторонах.

Означення. **Сумою будь-якого скінченного числа векторів** $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ називається вектор $\vec{a}$, який утворюється внаслідок послідовного застосування правила трикутника (рис.17).

Віднімання векторів.

Означення. Два рівних між собою за довжиною, протилежних за напрямом і паралельних вектори $\vec{a}$ і $-\vec{a}$ називаються **протилежними**

векторами (сума їх дорівнює нуль-вектору).

Віднімання векторів визначається як дія, обернена до додавання

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}, \text{ якщо } \vec{b}+\vec{c}=\vec{a},$$

або

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right).$$

Таким чином, *щоб від вектора $\vec{a}$ відняти вектор $\vec{b}$, треба до вектора $\vec{a}$ додати вектор, протилежний до вектора $\vec{b}$* (рис.18).

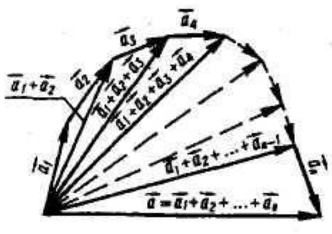


Рис. 17

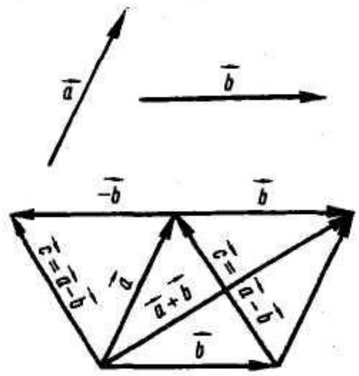


Рис. 18

Множення вектора на число.

Нехай дано вектор $\vec{a}$ і деяке дійсне число λ. Тоді $\lambda\vec{a}$ є вектор, довжина якого дорівнює $|\lambda||\vec{a}|$. Якщо λ > 0 і $\vec{a}\neq 0$, то вектори $\lambda\vec{a}$ і $\vec{a}$ напрямлені однаково (співнапрямлені); якщо λ < 0 і $\vec{a}\neq 0$, то вони напрямлені протилежно. Якщо λ= 0 або $\vec{a}=\vec{0}$, то $\lambda\vec{a}=\vec{0}$.

Означення. Якщо два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ пов'язані співвідношенням $\vec{b}=\lambda\vec{a}$, то вони називаються **колінеарними**.

Операції додавання векторів і множення вектора на число мають такі **властивості**

1°. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ *для будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.*

2°. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ *для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$.*

3°. *Для будь-якого вектора $\vec{a}$*

$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}.$$

4°. *Для будь-якого вектора $\vec{a}$ існує такий вектор $\vec{a}$, що*

$$\vec{a}+\vec{a}'=\vec{0}.$$

Вектор $\vec{a}'$ протилежний до вектора $\vec{a}$.

5°. $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$ *для будь-якого вектора $\vec{a}$.*

6°. $(\alpha\beta)\vec{a}=\alpha\left(\beta\vec{a}\right)$ *для будь-якого вектора $\vec{a}$ і будь-яких дійсних чисел α і β.*

7°. $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=(\alpha\vec{a})+(\alpha\vec{b})$ *для будь-яких векторів* $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ *та будь-якого дійсного числа* α *(рис.19).*

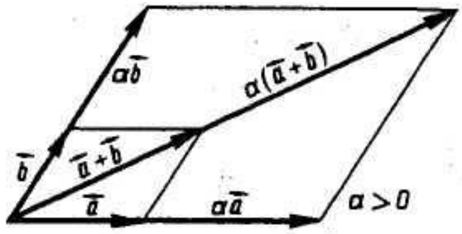


Рис. 19

8°. $(\alpha+\beta)\vec{a}=(\alpha\vec{a})+(\beta\vec{a})$ *для будь-якого вектора* $\vec{a}$ *і будь-яких дійсних чисел* α *і* β.

§4. Операції над векторами, заданими своїми координатами

Означення. Сумою двох векторів $\vec{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$ *і* $\vec{b}=(b_1,b_2,...,b_n)$, які належать одному простору і задані своїми координатами називається третій вектор $\vec{c}=(c_1,c_2,...,c_n)$, координати якого дорівнюють сумі відповідних координат даних векторів:

$$c_1=a_1+b_1;\ c_2=a_2+b_2;\ c_3=a_3+b_3;\ ...;\ c_n=a_n+b_n.$$

Векторну рівність $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ можна записати ще так:

$$(a_1,a_2,...,a_n)+(b_1,b_2,...,b_n)=(a_1+b_1,a_2+b_2,...,a_n+b_n)$$

(матриці-рядки можна додавати).

Означення. Різницею двох векторів $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$, які належать одному і тому самому простору, назвемо третій вектор $\vec{c}$, координати якого дорівнюють різниці координат векторів $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$:

$$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2,...,a_n-b_n).$$

Операція додавання векторів одного і того самого простору, що задані своїми координатами, має властивості 1°-4°.

1°. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ *(переставний закон).*

2°. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ *(сполучний закон).*

3°. *Для будь-якого вектора* $\vec{a}$

$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}.$$

4°. *Для будь-якого вектора* $\vec{a}$ *існує такий вектор* $\vec{a}'$, *що*

$$\vec{a}+\vec{a}'=\vec{0}.$$

Означення. *Вектор* $\vec{a}'$ *називається вектором,* **протилежним** *до* $\vec{a}$, і позначається $-\vec{a}$. Вектор $-\vec{a}$ має координати $(-a_1,-a_2,...,-a_n)$.

Перейдемо до множення n-вимірного вектора, заданого своїми координатами, на число.

Означення. **Добутком n-вимірного вектора** $\vec{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$ **на дійсне число** λ називається вектор, координати якого дорівнюють добуткам на це число координат вектора $\vec{a}$:

$$\lambda\vec{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,...,\lambda a_n).$$

Означення. Два n-вимірних вектори $\vec{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$ і $\vec{b}=(b_1,b_2,...,b_n)$ називаються **колінеарними**, якщо справедливе співвідношення $\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

Як і в тривимірному просторі, операція множення вектора на число в n-вимірному просторі має властивості 5°-8°.

§5. Лінійний простір

Означення. Векторний простір називається **лінійним**, якщо у ньому визначено операції над векторами — додавання і множення на число із властивостями 1°—8° (§3) цих операцій. Проте лінійний простір може бути утворений об'єктами будь-якої природи.

Нехай E — дана множина і $x, y, z,$ ... — її елементи; K — множина усіх дійсних (або усіх комплексних) чисел α, β, γ, ... Нехай кожній парі x, y елементів множини E поставлено у відповідність деякий елемент тієї самої множини, який позначається $x + y$ і називається їхньою **сумою**. Нехай кожному елементу x множини E і кожному числу α із K поставлено у відповідність деякий елемент множини E, який позначається αx і називається **добутком** числа α на елемент x.

Означення. Якщо операція додавання елементів множини E і операція множення їх на число задовольняють розглянуті в §3 властивості 1°—8°, то множина E називається **дійсним** (відповідно **комплексним**) **лінійним векторним простором**, а його елементи, незалежно від їхньої природи, називаються **векторами**.

Так, множина многочленів не вище даного степеня із звичайними операціями додавання і множення на числа є лінійним векторним простором. У цьому розумінні кожний такий многочлен можна назвати вектором.

Множина функцій, неперервних на даному інтервалі, також називається векторним простором, і у цьому розумінні кожна така функція може бути названа вектором.

§ 6. Система векторів і спосіб її задання. Лінійна комбінація векторів

Нехай задано систему векторів $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_k$ в n-вимірному просторі:

$$\vec{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), \text{ або } \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \dots \\ a_{1n} \end{pmatrix},$$

$$\vec{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \text{ або } \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{2n} \end{pmatrix},$$

……………………………………..

$$\vec{a}_k = (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn}), \text{ або } \vec{a}_k = \begin{pmatrix} a_{k1} \\ a_{k2} \\ \dots \\ a_{kn} \end{pmatrix}.$$

Складемо із координат векторів прямокутну таблицю, яка називається **прямокутною матрицею** і позначається буквою *A*:

$$A(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k) = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}\, a_{k2} \quad a_{kn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

або

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \dots a_{k1} \\ a_{21}\, a_{22} \dots a_{k2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}\, a_{2n} \quad a_{kn} \end{pmatrix}.$$

Таким чином, задання системи векторів у n-вимірному просторі означає задання матриці, яку складено з координат векторів даної системи. Для одновимірного простору, $n=1$, матриця (1) перетворюється або на матрицю-рядок, або на матрицю-стовпець:

$$A = (a_{11} a_{21} \dots a_{k1}), \text{ або } \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots. \\ a_{k1} \end{pmatrix}.$$

Для двовимірного простору (n = 2) матриця (1) набирає вигляду

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \dots a_{k1} \\ a_{12}\, a_{22} \dots a_{k2} \end{pmatrix},\ або \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \\ a_{21}\, a_{22} \\ \dots\dots\dots \\ a_{k1}\, a_{k2} \end{pmatrix}.$$

Для тривимірного простору (n = 3) маємо

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \dots a_{k1} \\ a_{12}\, a_{22} \dots a_{k2} \\ a_{13}\, a_{23} \dots a_{k3} \end{pmatrix},\ або \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \\ a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}\, a_{k2}\, a_{k3} \end{pmatrix}.$$

Нехай дано k векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$. Помножимо кожний вектор на число λ_j, де $j = 1, 2, \dots, k$, і знайдені результати додамо. У результаті цього дістанемо вектор, який називається лінійною **комбінацією даних векторів**:

$$\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k\,. \tag{2}$$

Числа λ_i називаються **коефіцієнтами даної лінійної комбінації**.

Якщо вектор $\vec{a}_j$ має координати $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})$, а вектор $\vec{b}$ має координати $(b_1, b_2, \dots, b_n)$, то рівність (2) запишеться у вигляді

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_k \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \dots \\ a_{nk} \end{pmatrix},$$

або

$$\begin{cases} b_1 = \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \dots + \lambda_k a_{1k}, \\ b_2 = \lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} + \dots + \lambda_k a_{2k}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_n = \lambda_1 a_{n1} + \lambda_2 a_{n2} + \dots + \lambda_k a_{nk}. \end{cases} \tag{3}$$

Рівності (2) і (3) рівносильні. У першому випадку залежність записано у векторній формі, а у другому — в скалярній.

Розглянемо питання про те, чи може дорівнювати нулю лінійна комбінація векторів:

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_k \vec{a}_{nk} = \vec{0}. \tag{4}$$

Означення. Якщо рівність (4) можлива за умови, що принаймні одне з чисел λ_j, де $j = 1, 2, \dots, k$, не дорівнює нулю, то система даних векторів називається **лінійно залежною**, а рівність (4) називається

нетривіальною.

Означення. Якщо рівність (4) можлива лише за умови, що всі $\lambda_j = 0$ одночасно дорівнюють нулю, то система даних векторів називається **лінійно незалежною**, а рівність (4) — **тривіальною**.

§7. Матриці та їх види

Введемо поняття матриці незалежно від системи векторів. Запишемо прямокутну таблицю чисел із k рядків і n стовпців:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{12}\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}\, a_{k2} \ldots a_{kn} \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}\, a_{k2} \quad a_{kn} \end{Vmatrix}.$$

Означення. Прямокутна таблиця, складена із довільного набору величин, називається **прямокутною матрицею**.

При цьому величини називаються **елементами матриці**, а сукупність елементів, розкладених на горизонтальній (вертикальній) прямій, складають **рядок (стовпець) матриці**. Місце елемента визначається номером рядка і номером стовпця, на перетині яких він розміщений. У прийнятому позначенні перший індекс елемента вказує на номер рядка, а другий — на номер стовпця. Будь-який елемент матриці звичайно позначається через a_{ij}, де i — номер рядка, j — номер стовпця, на перетині яких розміщено цей елемент.

Наприклад, для матриці

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 5 & -7 & 0 \\ 1 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

Маємо $a_{13} = 4, a_{22} = -7, a_{32} = -3$.

Означення. Символічний добуток числа рядків k на число стовпців n матриці називають **розміром матриці** і позначають $k \times n$.

Означення. Матриця, в якій число рядків дорівнює числу стовпців, називається **квадратною матрицею**:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11}\, b_{12} \ldots b_{1n} \\ b_{12}\, b_{22} \ldots b_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{n1}\, b_{n2} \ldots b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Означення. Кількість рядків (стовпців) квадратної матриці називається її **порядком**. Так, матриця B має порядок n.

Наприклад

$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ - матриця другого порядку,

$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & -2 & 9 & 3 \\ 1 & 6 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ - матриця четвертого порядку.

Розмір квадратної матриці дорівнює n^2. У квадратних матрицях звичайно виділяють два види елементів. Це елементи, які містяться на діагоналях квадрата, складеного із елементів матриці. Елементи

$$b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{nn}$$

складають так звану **головну діагональ** матриці B, а сукупність елементів

$$b_{1n}, b_{2(n-1)}, \ldots, b_{n1}$$

— її побічну **діагональ**.

У матриці

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

елементи b_{11}, b_{22}, b_{33} складають головну діагональ, а елементи b_{13}, b_{22}, b_{31} — побічну.

Замінимо у матриці A рядки на стовпці так, щоб перший рядок став першим стовпцем, другий рядок — другим стовпцем, третій рядок — третім стовпцем тощо. У результаті цього дістанемо матрицю

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{21} \ldots a_{k1} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2k} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}\, a_{2n} \ldots a_{kn} \end{pmatrix}.$$

Матриця A^{T} називається **транспонованою матрицею** відносно матриці A. Перехід матриці A до матриці A^{T} називається **операцією транспонування**. У матрицях A і A^{T} елементи a_{ij} і a'_{ij} пов'язані співвідношенням $a'_{ij} = a_{ij}$ для всіх $i = 1,2,\ldots,n$ і $j = 1,2,\ldots,k$. Наприклад, транспонуючи матрицю

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

дістанемо

$$C^T = (c_1\, c_2\, c_3).$$

Транспонуючи матрицю

$$C = \begin{pmatrix} c_{11}\, c_{12}\, c_{13} \\ c_{12}\, c_{22}\, c_{23} \\ c_{31}\, c_{32}\, c_{33} \end{pmatrix},$$

дістанемо

$$C^T = \begin{pmatrix} c_{11}\, c_{12}\, c_{13} \\ c_{12}\, c_{22}\, c_{23} \\ c_{31}\, c_{32}\, c_{33} \end{pmatrix}.$$

Як видно із попереднього, система векторів може бути задана двома матрицями, одна з яких є транспонованою відносно другої.

Означення. Матриця називається **нульовою**, якщо всі її елементи — нулі:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Означення. Якщо в квадратній матриці всі елементи, розміщені поза головною діагоналлю, — нулі, то матриця називається **діагональною**:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Означення. Діагональна матриця, всі елементи головної діагоналі якої дорівнюють одиниці, називається **одиничною**. Одинична матриця позначається так:

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}.$$

Означення. Якщо для квадратної матриці В справджується рівність $b_{ij}=b_{ji}$, то матриця називається **симетричною**.

Наприклад, матриця

$$\begin{pmatrix}2 & 8 & 9 & 4\\ 8 & -9 & 5 & 1\\ 9 & 5 & 0 & 3\\ 14 & 1 & 3 & 6\end{pmatrix}$$

є симетричною. Тут $b_{12}=b_{21}=8$, $b_{13}=b_{31}=9$, $b_{32}=b_{23}=5$, $b_{41}=b_{14}=4$, $b_{42}=b_{24}=1$ тощо.

Симетричні матриці інваріантні відносно транспонування, тобто транспонована і задана матриці збігаються.

Означення. Дві матриці однакових розмірів, з однаковими відповідними елементами називаються **рівними між собою**.

§8. Дії над матрицями

Означення. **Сумою двох матриць** однакових розмірів називається матриця такого самого розміру, елементи якої дорівнюють сумам відповідних елементів матриць, які додаються.

Сумою матриць A і B

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}\, a_{12} \dots a_{1n}\\ a_{21}\, a_{22} \dots a_{2n}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{m1}\, a_{m2} \dots a_{mn}\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}b_{11}\, b_{12} \dots b_{1n}\\ b_{21}\, b_{22} \dots b_{2n}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ b_{m1}\, b_{m2} \dots b_{mn}\end{pmatrix}.$$

є матриця C

$$C=A+B=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}, \tag{5}$$

Легко помітити, що операція додавання матриць, як і операція додавання чисел у арифметиці, підлягає переставному (комутативному) закону:

$$A+B=B+A.$$

Із означення суми матриць випливає, що сума будь-якої матриці і нуль-матриці того самого розміру дорівнює даній матриці:

$$A + 0 = A, \quad 0 + A = A,$$

тобто нуль-матриця в теорії матриць виконує ту саму роль, що і число нуль у теорії чисел.

Означення. **Різницею двох матриць** однакових розмірів називається матриця того самого розміру, елементи якої дорівнюють різницям відповідних елементів матриць зменшуваного і від'ємника:

$$C = A - B = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \dots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \dots & a_{2n} - b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m2} & \dots & a_{mn} - b_{mn} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

Означення. Матриці *A* і *B* називаються **протилежними**, якщо їхня сума $A + B = 0$ є нуль-матриця. Матриця, протилежна до матриці *A*, позначається -*A*, і її відповідні елементи протилежні до елементів матриці *A*, тоді

$$A - B = A + (-B).$$

Означення. **Добутком матриці на число** (або числа на матрицю) називається матриця, елементами якої є добутки елементів даної матриці на це число:

$$\lambda A = A\lambda = \lambda \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\, a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11}\, \lambda a_{12} \dots \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21}\, \lambda a_{22} \dots \lambda a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda a_{m1}\, \lambda a_{m2} \dots \lambda a_{mn}. \end{pmatrix}$$

Операція множення матриці на число має розподільну властивість.

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B.$$

Якщо число λ = 0, то добуток $A \cdot 0$ дорівнює нуль-матриці:

$$A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0.$$

Якщо порівняти означення операцій додавання, віднімання і множення матриць на число з аналогічними операціями над векторами, то легко помітити повну аналогію їх.

Введемо поняття лінійної залежності і незалежності матриць стосовно до матриці-стовпця або матриці-рядка.

Нехай дано набір матриць-стовпців з однаковою кількістю рядків

$$A_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\....\\a_{n1}\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\....\\a_{n2}\end{pmatrix},\ldots,A_k=\begin{pmatrix}a_{1k}\\a_{2k}\\....\\a_{nk}\end{pmatrix}.$$

Візьмемо набір чисел $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ і помножимо λ_1 на A_1,λ_2 на $A_2,\ldots,\lambda_k$ на A_k. Знайдені результати додамо. Дістанемо нову матрицю-стовпець

$$\lambda_1 A_1+\lambda_2 A_2+\ldots+\lambda_k A_k=\begin{pmatrix}\lambda_1 a_{11}+\lambda_2 a_{12}+\ldots+\lambda_k a_{1k}\\ \lambda_1 a_{21}+\lambda_2 a_{22}+\ldots+\lambda_k a_{2k}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \lambda_1 a_{n1}+\lambda_2 a_{n2}+\ldots+\lambda_k a_{nk}.\end{pmatrix}$$

Вираз $\lambda_1 A_1+\lambda_2 A_2+\ldots+\lambda_k A_k$ називається **лінійною комбінацією стовпців** $A_1,A_2,\ldots A_k$.

Нехай задано матрицю-стовпець

$$B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\....\\b_n\end{pmatrix}.$$

Доберемо числа $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ такі, що

$$B=\lambda_1 A_1+\lambda_2 A_2+\ldots+\lambda_k A_k$$

тобто

$$\begin{aligned}b_1&=\lambda_1 a_{11}+\lambda_2 a_{12}+\ldots+\lambda_k a_{1k}\\ b_2&=\lambda_1 a_{21}+\lambda_2 a_{22}+\ldots+\lambda_k a_{2k}\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ b_n&=\lambda_1 a_{n1}+\lambda_2 a_{n2}+\ldots+\lambda_k a_{nk}\end{aligned}\tag{7}$$

Тоді говорять, що *матриця-стовпець B лінійно виражається через матриці-стовпці* $A_1,A_2,\ldots A_k$.

Означення. Якщо для даних матриць-стовпців $A_1,A_2,\ldots A_k$ числа $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$, принаймні одне з яких відмінне від нуля, можна дібрати такими, що лінійна комбінація

$$\lambda_1 A_1+\lambda_2 A_2+\ldots+\lambda_k A_k=0 \qquad (8)$$

дорівнює нуль-матриці, то дані матриці-стовпці називаються **лінійно залежними**, а якщо рівність (8) справджується тоді і тільки тоді коли $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_k=0$, то **лінійно незалежними**.

Якщо матриці-стовпці подати у вигляді векторів, то умова (8) збігається з умовою (4). Викладене має силу і для матриці-рядка.

Означення. **Добутком двох матриць** *A* і *B*, число стовпців першої з яких дорівнює числу рядків другої, називається третя матриця *C*, елемент якої c_{ij} дорівнює сумі добутків елементів *i*-го рядка матриці *A* на відповідні елементи *j*-го стовпця матриці *B*.

Нехай дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\, a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11}\, b_{12} \ldots b_{1p} \\ b_{21}\, b_{22} \ldots b_{2p} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{n1}\, b_{n2} \ldots b_{np} \end{pmatrix}.$$

тоді їхній добуток

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} c_{11}\, c_{12} \ldots c_{1p} \\ c_{21}\, c_{22} \ldots c_{2p} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{m1}\, c_{m2} \ldots c_{mp} \end{pmatrix},$$

де

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj},$$
$$i = 1,2,\ldots,m \text{ і } j = 1,2,\ldots,p.$$

Наведене правило множення матриць викликане необхідністю записувати в компактній формі системи лінійних рівнянь, наприклад (3).

Означення. Дві матриці *A* і *B* називаються **узгодженими**, якщо число стовпців першої дорівнює числу рядків другої, тобто вони мають розміри $m \times n$ і $n \times p$. Перемножати можна тільки узгоджені матриці.

П р и к л а д. Знайти добуток матриць

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & -6 \end{pmatrix} \ i \ B = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Р о з в' я з а н н я. Ці матриці можна перемножати, тому що число стовпців матриці *A* дорівнює числу рядків матриці *B*. За означенням знаходимо

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}-4 & 3 & 2\\ 5 & 1 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 2\\ -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-4)\cdot 4+3\cdot 2+2\cdot(-3)\\ 5\cdot 4+1\cdot 2+(-6)\cdot(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16\\ 40\end{pmatrix}.$$

Зауваження. Якщо розміри матриць *A* і *B* відповідно $m\times n$ і $n\times p$, то розмір матриці-добутку $A\cdot B$ є $m\times p$, тобто $A_{m\times n}\cdot B_{n\times p}=C_{m\times p}$.

Властивості операції множення матриць.

1°. *Добуток будь-якої матриці на узгоджену з нею нуль-матрицю дорівнює нуль-матриці*:

$$A\cdot 0=0.$$

2°. *Добуток будь-якої матриці на узгоджену з нею одиничну матрицю дорівнює даній матриці:*

$$A\cdot E=A.$$

3°. *Добуток матриць не має переставної (комутативної) властивості, тобто не завжди* $A\cdot B=B\cdot A$. *При цьому передбачається, що як* $A\cdot B$, *так і* $B\cdot A$ *мають сенс.*

Якщо $A\cdot B=B\cdot A$, *то матриці називаються переставними (комутативними).*

4°. *Нехай A, B і C — матриці, які можна додавати або перемножати, а α — деяке число, тоді справедливі такі рівності:*

$$\alpha(A\cdot B)=(\alpha A)\cdot B=A\cdot(\alpha B),$$

$$A\cdot B\cdot C=(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C),$$

$$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C.$$

5°. *Якщо дано матриці A і B, то для транспонованих відповідних матриць* A^{T} *і* B^{T} *виконується співвідношення*

$$(AB)^T=B^T A^T.$$

6°. *Якщо для квадратної матриці A виконується рівність* $A^T=A$, *то ця матриця симетрична*.

§ 9. Визначник і мінори матриці

Розглянемо квадратну матрицю

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}\,a_{12}\ldots a_{1n}\\ a_{21}\,a_{22}\ldots a_{2n}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}\,a_{n2}\ldots a_{nn}\end{pmatrix}.$$

Означення. Квадратній матриці можна поставити у відповідність певне число, яке називається **детермінантом** або **визначником матриці.**

Детермінант матриці позначається так:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\, a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Детермінант так само, як і матриці, має порядок. Він дорівнює порядку відповідної матриці. Детермінанти можуть бути першого, другого і n-го порядків. Поняття детермінанта вводиться лише для квадратних матриць. Якщо розглянути деякий елемент квадратної матриці A, який позначимо a_{ij} що стоїть на перетині i-го рядка та j-го стовпця, і побудувати матрицю без цього рядка і стовпця, то дістанемо матрицю (n - 1)-го порядку

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & a_{i-+12} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{10}$$

Цій матриці відповідає визначник (n - l)-го порядку, який називається **мінором матриці** A, який відповідає елементу a_{ij} .

Означення. **Мінором** (n - 1)-го порядку **елемента** a_{ij} **матриці** n-го порядку називається визначник нової матриці, яка утворюється з даної матриці внаслідок викреслювання рядка і стовпця, які перетинаються на цьому елементі.

Мінор матриці позначається так:

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & a_{i-+12} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{11}$$

У матриці першого порядку $A=(a_{11})$ за означенням мінора немає.

Матриця другого порядку $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ має чотири мінори першого порядку:

$M_{11}=a_{22}$; $M_{12}=a_{21}$; $M_{21}=a_{12}$; $M_{22}=a_{11}$.

Для матриці (10) мінори $M_{11}, M_{22}, ..., M_{nn}$ називаються **головними**.

Тепер означимо детермінант порядку *n*, де *n* > 1, як величину, що можна знайти за формулою

$$\det A=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}\,. \tag{12}$$

Це означення є змістовним у індуктивному плані. Наприклад,

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=(-1)^{1+1}a_{11}M_{11}+(-1)^{1+2}a_{12}M_{12}=a_{11}a_{12}-a_{12}a_{21}.$$

Як бачимо, визначник другого порядку дорівнює різниці добутків елементів, які стоять на головній і побічній діагоналях. Якщо маємо визначник третього порядку, то

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=(-1)^{1+1}a_{11}M_{11}+(-1)^{1+2}a_{12}M_{12}+(-1)^{1+3}a_{13}M_{13}=$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})=$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{23}a_{32}a_{11}-a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Таким чином,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-$$

$$-a_{23}a_{32}a_{11}-a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Перший доданок у цій рівності є добутком елементів, розміщених на головній діагоналі. Два наступних доданки є добутками елементів,

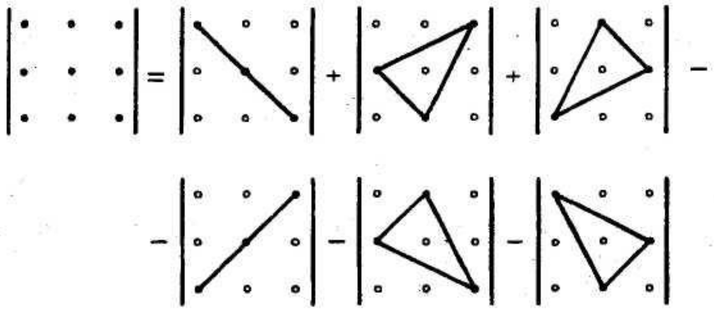
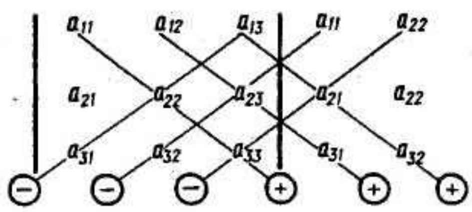


Рис. 21



два з яких лежать на прямій, паралельній головній діагоналі, а третій — на вершині побічної діагоналі. При цьому всі три добутки беруться із своїми знаками. Наступні три доданки утворюються аналогічно, але замість елементів головної діагоналі треба взяти елементи, які стоять на побічній діагоналі, і всі добутки записати з протилежними знаками. Це правило знаходження визначника третього порядку називається **правилом трикутників** (рис.21).

Правило трикутників можна замінити правилом «приписування» стовпців, яке передбачає приписування двох перших стовпців справа від визначника.

Легко помітити, що співмножники кожного з шести доданків правила трикутників тепер розміщуються на прямих, паралельних головній і побічній діагоналям.

Введемо поняття **алгебраїчного доповнення елемента** a_{ij} позначивши його через A_{ij}.

Означення. **Алгебраїчним доповненням** A_{ij} елемента a_{ij} називається його мінор M_{ij}, взятий із своїм знаком, якщо сума номерів рядка і стовпця, на перетині яких стоїть a_{ij}, є парне число, і з протилежним знаком, якщо ця сума – непарне число, тобто

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \tag{13}$$

Тоді визначення детермінанта можна записати у вигляді

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} A_{1j} \tag{14}$$

і довести, що

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} M_{ij}, i = 1,2,\ldots,n, \quad (15)$$

або

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}, \; j = 1,2,\ldots,n.$$

Формули (15) називаються **розкладом детермінанта за елементами рядка або стовпця**.

Визначник дорівнює сумі добутків елементів a_{ij} деякого рядка (стовпця) на алгебраїчні доповнення цих елементів.

Використовуючи формули (15), запишемо розклад визначника третього порядку за елементами, наприклад, першого рядка:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} \, a_{12} \, a_{13} \\ a_{12} \, a_{22} \, a_{23} \\ a_{31} \, a_{32} \, a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}, \quad (16)$$

де

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, A_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Таким чином, щоб розкрити визначник третього порядку, можна використати три правила: правило трикутників, правило приписування рядків і правило розкладання за елементами якого-небудь стовпця або рядка.

Розкривають визначник вищого порядку лише розкладанням за елементами якого-небудь стовпця або рядка.

П р и к л а д. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & -8 & 1 \\ 5 & -4 & 3 & 10 \\ 0 & 2 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$

Р о з в' я з а н н я. Розкладемо визначник за елементами четвертого рядка:

$$\Delta = 0 + (-1)^{4+2} \cdot 2 \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & -8 & 1 \\ 5 & 3 & 10 \end{vmatrix} + (-1)^{4+3} \cdot 7 \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 10 \end{vmatrix} + 0.$$

розкриваючи визначник третього порядку за правилом трикутників або приписування стовпців, дістанемо

$$\Delta = 2 \cdot 29 - 7 \cdot 8 = 2.$$

§ 10. Властивості визначників

1°. *Значення визначника не змінюється, якщо всі його рядки замінити стовпцями, причому кожний рядок замінити стовпцем з тим самим номером.*

Ця властивість означає *рівнозначність рядків і стовпців визначника*.

2°. *Якщо поміняти місцями два стовпці (рядки) визначника, то визначник поміняє знак на протилежний.*

Для доведення властивостей 1° і 2° достатньо розкрити кожний визначник і порівняти знайдені результати.

3°. *Визначник, який має два однакові стовпці (рядки), дорівнює нулю.*

Дійсно, нехай визначник Δ має два однакові стовпці. Тоді, помінявши місцями ці стовпці, дістанемо визначник, що дорівнює - Δ, тобто $\Delta = -\Delta$, звідси знаходимо $2\Delta = 0$, або $\Delta = 0$.

4°. *Якщо всі елементи якого-небудь стовпця (рядка) мають спільний множник, то його можна винести за знак визначника.* Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ma_{12} \\ a_{21} & ma_{22} \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Звідси як наслідок маємо, що коли помножити всі елементи якого-небудь стовпця (рядка) на одне і те саме число, то і визначник помножиться на це число.

Якщо елементи стовпця визначника подати як координати вектора, то властивість 4° випливає із означення операції множення вектора на число.

5°. *Визначник, елементи двох стовпців (рядків) якого відповідно пропорційні, дорівнює нулю.*

Дійсно, нехай маємо визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

в якому $a_{12} = ma_{11}$ і $a_{22} = ma_{21}$. Тоді, враховуючи властивості 3°, 4°, дістанемо

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & ma_{12} \\ a_{21} & ma_{22} \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

6°. *Якщо кожний елемент якого-небудь стовпця (рядка) є сумою двох доданків, то визначник дорівнює сумі двох визначників, у яких стовпцями (рядками) є відповідні доданки, а решта збігається із стовпцями (рядками) заданого визначника:*

$$\begin{vmatrix} a'_{11}+a''_{11} & a_{12} \\ a'_{21}+a''_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} \\ a'_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a_{12} \\ a''_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Якщо позначити

$$\Delta = \begin{vmatrix} a'_{11}+a''_{11} & a_{12} \\ a'_{21}+a''_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} \\ a'_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a''_{11} & a_{12} \\ a''_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

то

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 ,$$

тобто властивість 6° виражає правило додавання визначників.

7°. *Визначник не зміниться, якщо до елементів якого-небудь його стовпця (рядка) додати відповідні елементи іншого стовпця (рядка), помножені на одне і те саме число*.

Справді, нехай дано два визначники, наприклад, третього порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad i \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11}+ma_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12}+ma_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ma_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Тоді з урахуванням властивостей 3°, 4° і 6°, маємо

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + m\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta + m\cdot 0 = \Delta.$$

8°. *Сума добутків елементів a_{ij} деякого рядка (стовпця) визначника на алгебраїчні доповнення елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю:*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = 0, \quad i \neq j; \quad i, j = 1,2,\ldots,n.$$

§11. Скалярна форма лінійної залежності і незалежності системи векторів

Для вирішення питання про лінійну залежність (незалежність) системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ вираз (4)

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_k\vec{a}_k = \overline{0}$$

запишемо в скалярній формі:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots. \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots. \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_k \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \ldots. \\ a_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

або

$$\begin{cases} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \ldots + \lambda_k a_{1k} = 0, \\ \lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} + \ldots + \lambda_k a_{2k} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_1 a_{n1} + \lambda_2 a_{n2} + \ldots + \lambda_k a_{nk} = 0. \end{cases} \qquad (18)$$

Ця система називається **лінійною однорідною системою рівнянь з невідомими** $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. *Вона має завжди так званий тривіальний, або нульовий розв'язок (0,0,…,0). Якщо крім тривіального розв'язку в системі (18) існують й інші розв'язки, то система даних векторів лінійно залежна, а якщо система (18), крім тривіального, інших розв'язків не має, то система даних векторів буде лінійно незалежною.*

Систему (18) завжди можна розв'язати методом виключення відносно невідомих $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$.

П р и к л а д. Показати, що вектори $\vec{a}_1 = (2,-1)$ і $\vec{a}_2 = (6,-3)$ лінійно залежні.

Р о з в ' я з а н н я. Складемо лінійну комбінацію векторів:

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 + 6\lambda_2 \\ -\lambda_1 - 3\lambda_2 \end{pmatrix}$$

і з'ясуємо, при яких λ_1 і λ_2 виконується рівність

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 = \vec{0}. \qquad (19)$$

Це векторне рівняння рівносильне системі рівнянь

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 6\lambda_2 = 0; \\ -\lambda_1 - 3\lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Поділивши обидві частини першого рівняння на -2, помічаємо, що рівняння системи однакові, тобто

$$-\lambda_1 - 3\lambda_2 = 0.$$

Це рівняння має не рівні нулю розв'язки для λ_1 і λ_2. Наприклад, при $\lambda_1 = -3$ і $\lambda_2 = 1$ рівність (19) виконується. Тому вектори $\vec{a}_1 = (2,-1)$ і $\vec{a}_2 = (6,-3)$ лінійно залежні.

§12. Теореми про лінійно залежні і лінійно незалежні вектори

Теорема 1. *Якщо система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ лінійно залежна, то після приєднання до неї будь-якої кількості нових векторів знову утворюється лінійно залежна система.*

Д о в е д е н н я. Це випливає із рівності

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_k\vec{a}_k + \lambda_{k+1}\vec{a}_{k+1} + \ldots + \lambda_{k+m}\vec{a}_{k+m} = \vec{0},$$

в якій серед $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ є такі, які відрізняються від нуля, а всі $\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \ldots, \lambda_{k+m}$ дорівнюють нулю.

Нехай задано систему векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$. Будь-яку частину цієї системи векторів назвемо її підсистемою. Тоді теорему 1. можна сформулювати так: *якщо будь-яка підсистема даної системи векторів лінійно залежна, то і сама система лінійно залежна*.

Для системи лінійно незалежних векторів справедливе **таке твердження**:

якщо система складається із лінійно незалежних векторів, то будь-яка її підсистема також складається із лінійно незалежних векторів.

Теорема 2. *Для того щоб система із k векторів була лінійно залежною, необхідно і достатньо, щоб хоча б один із її векторів був лінійною комбінацією решти векторів.*

Теорема 3. *Будь-яка система векторів, до якої входить нуль-вектор, є лінійно залежною.*

Теорема 4. *Якщо система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ лінійно незалежна, а система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$, $\vec{b}$ —лінійно залежна, то вектор $\bar{b}$ є лінійною комбінацією решти векторів системи.*

Д о в е д е н н я. Рівність

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_k\vec{a}_k + \lambda\vec{b} = \vec{0}$$

можлива лише при $\lambda \neq 0$, тому що в протилежному випадку дана система буде лінійно незалежною. З останньої рівності знаходимо

$$\vec{b} = -\frac{\lambda_1}{\lambda}\vec{a}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda}\vec{a}_2 - \ldots - \frac{\lambda_k}{\lambda}\vec{a}_k.$$

Позначивши

$$\alpha_1 = -\frac{\lambda_1}{\lambda}; \alpha_2 = -\frac{\lambda_2}{\lambda}; \ldots; \alpha_k = -\frac{\lambda_k}{\lambda},$$

дістанемо

$$\bar{b} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{a}_k.$$

Теорема 5. *Якщо $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ — лінійно незалежна система векторів, а вектор $\vec{b}$ не можна подати у вигляді лінійної комбінації цих векторів, то система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k, \vec{b}$ є лінійно незалежною.*

Цю теорему легко довести від супротивного.

§13. Базис. Лінійний підпростір. Ранг матриці

Означення. Будь-яку впорядковану сукупність n векторів називають **базисом деякого простору**, якщо:

1) усі вектори даної сукупності лінійно незалежні;

2) будь-який вектор цього простору є лінійною комбінацією даної сукупності векторів.

Теорема 1. *У n-вимірному просторі система векторів*

$$\vec{e}_1 = (1,0,0,\ldots,0),$$
$$\vec{e}_2 = (0,1,0,\ldots,0),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\vec{e}_n = (0,0,0,\ldots,1),$$

являється базисом цього простору.

Д о в е д е н н я. 1) Доведемо, що вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ лінійно незалежні. Для цього треба довести, що векторне рівняння

$$\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3 + \ldots + \lambda_n\vec{e}_n = \vec{0} \qquad (20)$$

має лише тривіальний розв'язок: $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$. Рівність (20) рівносильна системі скалярних рівнянь

$$\lambda_1 \cdot 1 = 0; \lambda_2 \cdot 1 = 0; \ldots, \lambda_n \cdot 1 = 0,$$

які мають єдиний розв'язок:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$$

2) Легко помітити, що будь-який вектор $\vec{a}$ з відмінними від нуля координатами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ є лінійною комбінацією векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ з коефіцієнтами $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 + \ldots + a_n\vec{e}_n, \qquad (21)$$

тобто система $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ є базисом. Базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ називають **ортонормованим**, а рівність (21) — **розкладом вектора** $\vec{a}$ у лінійному просторі за ортонормованим базисом.

Для тривимірного простору ортонормовані вектори базису називаються **ортами** (рис. 22) і позначаються так:

$$\vec{i} = (1,0,0); \quad \vec{j} = (0,1,0); \quad \vec{k} = (0,0,1).$$

Розклад (21) вектора $\vec{a}$ для тривимірного простору має вигляд

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}. \qquad (22)$$

Оскільки a_1, a_2, a_3 є проекціями вектора $\vec{a}$ на осі координат, то

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}. \qquad (23)$$

Теорема 2. *Будь-яка впорядкована система n лінійно незалежних* *векторів $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n$ n-вимірного простору є його базисом.*

Для доведення того, що система векторів $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n$ є базисом, достатньо довести, що система векторів $\vec{a}, \vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n$ де $\vec{a}$ — будь-який відмінний від нуля вектор n-вимірного лінійного простору, лінійно залежна.

Д о в е д е н н я. Запишемо лінійну комбінацію векторів $\vec{a}$, $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n$

$$\mu\vec{a} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{b}_i = \vec{0}.$$

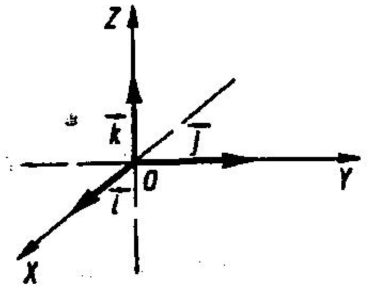


Рис. 22

Використовуючи теорему 1, виражаємо вектори $\vec{b}_i$ через вектори базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$:

$$\vec{b}_i = \sum_{i=1}^{n} y_{ij}\vec{e}_i, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

тоді

$$\mu\vec{a} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sum_{i=1}^{n} y_{ij}\vec{e}_j = \vec{0}$$

або

$$\mu\vec{a} + \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_{i1}\right)\vec{e}_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_{i2}\right)\vec{e}_2 + \ldots + \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_{in}\right)\vec{e}_n = \vec{0}.$$

Звідси випливає, що $\vec{a}$ є лінійною комбінацією векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, тобто $\mu \neq 0$. Це означає, що система $\vec{a}, \vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n$ лінійно залежна. Будь-який вектор $\vec{a}$ є лінійною комбінацією векторів $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n$:

$$\vec{a} = x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + \ldots + x_n\vec{b}_n. \tag{24}$$

Теорему доведено.

Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називаються координатами **вектора** $\vec{a}$ в базисі $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n$. Вираз (24) називають **розкладом вектора** $\vec{a}$ **за базисом** $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n$.

Порівнюючи (21) і (24), можна стверджувати, що один і той самий вектор у різних базисах має різні координати. Однак в одному і тому самому базисі координати вектора визначаються однозначно.

Теорема 3. *У заданому базисі координати вектора визначаються однозначно.*

Д о в е д е н н я. Припустимо, що вектор $\vec{a}$ в базисі $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n$ має різні координати:

$$\vec{a} = (x_1, x_2, ..., x_n) \text{ і } \vec{a} = (y_1, y_2, ..., y_n).$$

Тоді, використовуючи рівність (24), можна записати

$$\vec{a} = x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + ... + x_n\vec{b}_n. \quad (25)$$

та

$$\vec{a} = y_1\vec{b}_1 + y_2\vec{b}_2 + ... + y_n\vec{b}_n. \quad (26)$$

Віднімаючи від рівності (25) рівність (26), дістанемо

$$(x_1 - y_1)\vec{b}_1 + (x_2 - y_2)\vec{b}_2 + ... + (x_n - y_n)\vec{b}_n = 0. \quad (27)$$

Оскільки вектори $\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n$ — лінійно незалежні, то рівність (27) можлива тільки при

$$x_1 - y_1 = 0, x_2 - y_2 = 0, ..., x_n - y_n = 0,$$

звідки

$$x_1 = y_1, x_2 = y_2, ..., x_n = y_n.$$

Отже, розклад (24) єдиний.

Наслідок. *У n-вимірному лінійному просторі максимальне число лінійно незалежних векторів дорівнює числу його вимірів (розмірності).*

Д о в е д е н н я. У теоремі 2 доведено, що у *n*-вимірному просторі лінійно незалежних векторів є *n*, а додавання одного вектора, відмінного від нуль-вектора, робить систему векторів лінійно залежною.

Відповідно до цього наслідку можна дати таке **означення** розмірності простору: *максимальне число лінійно незалежних векторів простору називається розмірністю простору.*

У нульовому просторі немає базису, оскільки система, яка складається з нуль-вектора, лінійно залежна. Тому розмірність нульового простору приймається рівною нулю. Може статись, що набір векторів простору з будь-яким номером є лінійно незалежною системою векторів. Тоді простір вважається **нескінченновимірним**.

Теореми 1—3 стосовно до просторів дають змогу сформулювати такі твердження:

1. *Будь-які два неколінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ на площині є лінійно незалежними, а будь-які три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ лінійно залежними, причому будь-який третій вектор можна подати у вигляді лінійної комбінації двох лінійно незалежних векторів:*

$$\vec{c} = \alpha_1\vec{a} + \alpha_2\vec{b}. \quad (28)$$

2. *Будь-які три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, які непаралельні і не лежать в одній площині, є лінійно незалежними. Причому будь-який четвертий вектор $\vec{d}$ є лінійною комбінацією трьох даних векторів:*

$$\vec{d} = \alpha_1\vec{a} + \alpha_2\vec{b} + \alpha_3\vec{c}. \qquad (29)$$

Зазначимо, що вектори, розміщені в одній і тій самій площині або паралельні одній і тій самій площині, називаються **компланарними**. Умова (28) саме і відповідає умові компланарності векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ *і* $\vec{c}$. Іноді цю умову записують ще й у вигляді

$$\lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} + \lambda_3\vec{c} = \vec{0}, \lambda_3 \neq 0, \qquad (30)$$

а умову (29) — у вигляді

$$\lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} + \lambda_3\vec{c} + \lambda_4\vec{d} = \vec{0}, \qquad (31)$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ — дійсні числа і $\lambda_4 \neq 0$.

Означення. Множина векторів називається **лінійним підпростором (лінійним многовидом)**, якщо сума будь-яких векторів цієї множини є вектором, який належить до цієї самої множини, і добуток числа на вектор цієї множини є вектором, який належить до цієї самої множини.

Так, двовимірний простір є підпростором тривимірного простору, оскільки сума будь-яких двох векторів, які належать деякій площині, належить цій самій площині; те саме стосується і множення вектора на число.

Будь-який лінійний простір можна розглядати як підпростір. Нульовий простір (простір, який складається тільки з нульового вектора) є нульовим підпростором.

Розмірність підпростору визначається так само, як і для простору,— максимальним числом лінійно незалежних векторів.

Два підпростори γ_1 і γ_2 збігаються, якщо будь-який вектор $\vec{a} \in \gamma_1$ належить γ_2, і навпаки.

З підпросторами можна виконувати дії додавання і множення (перерізу). Так, **перерізом** двох підпросторів γ_1 і γ_2 називається підпростір, який складається з векторів, що належать одночасно двом підпросторам.

У §9 введено поняття мінора для квадратної матриці. Проте поняття мінора можна ввести і для прямокутної матриці. Для цього треба з прямокутної матриці закреслити стільки рядків стовпців, щоб після закреслювання утворювалась квадратна матриця.

Наприклад, для матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

можна побудувати чотири квадратні матриці третього порядку:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{34} \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{23} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}.$$

Кожний з визначників цих матриць буде мінором матриці *A*.

Нехай дано матрицю розміру $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\, a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

У цій матриці вибираємо які-небудь s рядків та s стовпців і побудуємо квадратні матриці для кожної такої комбінації. Визначники цих матриць є мінорами матриці *A*.

Введемо поняття рангу матриці.

Означення. Якщо матриця має відмінний від нуля мінор порядку *r*, а всі мінори вищого порядку (якщо вони є) дорівнюють нулю, то число r називається **рангом матриці**. Це записують так: $r = rangA = RgA$.

Ранг нуль-матриці за означенням вважають рівним нулю. Відмінний від нуля мінор найвищого порядку називається **базисним**. Зрозуміло, що у матриці може бути декілька базисних мінорів. Стовпці матриці, на яких міститься базисний мінор, називаються **базисними стовпцями**, а рядки, на яких він лежить,— **базисними рядками**.

Теорема 1 *(про базисний мінор).* *Базисні стовпці (рядки) лінійно незалежні. Будь-який рядок (стовпець) довільної матриці є лінійною комбінацією базисних рядків (стовпців).*

Доведення цієї теореми не наводимо. Із теореми 1 випливає такий наслідок.

Наслідок. *Максимальне число лінійно незалежних стовпців матриці дорівнює максимальному числу її лінійно незалежних рядків, і це число дорівнює рангу матриці.*

Якщо рядки (стовпці) матриці являють собою координати векторів, то ранг матриці розміру $m \times n$ дорівнює числу r її лінійно незалежних векторів. При цьому $r \le m \le n$. Число лінійно незалежних векторів у системі векторів називають рангом системи векторів. Ранг системи векторів дорівнює рангу матриці, яка складається із координат цих векторів.

Для визначення рангу матриці використовується метод обвідних (які містять у собі) мінорів, що грунтується на такій теоремі.

Теорема 2. *Якщо матриця A містить мінор r-го порядку, який не дорівнює нулю, а всі мінори $(r+1)$-го порядку, що обводять цей мінор, дорівнюють нулю, то r є рангом матриці.*

П р и к л а д. Визначити ранг матриці

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Р о з в' я з а н н я.

Мінор другого порядку

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}=1\neq 0.$$

Всі три мінори третього порядку, що обводять цей мінор, дорівнюють нулю:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0;\quad \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 8 \end{vmatrix}=0;\quad \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 7 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

Відповідь. $r(A)=2$.

Для обчислення рангу матриці *A* застосовується також **метод елементарних перетворень.**

Елементарними перетвореннями матриці є:

1) перестановка рядків (стовпців);
2) множення стовпця (рядка) на число, відмінне від нуля;
3) додавання до елементів рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), попередньо помножених на деяке число.

Справедлива така теорема.

Теорема 3. *Елементарні перетворення не змінюють рангу матриці.*

Скориставшись цими перетвореннями, матрицю можна привести до вигляду, коли усі її елементи, крім $\alpha_{11},\alpha_{22},\ldots,\alpha_{rr}$ де $r\leq \min\ (m,\ n)$, дорівнюють нулю. Тоді ранг матриці дорівнює r.

П р и к л а д. Знайти ранг матриці

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 \\ 2 & 5 & -6 & -1 \\ 5 & 12 & -17 & 1 \end{pmatrix}.$$

Р о з в' я з а н н я. Залишаючи без зміни перший рядок, додамо до другого рядка перший, помножений на -2, а до третього рядка –

перший, помножений на -5. В результаті одержуємо матрицю:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 2 & 8 & -14 \end{pmatrix}.$$

Тепер до третього рядка додамо другий, помножений на -2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Додамо перший стовпець, помножений на -2, 5, -3, відповідно до другого, третього і четвертого стовпців, утворюючи нулі в першому рядку:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи другий стовпець, утворюємо нулі в другому рядку:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

За означенням ранг матриці A дорівнює найвищому r відмінного від нуля мінора при умові, що всі мінори вищого порядку дорівнюють нулю. Тут $r = 2$, так як мінор другого порядку відмінний від нуля, а мінор третього порядку дорівнює нулю.

Відповідь. $r = 2$.

§14. Скалярний добуток двох векторів

Добуток двох векторів може бути як числом, так і вектором.

Означення. **Скалярним добутком** двох векторів $\vec{a}$ i $\vec{b}$ називається число, що дорівнює добутку їхніх довжин на косинус кута між ними:

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right). \tag{32}$$

У n-вимірному просторі скалярний добуток двох векторів

$\vec{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$ *і* $\vec{b}=(b_1,b_2,...,b_n)$ визначається такою рівністю:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(\vec{a},\vec{b})=a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n \tag{33}$$

В л а с т и в о с т і   с к а л я р н о г о   д о б у т к у.

1°. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;

2°. $\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$;

3°. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$;

4°. *Якщо* $\vec{a}\neq 0$, *то* $\vec{a}\cdot\vec{a}>0$*; якщо* $\vec{a}=0$, *то* $\vec{a}\cdot\vec{a}=0$.

Розглянемо питання про рівність нулю скалярного добутку, якщо кожний із векторів-співмножників не є нуль-вектором.

Візьмемо рівність

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0, \text{ або } a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n=0.$$

Така рівність цілком можлива. Наприклад, для векторів $\vec{a}=(2;3;4;1)$, $\vec{b}=(3;-4;1;2)$ маємо:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot 3+3\cdot(-4)+4\cdot 1+1\cdot 2=0.$$

Означення. Вектори, скалярний добуток яких дорівнює нулю, називаються **ортогональними.**

Скалярний добуток векторів $\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n$ дорівнює $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=0$ при $i\neq j$ і $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=1$ при $i=j$. Отже, вектори базису $\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n$ попарно ортогональні. Для простору поняття ортогональності і перпендикулярності збігаються. Дійсно, якщо скалярний добуток $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, то з формули (32) випливає, що $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=0$, а це можливо, коли $\vec{a}\perp\vec{b}$, оскільки $\vec{a}\neq 0$ і $\vec{b}\neq 0$.

§15. Довжина вектора і кут у *n*-вимірному просторі. Нерівність Буняковського-Коші-Шварца

Згідно з означенням, якщо $\vec{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$ не є нуль-вектором, то

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=a_1^2+a_2^2+...+a_n^2>0. \tag{34}$$

Позначимо $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2$ і назвемо **скалярним квадратом вектора** $\vec{a}$.

Означення. **Довжиною вектора** $\vec{a}$ у *n*-вимірному просторі називається арифметичне значення квадратного кореня із його скалярного квадрата:

$$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}. \tag{35}$$

Це означення довжини вектора є узагальненням поняття довжини вектора в просторі. Знайдемо довжину будь-якого вектора системи ортонормованих векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$:

$$|\vec{e}_i| = \sqrt{\vec{e}_i^{\,2}} = \sqrt{0^2 + 0^2 + \ldots + 1^2 + 0^2 + \ldots + 0^2} = 1.$$

Означення. Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається **нормованим (одиничним).**

Легко помітити, що нормований вектор

$$\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}. \tag{36}$$

Якщо у лінійному просторі визначено скалярний добуток двох векторів за правилом (33) із властивостями 1°-4°, то лінійний простір називається **евклідовим**.

Введемо поняття відстані між двома точками евклідового простору. В лінійному евклідовому просторі вектор — це напрямлений відрізок, початком якого є деяка точка $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$, а кінцем — точка $B(y_1, y_2, \dots, y_n)$. Довжина вектора, що сполучає точки A і B, позначається $|\overrightarrow{AB}|$ і приймається за відстань між цими точками:

$$|\overrightarrow{AB}| = AB = |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{\vec{a}^{\,2}}\ .$$

Координатами вектора $\vec{a}$ є різниці

$$a_1 = y_1 - x_1, a_2 = y_2 - x_2, \dots, a_n = y_n - x_n,$$

а тому

$$AB = \sqrt{\vec{a}^{\,2}} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2}. \tag{37}$$

Означення. Кутом між векторами $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ у n-вимірному просторі назвемо будь-яке число φ, яке задовольняє умову

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|},\ 0 \le \varphi \le \pi, \tag{38}$$

звідки

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi. \tag{39}$$

Для того, щоб це означення мало сенс, необхідно довести, що

$$-1 \le \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \le 1 \text{ або } \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})^2}{(\vec{a} \cdot \vec{a})^2 (\vec{b} \cdot \vec{b})^2} \le 1,$$

тобто

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \le (\vec{a} \cdot \vec{a})^2 (\vec{b} \cdot \vec{b})^2, \tag{40}$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) \le |\vec{a}||\vec{b}|. \tag{41}$$

Ця нерівність називається **нерівністю Буняковського-Коші-**

Шварца, тобто означення (38) справджується.

Доведемо так зване **правило трикутника**. Для простору відомо, що довжина будь-якої сторони трикутника не більша за суму довжин двох інших його сторін:

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| \le \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|. \tag{42}$$

Покажемо, що ця нерівність справджується і для n-вимірних векторів. Дійсно, нерівність (42) можна записати у вигляді

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 \le \left(\left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|\right)^2,$$

але

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 = \left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \left|\vec{a}\right|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \left|\vec{b}\right|^2.$$

Враховуючи нерівність (41), маємо

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 \le \left|\vec{a}\right|^2 + 2\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right| + \left|\vec{b}\right|^2 = \left(\left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|\right)^2,$$

звідки й випливає нерівність (42).

§16. Проекція вектора на вісь

Надалі напрям осі визначатимемо одиничним вектором $\vec{e}$, а вісь позначимо буквою u.

Нехай дано вектор $\vec{a}$ і вісь u.

Означення. Проекцією a_u вектора $\vec{a}$ на вісь u, називається довжина відрізка $A'B'$, який відтинається від цієї осі площинами, що

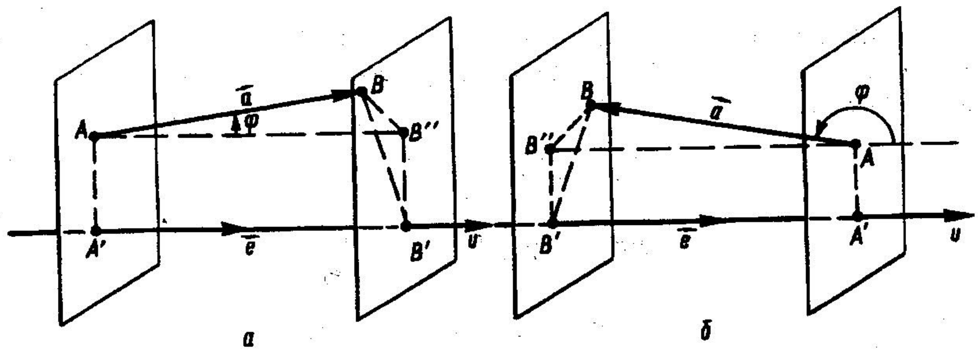


Рис. 23

проходять через початок A і кінець B вектора $\vec{a} = \left|\overrightarrow{AB}\right|$ перпендикулярно до осі.

Довжину відрізка $A'B'$ беремо із знаком «плюс» або «мінус» залежно від того, однаково чи протилежно напрямлені вектор $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ і вісь u (рис. 23, *а, б*), тобто

$$a_u = \pm|A'B'|.$$

Проведемо через точку *A* пряму, паралельну осі *u*, до перетину площиною, яка перпендикулярна до осі *u* і проходить через точку *B*. Дістанемо відрізок *AB″*. Позначимо через φ кут між віссю *u* і вектором $\vec{a}$. Тоді з прямокутного трикутника *ABB″* знаходимо

$$AB'' = a_u = |\vec{a}|\cos\varphi,$$

причому

$$a_u = |A'B'| = |\vec{a}|\cos\varphi, \text{ якщо } 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},$$

$$a_u = -|A'B'| = |\vec{a}|\cos\varphi, \text{ якщо } \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi.$$

Таким чином, *проекція вектора на вісь дорівнює добутку довжини вектора на косинус кута між віссю і вектором:*

$$a_u = |\vec{a}|\cos\varphi = a\cos\varphi. \tag{43}$$

Проекцію вектора на вісь позначають ще й так:

$$np_u\vec{a} = |\vec{a}|\cos\left(\widehat{\vec{a},u}\right). \tag{44}$$

Проекцію вектора $\vec{a}$ на вісь *u*, одиничний вектор якої $\vec{e}$, можна подати у вигляді скалярного добутку вектора $\vec{a}$ на одиничний вектор $\vec{e}$:

$$np_u\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi = |\vec{a}||\vec{e}|\cos\varphi = \vec{a}\cdot\vec{e}. \tag{45}$$

Розглянемо проекцію вектора на вектор. *Проекція одного вектора на інший дорівнює скалярному добутку першого вектора на одиничний вектор другого:*

$$np_{\vec{b}}\vec{a} = np_{\vec{b}_0}\vec{a} = \vec{a}\cdot\vec{b}_0, \tag{46}$$

$$np_{\vec{a}}\vec{b} = np_{\vec{a}_0}\vec{b} = \vec{a}_0\cdot\vec{b}, \tag{47}$$

де $\vec{b}_0 = \dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ і $\vec{a}_0 = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ — відповідно одиничні вектори векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Для координатних осей декартової прямокутної системи координат *XYZ* одиничні вектори, як уже зазначалось, відповідно позначають $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Тоді проекції вектора $\vec{a}$ на координатні осі

$$a_x = np_x\vec{a} = \vec{a}\cdot\vec{i} = |\vec{a}|\cos\alpha,$$

$$a_y = np_y\vec{a} = \vec{a}\cdot\vec{j} = |\vec{a}|\cos\beta,$$

$$a_z = np_z\vec{a} = \vec{a}\cdot\vec{k} = |\vec{a}|\cos\gamma,$$

де α, β і γ — напрямні кути вектора $\vec{a}$. Ці формули вже було знайдено в §2.

Скориставшись формулами (46) і (47), скалярний добуток

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$$

можна записати у вигляді

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\,np_{\vec{b}}\vec{a},\qquad \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,np_{\vec{a}}\vec{b}. \tag{48}$$

Теорема. *Проекція на вісь лінійної комбінації скінченного числа векторів дорівнює відповідній лінійній комбінації їхніх проекцій на ту саму вісь:*

$$np_u\left(\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\ldots+\alpha_n\vec{a}_n\right)=\alpha_1 np_u\vec{a}_1+\alpha_2 np_u\vec{a}_2+\ldots+\alpha_n np_u\vec{a}_n. \tag{49}$$

Доведення. Використавши рівність (45) і властивість скалярного добутку, дістанемо рівність (49).

Наслідок 1. *Проекція суми скінченного числа векторів на вісь (вектор) дорівнює сумі відповідних проекцій цих векторів на ту саму вісь (вектор).*

Для доведення треба у формулі (49) покласти

$$\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=1.$$

Наслідок 2. *Сталий множник можна виносити за знак проекції:*

$$np_u\left(\alpha\vec{a}\right)=\alpha np_u\vec{a}.$$

§17. Основні застосування скалярного добутку двох векторів

Нехай два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задано їхніми проекціями:

$$\vec{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right)\ i\ \vec{b}=\left(b_x,b_y,b_z\right).$$

Тоді можна знайти:

а) кут між даними векторами (напрямами)

$$\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}; \tag{50}$$

б) проекцію одного вектора на інший

$$np_{\vec{a}}\vec{b}=\vec{b}\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}};$$

в) роботу сталої сили на прямолінійній ділянці шляху.

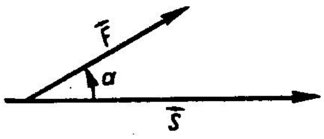


Рис. 24

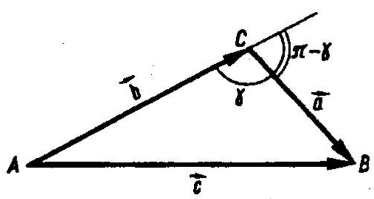


Рис. 25

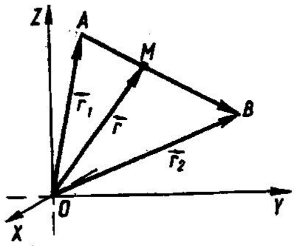


Рис. 26

Справді, робота A сталої сили $\vec{a}=\vec{F}$ на прямолінійному шляху $\vec{b}=\vec{S}$, який складає кут α з вектором $\vec{F}$, дорівнює $A=Fs\cos\alpha$, або $A=\vec{F}\cdot\vec{s}$ (рис.24).

Скалярний добуток використовується для означення лінійної незалежності системи векторів. Нехай дано систему векторів $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ з координатами $\vec{a}_{ij}=(a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{in})$, $i=\overline{1,n}$. Треба побудувати визначник із системи скалярних добутків векторів

$$\begin{vmatrix} \vec{a}_1\cdot\vec{a}_1 & \vec{a}_1\cdot\vec{a}_2 & \ldots & \vec{a}_1\cdot\vec{a}_n \\ \vec{a}_2\cdot\vec{a}_1 & \vec{a}_2\cdot\vec{a}_2 & \ldots & \vec{a}_2\cdot\vec{a}_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \vec{a}_n\cdot\vec{a}_1 & \vec{a}_n\cdot\vec{a}_2 & \ldots & \vec{a}_n\cdot\vec{a}_n \end{vmatrix} = \Gamma_{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n}.$$

Цей визначник називається **визначником Грама**.

Теорема. *Для того, щоб система векторів $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ була лінійно незалежною, необхідно і достатньо, щоб визначник Грама був додатним.*

П р и к л а д. Нехай дано трикутник *ABC*, сторони якого дорівнюють *a,b,c*. Довести теорему косинусів:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma.$$

Доведення. Розглянемо вектори *a*, *b* і *c*, які збігаються з відповідними сторонами трикутника і напрямлені так, як показано на рис. 25. Тоді $\vec{b}+\vec{a}=\vec{c}$.

Скалярний квадрат вектора $\vec{c}$ дорівнює

$$\vec{c}^2=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right),$$

звідки

$$\vec{c}^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2,$$

або

$$|\vec{c}|^2=|\vec{a}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\pi-\gamma)+|\vec{b}|^2$$

Отже,

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma.$$

Це співвідношення називається **теоремою косинусів**.

§18. Поділ відрізка у даному відношенні. Координати центра мас (тяжіння)

Нехай дано відрізок *AB*, де *A* (x_1, y_1, z_1) і В (x_2, y_2, z_2) (рис.26). Знайдемо на відрізку *AB* таку точку *M*, яка поділяє цей відрізок у відношенні λ, тобто

$$AM : MB = \lambda.$$

Радіусами-векторами точок *A* і *B* є відповідно

$$\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1) \text{ і } \vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2).$$

Тоді радіус-вектор шуканої точки *M* (*x, y, z*).

$$\vec{r} = (x, y, z).$$

Розглянемо вектори $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{MB}$. Маємо $\overrightarrow{AM} = \lambda\,\overrightarrow{MB}$. За правилом віднімання векторів знаходимо (рис.26)

$$\overrightarrow{AM} = \vec{r} - \vec{r}_1 \text{ і } \overrightarrow{MB} = \vec{r}_2 - \vec{r}\ .$$

Отже,

$$\vec{r} - \vec{r}_1 = \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r}),$$

звідки

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}_1 + \lambda\vec{r}_2}{1+\lambda}. \tag{51}$$

Проектуючи радіуси-вектори рівності (51) на осі координат, дістаємо

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda};\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda};\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Якщо точка М є серединою відрізка АВ, то $\lambda = 1$ і тоді

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2};\ x = \frac{x_1 + x_2}{2};\ y = \frac{y_1 + y_2}{2};\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Зазначимо, що λ може бути і від'ємною. Тоді точка *M* лежить на прямій, яка проходить через точки *A* і *B* поза відрізком *AB*.

Виведемо тепер формули для координат центра мас системи матеріальних точок.

Нехай у точках $M_1, M_2, \ldots, M_n$ сконцентровано маси $m_1, m_2, \ldots, m_n$ (рис.27). Виберемо прямокутну систему координат *XYZ* у тривимірному просторі. Позначимо координати даних точок: $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, ..., $M_n(x_n, y_n, z_n)$, а радіуси-вектори цих точок відповідно

$$\vec{r}_1(x_1, y_1, z_1),\ \vec{r}_2(x_2, y_2, z_2),\ \ldots,\ \vec{r}_n(x_n, y_n, z_n).$$

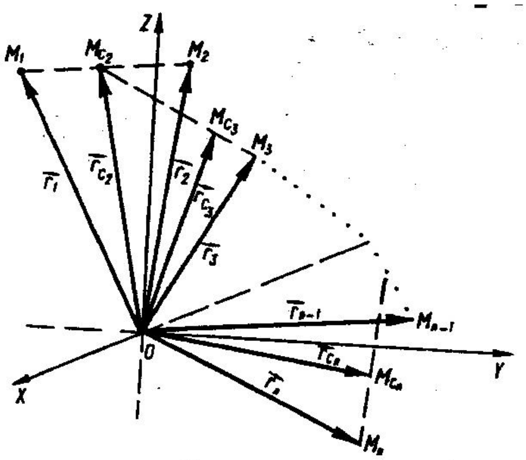


Рис. 27

Поділимо відрізок M_1M_2 у відношенні $\lambda = \dfrac{m_2}{m_1}$.

Відповідно до формули (51) дістанемо

$$\vec r_{c_2} = \frac{\vec r_1 + \dfrac{m_2}{m_1}\vec r_2}{1+\dfrac{m_2}{m_1}} = \frac{m_1\vec r_1 + m_2\vec r_2}{m_1+m_2}.$$

Точка, радіус-вектор якої обчислюється за формулою

$$\vec r_{c_2} = \frac{m_1\vec r_1 + m_2\vec r_2}{m_1+m_2}, \tag{52}$$

називається **центром мас двох матеріальних точок** M_1 і M_2.

Знайдемо радіус-вектор центра мас точок M_{c_2}, з масою m_1+m_2 і M_3 з масою m_3. Маємо

$$\vec r_{c_3} = \frac{(m_1+m_2)\vec r_{c_2} + m_3\vec r_3}{(m_1+m_2)+m_3}. \tag{53}$$

Підставивши значення $\vec r_{c_2}$ з формули (52) у (53), знайдемо

$$\vec r_{c_3} = \frac{m_1\vec r_1 + m_2\vec r_2 + m_3\vec r_3}{m_1+m_2+m_3}. \tag{54}$$

Точка, радіус-вектор якої обчислюється за формулою (54), називається **центром мас трьох матеріальних точок** M_1, M_2 і M_3.

Методом математичної індукції можна довести, що центром мас даної системи *n* матеріальних точок є точка M_{c_n} (позначимо її *C*). Радіус-вектор цієї точки обчислюється за формулою

$$\vec r_{c_n} = \vec r_c = \frac{m_1\vec r_1 + m_2\vec r_2 + \ldots + m_n\vec r_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}. \tag{55}$$

Проектуючи радіуси-вектори з цієї формули на осі координат, дістанемо

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i},\ \ y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i},\ \ z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \tag{56}$$

де x_c, y_c, z_c — координати центра мас $m_1, m_2, \ldots, m_n$, сконцентрованих у точках $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1,2,...,n$.

Якщо чисельник і знаменник у формулах (55) і (56) помножити на прискорення g вільного падіння і врахувати, що $m_i g_i = p_i$, де p_i — вага відповідної точки, то дістанемо формули для радіуса-вектора і координат центра ваги системи *n* матеріальних точок:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}, \quad x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}, \tag{57}$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}, \tag{58}$$

$$z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}. \tag{59}$$

§19. Векторний добуток двох векторів

Означення. **Векторним добутком двох векторів** $\vec{a}$ і $\vec{b}$, називається вектор $\vec{c}$ такий, що:

а) $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, де $\varphi = \left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right)$;

б) $\vec{c} \perp \vec{a}$ і $\vec{c} \perp \vec{b}$;

в) якщо $\vec{c} \neq 0$, то вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, утворюють праву трійку.

Означення. Упорядкована трійка некомпланарних векторів називається **правою,** якщо з кінця третього вектора найкоротший поворот від першого вектора до другого здійснюється проти обертання годинникової стрілки.

Згідно з умовою а), вектор $\vec{c} = \vec{0}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні. В окремому випадку, коли який-небудь із векторів ($\vec{a}$ чи $\vec{b}$) є нуль-вектором, то вони колінеарні, і, як наслідок, $\vec{c} = \vec{0}$. Якщо $\bar{c} \neq \bar{0}$, то $|\vec{c}|$ чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, приведених до спільного початку (рис. 28).

Векторний добуток позначається

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}.$$

Властивості векторного добутку.

1°. *Векторний добуток двох векторів не має комутативної* *(переставної) властивості. Для векторного добутку справджується рівність*

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}\,.$$

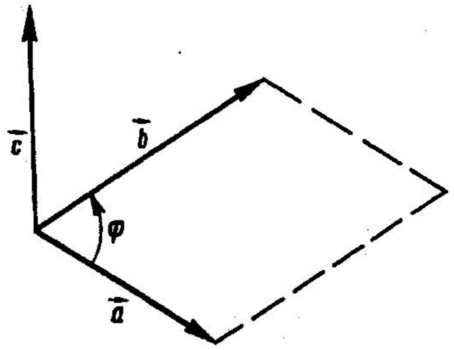


Рис. 28

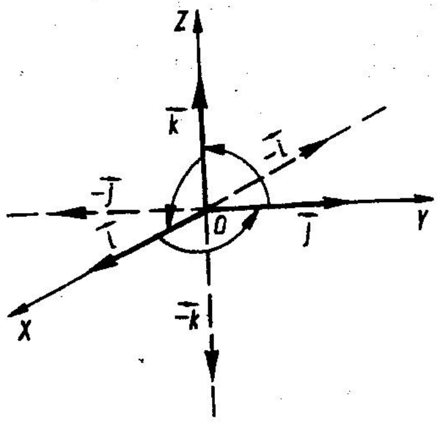


Рис. 29

2°. Розглянемо векторний добуток одиничних векторів координатних осей (ортів) (рис.22, 29). Згідно з означенням векторного добутку знаходимо

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0,$$

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\quad \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},$$

$$\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\quad \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i},$$

$$\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j},\quad \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}.$$

3°. *Векторний добуток має розподільну властивість відносно скалярного множника:*

$$\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\left(\lambda\vec{a}\right)\times\vec{b}=\vec{a}\times\left(\lambda\vec{b}\right).$$

4°. *Векторний добуток має розподільну властивість відносно векторного множника:*

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}.$$

5°. *Векторний добуток у координатній формі. Нехай задано вектор*

$$\vec{a}=\left(a_x,a_y,...,a_z\right);\ \vec{b}=\left(b_x,b_y,...,b_z\right)$$

у прямокутній системі координат з ортами $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$.Знайдемо векторний добуток цих векторів:

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\times\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)=$$
$$=a_xb_x\left(\vec{i}\times\vec{i}\right)+a_xb_y\left(\vec{i}\times\vec{j}\right)+a_xb_z\left(\vec{i}\times\vec{k}\right)+$$
$$+a_yb_x\left(\vec{j}\times\vec{i}\right)+a_yb_y\left(\vec{j}\times\vec{j}\right)+a_yb_z\left(\vec{j}\times\vec{k}\right)+$$
$$+a_zb_x\left(\vec{k}\times\vec{i}\right)+a_zb_y\left(\vec{k}\times\vec{j}\right)+a_zb_z\left(\vec{k}\times\vec{k}\right).$$

Враховуючи властивість 2°, дістанемо

$$\vec{c}=a_xb_y\vec{k}-a_xb_z\vec{j}+a_yb_z\vec{i}-a_yb_x\vec{k}+a_zb_x\vec{j}-a_zb_y\vec{i}=$$
$$=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\vec{i}+\left(a_zb_x-a_xb_z\right)\vec{j}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\vec{k}.$$

Отже, проекції вектора $\vec{c}$ на координатні осі дорівнюють

$$c_x=np_x\vec{c}=a_yb_z-a_zb_y=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix},$$

$$c_y=np_y\vec{c}=a_zb_x-a_xb_z=\begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix},$$

$$c_z=np_z\vec{c}=a_xb_y-a_yb_x=\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}.$$

Тоді для знаходження векторного добутку двох даних векторів маємо формулу

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

П р и к л а д. Знайти векторний добуток $\vec{a}=(-3,1,2)$ і $\vec{b}=(2,-1,1)$.

Розв'язання. Маємо

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=3\vec{i}+7\vec{j}+\vec{k}.$$

Відповідь. $\vec{c}=(3,7,1)$.

§ 20. Застосування векторного добутку

1. *Обчислення площі трикутника.*

Нехай дано трикутник з вершинами у точках

$$A(x_1,y_1,z_1),\ B(x_2,y_2,z_2),\ \text{і}\ C(x_3,y_3,z_3)$$

Знайти площу трикутника ABC (рис.30).

Розв'язання. Розглянемо два вектори $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$ і $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$, що збігаються із сторонами трикутника *ABC*. Модуль векторного добутку $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$, згідно з означенням векторного добутку, дорівнює площі паралелограма *ABCD*. Тоді площа трикутника *ABC*

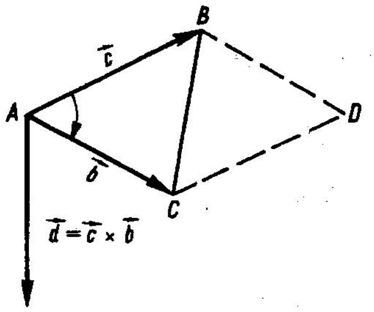


Рис. 30

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\left|\vec{c}\times\vec{b}\right|.$$

Знаючи координати початку і кінця векторів *AB* і *AC*, знайдемо ці вектори:

$$\overrightarrow{AB}=\vec{c}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1),$$
$$\overrightarrow{AC}=\vec{b}=(x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1).$$

Тоді площа трикутника

$$S=\frac{1}{2}\left|\vec{c}\times\vec{b}\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{matrix}\right\|.$$

Розглянемо вектор $\vec{d}$, який дорівнює добутку векторів $\vec{c}$ і $\vec{b}$:

$$\vec{d}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}y_2-y_1 & z_2-z_1\\ y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix}z_2-z_1 & x_2-x_1\\ z_3-z_1 & x_3-x_1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}\vec{k}.$$

Проекціями вектора $\bar{d}$ на координатні осі будуть

$$d_x=\begin{vmatrix}y_2-y_1 & z_2-z_1\\ y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix},\quad d_y=\begin{vmatrix}z_2-z_1 & x_2-x_1\\ z_3-z_1 & x_3-x_1\end{vmatrix},$$

$$d_z=\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix},$$

а довжина

$$\left|\vec{d}\right|=\sqrt{d_x^2+d_y^2+d_z^2}.$$

Тоді площу трикутника можна записати у вигляді

$$S=\frac{1}{2}\left|\vec{d}\right|.$$

Розглянемо окремий випадок, коли трикутник лежить в одній з координатних площин, наприклад у площині *xOy*. При цьому

$z_1 = z_2 = z_3 = 0$, а проекції вектора $\vec{d}$ дорівнюють відповідно

$$d_x = 0, \quad d_y = 0, \quad d_z = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$$

Площа трикутника, який лежить у площині $z = 0$ з вершинами в точках $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, і $C(x_3, y_3)$, дорівнює

$$S_{xy} = \frac{1}{2}|d_z| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{matrix}\right\|.$$

Визначник другого порядку в останній формулі можна записати у вигляді визначника третього порядку:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Тоді площа трикутника з вершинами у точках $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, і $C(x_3, y_3)$ може бути виражена формулою

$$S_{xy} = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{matrix}\right\|.$$

Аналогічно можна записати формули площ трикутників, які лежать у координатних площинах *yOz* і *xOz*.

П р и к л а д. Знайти площу трикутника, вершини якого розміщені в точках $A(1,1,3)$, $B(3,-1,6)$, і $C(5,1,-3)$.

Розв'язання. Маємо

$$\overrightarrow{AB} = (5-1, 1-1, -3-3) = (4, 0, -6),$$
$$\overrightarrow{AC} = (3-1, -1-1, 6-3) = (2, -2, 3),$$

тоді $S = 0{,}5\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = 0{,}5\sqrt{12^2 + 24^2 + 8^2} = 14(\textit{кв.од.}).$

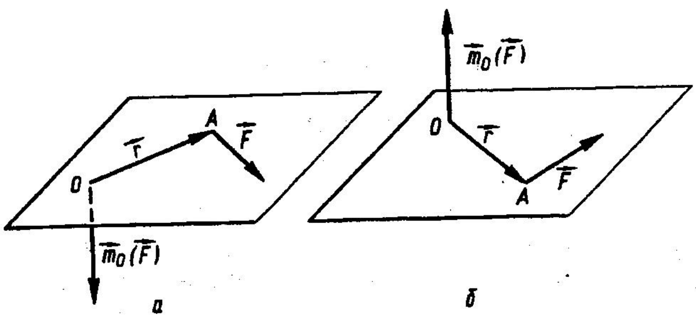


Рис. 31

2. ***Умова паралельності (колінеарності, або лінійної***

залежності) двох векторів.

Два вектори тривимірного простору, що відмінні від нуль-вектора, паралельні тоді і тільки тоді, коли їхній векторний добуток дорівнює нуль-вектору.

а) Нехай вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ паралельні, тоді $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, де λ — деяке дійсне число, або

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda .$$

Тоді

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} .$$

б) Нехай векторний добуток $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, тоді $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, тобто $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

3. *Момент сили відносно полюса.*

Відомо, що момент сили $\vec{F}$ відносно полюса (точки) O дорівнює векторному добутку радіуса-вектора $\vec{r}$ точки прикладання сили на вектор сили (рис. 31, *а, б*):

$$\vec{m}_0\left(\vec{F}\right) = \vec{r} \times \vec{F} .$$

§ 21. Добуток трьох векторів. Мішаний добуток і його властивості

Послідовне множення трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ можна здійснити різними способами.

1. Можна два перших вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перемножити скалярно, а потім знайдене число помножити на третій вектор $\vec{c}$. При цьому вектор $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)\vec{c}$ буде колінеарним вектору $\vec{c}$, тобто $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)\vec{c} = \lambda\vec{c}$, де $\lambda = \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$. Очевидно,

$$\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)\vec{c} = \vec{c}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = \vec{c}\left(\vec{b} \cdot \vec{a}\right).$$

2. Можна вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перемножити векторно і знайдений вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ помножити скалярно на вектор $\vec{c}$:

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} .$$

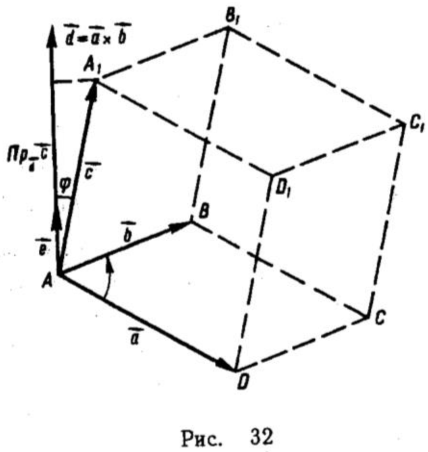


Рис. 32

У результаті цього дістанемо число, яке називається **мішаним добутком трьох векторів.**

3. Можна два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перемножити векторно і знайдений вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ помножити векторно на третій вектор $\vec{c}$. Дістанемо вектор $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)\vec{c}$, який називається **подвійним**

векторним добутком даних трьох векторів:

$$\vec{d} = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c}\,.$$

Властивості мішаного добутку.

1°. Розглянемо три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, які не лежать в одній площині (рис. 32).

Побудуємо на цих векторах, як на ребрах, що виходять із однієї точки, паралелепіпед. Знайдемо об'єм цього паралелепіпеда. Відомо, що об'єм паралелепіпеда

$$V = QH\,,$$

де Q — площа основи, а H — висота.

Згідно з означенням векторного добутку двох векторів,

$$Q = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|.$$

Висота паралелепіпеда H дорівнює модулю проекції вектора $\vec{c}$ на вектор $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$:

$$H = \left|np_{\vec{e}}\vec{c}\right|,$$

де $\vec{e}$ — одиничний вектор векторного добутку $\vec{d}$.

Таким чином,

$$V = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|\left|np_{\vec{e}}\vec{c}\right| = \left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}\right|. \qquad (61)$$

Отже, *геометрично мішаний добуток трьох векторів* $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, *взятий за абсолютною величиною, є об'ємом паралелепіпеда, побудованого на векторах, які перемножаються, як на ребрах, що виходять з однієї точки.*

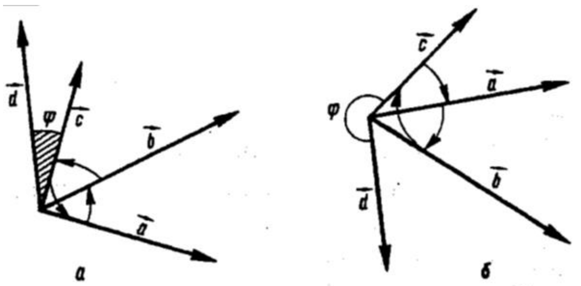


Рис. 33

2°. *Мішаний добуток трьох векторів додатний, якщо розміщення векторів відповідає правій системі координат, і від'ємний, якщо розміщення векторів відповідає лівій системі координат.*

Справді, якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ розміщені так, як показано на рис.33, *а*, то кут φ між векторами $\vec{d} = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$ і $\vec{c}$ гострий, тоді $\vec{d} \cdot \vec{c} > 0$. Якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ розміщені так, як показано на рис.33,*б*, то кут φ між векторами $\vec{d}$ і $\vec{c}$ тупий. Тому в першому випадку скалярний добуток $\vec{d} \cdot \vec{c}$ додатний, а у другому — від'ємний. Таким чином,

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \left(\vec{c} \times \vec{a}\right) \cdot \vec{b} = \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \cdot \vec{a}\,,$$

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = -\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{c} = -\left(\vec{c}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{a}\,.$$

3°. *Три вектори* $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, *відмінні від нуль-вектора, лежать на одній і тій самій площині, тобто є лінійно залежними, тоді і тільки тоді, коли їхній мішаний добуток дорівнює нулю.*

Це випливає з формули (61).

4°. Нехай задано три вектори в координатній формі:

$$\vec{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right), \quad \vec{b} = \left(b_x, b_y, b_z\right), \quad \vec{c} = \left(c_x, c_y, c_z\right).$$

Тоді їхній мішаний добуток

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \vec{d}\cdot\vec{c} = d_x c_x + d_y c_y + d_z c_z\,.$$

Як відомо,

$$d_x = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, \quad d_y = \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}, \; d_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

Отже,

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Таким чином, мішаний добуток векторів, заданих в координатній формі, дорівнює

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{62}$$

Користуючись формулою (62), формулу (61) для обчислення об'єму паралелепіпеда можна записати у вигляді

$$V = \pm\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix},$$

де знак «+» треба брати тоді, коли значення визначника додатне, і знак «-» тоді, коли це значення від'ємне.

Якщо вектори $\vec{a} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AA_1}$ (рис. 32) задано координатами їхніх початку і кінця, тобто точками $A\left(x_0, y_0, z_0\right)$, $D\left(x_1, y_1, z_1\right)$, $B\left(x_2, y_2, z_2\right)$, і $A_1\left(x_3, y_3, z_3\right)$, то

$$V = \pm\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix}.$$

Умову компланарності трьох векторів можна записати у вигляді

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0,$$

або

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\pm\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \\ x_3-x_0 & y_3-y_0 & z_3-z_0 \end{vmatrix}=0$$

Аналогічно знаходимо умову належності чотирьох точок $A(x_0, y_0, z_0)$, $B(x_1, y_1, z_1)$, $C(x_2, y_2, z_2)$ і $D(x_3, y_3, z_3)$ тривимірного простору однієї і тієї самої площини (рис. 34).

Дані точки лежать в одній площині, якщо вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ лежать у тій самій площині, а це буде тоді і тільки тоді, коли

$$\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}=0,$$

або

$$\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \\ x_3-x_0 & y_3-y_0 & z_3-z_0 \end{vmatrix}=0. \quad (63)$$

5°. Розглянемо застосування мішаного добутку векторів до обчислення об'єму трикутної піраміди.

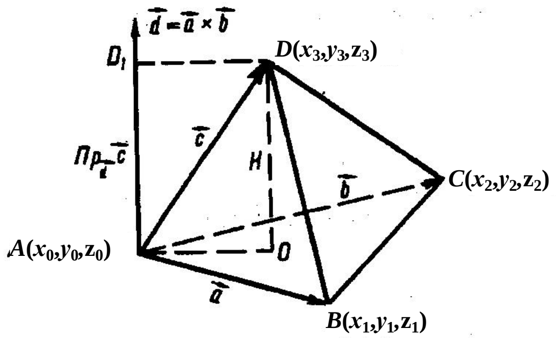


Рис. 34

Нехай вершини трикутної піраміди (рис. 34) лежать у точках $A(x_0, y_0, z_0)$, $B(x_1, y_1, z_1)$, $C(x_2, y_2, z_2)$, і $D(x_3, y_3, z_3)$.

Площу трикутника ABC (основи піраміди) позначимо через Q, а її висоту $|DO|$ — через H. Об'єм піраміди

$$V=\frac{1}{3}QH.$$

Знайдемо вектори:

$$\vec{a}=\overrightarrow{AB}=\left(x_1-x_0,\quad y_1-y_0,\quad z_1-z_0\right),$$

$$\vec{b}=\overrightarrow{AC}=\left(x_2-x_0,\quad y_2-y_0,\quad z_2-z_0\right),$$

$$\vec{c}=\overrightarrow{AD}=\left(x_3-x_0,\quad y_3-y_0,\quad z_3-z_0\right).$$

Тоді

$$Q = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|, \text{ а } H = |OD| = \left|np_{\vec{a}\times\vec{b}}\vec{c}\right|.$$

Таким чином,

$$V = \frac{1}{3}QH = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\left|np_{\vec{a}\times\vec{b}}\vec{c}\right| = \frac{1}{6}\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|.$$

Тобто *об'єм трикутної піраміди дорівнює 1/6 модуля мішаного добутку векторів, які збігаються з ребрами піраміди, що виходять з однієї і тієї самої вершини:*

$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right| = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} x_1 - x_0, & y_1 - y_0, & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0, & y_2 - y_0, & z_2 - z_0 \\ x_3 - x_0, & y_3 - y_0, & z_3 - z_0 \end{matrix}\right\|. \qquad (64)$$

П р и к л а д. Визначити, чи будуть лінійно залежними вектори $\vec{a} = \vec{i} + 9\vec{j} - 11\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$.

Розв'язання. Обчислимо мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 9 & -11 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

тобто дані вектори лінійно залежні.

§22. Подвійний векторний добуток

Нехай задано три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$. Розглянемо їхній добуток

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}.$$

Позначимо $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{d}$, тоді $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c} = \vec{d}\times\vec{c} = \vec{l}$. Можна показати, що проекції l_x, l_y, l_z вектора $\vec{l} = \left(l_x, l_y, l_z\right)$ на координатні осі відповідно дорівнюють:

$$l_x = b_x\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right) - a_x\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right), \qquad l_y = b_y\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right) - a_y\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right),$$

$$l_z = b_z\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right) - a_z\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right),$$

а

$$\vec{l} = \vec{b}\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right) - \vec{a}\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right),$$

або

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c} = \vec{b}\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right) - \vec{a}\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right).$$

Розглянемо тепер добуток $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$. Маємо

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = -\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\times\vec{a} = -\vec{c}\left(\vec{b}\cdot\vec{a}\right) + \vec{b}\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right),$$

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \vec{b}\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right).$$

Зауваження. Розглянуті в §19-§22 поняття не поширюються на випадок вектора з числом компонент $n \geq 4$.

Розділ III. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

§1. Лінійні алгебраїчні рівняння. Теорема Кронекера — Капеллі

Нехай задано систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1}$$

в якій коефіцієнти a_{ij} і вільні члени $b_1, b_2, \ldots, b_m$ відомі, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — невідомі. Розв'язати систему (1) — це означає знайти впорядковану сукупність чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, таку, що при заміні $x_1, x_2, \ldots, x_n$ відповідно на $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ кожне рівняння перетворюється на тотожність.

Систему рівнянь (1) можна записати у векторній формі. Для цього введемо у просторі, розмірність якого дорівнює числу рівнянь, вектори

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ \ldots, \ \vec{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \ \ \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Тоді система (1) набере вигляду

$$\vec{a}_1 x_1 + \vec{a}_2 x_2 + \ldots + \vec{a}_n x_n = \vec{b} \tag{2}$$

Згідно з рівнянням (2), розв'язання системи (1) можна звести до встановлення лінійної залежності системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ і $\vec{b}$. Так, система (1) не має розв'язку, коли вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ лінійно незалежні.

Введемо матрицю коефіцієнтів системи векторів

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\, a_{m2} \quad a_{mn} \end{pmatrix},$$

матрицю-стовпець правої частини

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix},$$

матрицю-стовпець невідомих

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Використовуючи означення добутку матриць (див. §8), систему (1) можна записати у вигляді

$$AX = B. \tag{6}$$

Ця форма запису системи (1) називається **матричною**.

Поставивши задачу про відшукання розв'язку системи (1), ми не задавали ніяких обмежень ні на число рівнянь, ні на число невідомих. Тому система (1) **може не мати розв'язку**. Наприклад,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1; \\ x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

Система може мати **нескінченну множину розв'язків**. Наприклад,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2; \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Для цієї системи впорядкована трійка чисел

$$\alpha_1 = 1 + a, \alpha_2 = 1 - 2a, \alpha_3 = a,$$

де a (будь-яке дійсне число) є розв'язком.

Система може мати також **єдиний розв'язок**. Наприклад,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3; \\ 2x_1 - 3x_2 = 1. \end{cases} \tag{8}$$

Розв'язком цієї системи є тільки одна впорядкована пара чисел (2,1).

Означення. Система лінійних рівнянь називається **сумісною**, якщо вона має розв'язок, і **несумісною**, якщо не має розв'язків.

Перед тим як встановити умову сумісності системи лінійних рівнянь, введемо деякі поняття. Матриця A (3) коефіцієнтів при невідомих системи (1) називається **основною**.

Приєднаємо до матриці A стовпець вільних членів системи (1). Дістанемо так звану **розширену матрицю** A^* даної системи:

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \ \dots \ a_{1n} \ b_1 \\ a_{21}\, a_{22} \ \dots \ a_{2n} \ b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} \ a_{m2} \ a_{mn} \ b_m \end{pmatrix}. \qquad (9)$$

Теорема Кронекера — Капеллі (умова сумісності системи лінійних рівнянь). *Система (1) сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці:*

rang A = rang A (Rg A = Rg A*).*

Доведення. Якщо система (1) має розв'язок $\vec{x}_1 = (x_1, x_2, \dots, x_n) \neq \vec{0}$, то вектор $\vec{b}$ є лінійною комбінацією векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ (див. (2)), тобто стовпчик із вільних членів матриці є лінійною комбінацією стовпців матриці A системи. Базисні мінори матриць A і A^* не змінювались: $RgA = RgA^*$(див. теорему 1, §13). Якщо $RgA = RgA^*$, то базисні мінори обох матриць збігаються, і згідно з теоремою 1, §13, справедливе рівняння (2), тобто система (1) має розв'язок.

§2. Метод Гаусса

Нехай дано систему *m* лінійних рівнянь з *n* невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (10)$$

Серед цих рівнянь можуть бути і такі, що,

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = b. \qquad (11)$$

Далі вважатимемо, що система (10) має розв'язок, тобто сумісна.

Якщо $b \neq 0$, то рівняння (11) не задовольняє ніякі значення x_i. У цьому разі система не має розв'язку, вона несумісна.

Якщо $b = 0$, то рівняння (11) задовольняють будь-які значення $x_1, x_2, \dots, x_n$. При цьому вираз (11) називають не рівнянням, а **тотожністю** і записують $0 \equiv 0$. Тотожність можна вилучити із системи. При цьому решта рівнянь матиме ті самі розв'язки, що і раніше. Говорять, що *системи з тотожністю і без тотожності рівносильні*. Дві системи лінійних рівнянь називаються **рівносильними,** якщо вони мають однакові розв'язки.

Над системами лінійних рівнянь виконують операції, які називаються **елементарними**:

а) додавання до обох частин рівняння відповідних частин іншого рівняння, помножених на деяке число λ;

б) перестановку рівнянь у системі;

в) вилучення із системи тотожності $0 \equiv 0$;

г) множення якого-небудь рівняння системи на дійсне число відмінне від нуля;

д) перенумерувати як рівнянь, так і невідомих.

Ці операції не порушують рівносильності системи рівнянь.

За допомогою операції а) можна вилучити будь-яке невідоме з усіх рівнянь системи, окрім одного. При цьому невідоме, яке вилучають, називається **провідним невідомим**; коефіцієнти при провідному невідомому називаються провідними елементами, а рівняння у якому зберігається провідне невідоме, називається **провідним рівнянням**.

Як приклад вилучимо з $(m-1)$-го рівняння системи (1) невідоме x_1 і приймемо за головне перше рівняння. Для цього помножимо рівняння, з якого вилучимо x_1, на λ_k, де $k = 2,3,\ldots,m$, і додамо знайдине рівняння до головного. У результаті цього маємо

$$(a_{11} + \lambda_k a_{k1})x_1 + (a_{12} + \lambda_k a_{k2})x_2 + \ldots + (a_{1n} + \lambda_k a_{kn})x_n = b_1 + \lambda_k b_k.$$

Поклавши $a_{11} + \lambda_k a_{k1} = 0$, або $\lambda_k = -\dfrac{a_{11}}{a_{k1}}$, дістанемо рівняння, в якому відсутнє невідоме x_1. Аналогічно вилучимо з усіх рівнянь x_1, крім головного (першого) рівняння. Потім, взявши за головне друге рівняння знайденої системи, вилучимо x_2 з усіх наступних рівнянь т.д. У результаті цього дістанемо так звану **ступінчасту систему**

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1r}x_r + \ldots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad c_{22}x_2 + \ldots + c_{2r}x_r + \ldots + a_{2n}x_n = d_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad c_{rr}x_r + \ldots + c_{rn}x_n = d_r, \end{cases} \tag{12}$$

або систему у трикутній формі

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1r}x_r + \ldots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad c_{22}x_2 + \ldots + c_{2r}x_r + \ldots + a_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad c_{rr}x_r + \ldots + c_{rr}x_n = d_r, \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad c_{nn}x_n = d_n. \end{cases} \tag{13}$$

Система (13) має єдиний розв'язок, а система (12) при $r < n$ має $n - r$ так званих вільних змінних, тобто невідомих, які набувають довільних значень.

Для того, щоб довільну систему вигляду (10) привести до вигляду (12) або (13), часто достатньо перенумерувати як рівняння, так і невідомі.

Розглянута методика перетворення системи (10) на системи (12) і (13) називається **методом послідовних вилучень невідомих Жордана — Гаусса** або коротко **методом Гаусса**.

Цей метод можна використовувати і для визначення сумісності системи (10). У цьому разі в результаті послідовного вилучення невідомих дійдемо системи (12), в якій деякі рівняння матимуть вигляд

$$\begin{cases} 0 = d_{r+1}, \\ 0 = d_{r+2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = d_m. \end{cases}$$

Якщо в останніх рівностях хоча б одне з чисел d_k, $k = r+1, r+2, \ldots, m$ не дорівнює нулю, то початкова система несумісна.

Таким чином, методом Гаусса можна відшукати розв'язок будь-якої системи без попереднього визначення її сумісності.

П р и к л а д. 1. Розв'язати методом Гаусса систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -7; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

Розв'язання. За провідне рівняння візьмемо перше рівняння даної системи, а за провідне невідоме — x_1.

До другого рівняння додамо перше рівняння, помножене на -1, а до третього – перше, помножене на -2:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2; \\ \quad -2x_2 + x_3 = -5; \\ \qquad x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$$

Тепер помножимо друге рівняння утвореної системи на $\frac{1}{2}$ і додамо до третього:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2; \\ \quad -2x_2 + x_3 = -5; \\ \qquad -2{,}5x_3 = 2{,}5. \end{cases}$$

З останнього рівняння системи знаходимо $x_3 = -1$, з другого $x_2 = 2$ і з першого $x_1 = -3$.

Відповідь. $(-3;2;-1)$.

П р и к л а д. 2. Показати, що система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 6x_4 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 6. \end{cases}$$

несумісна.

Розв'язання. Візмемо за провідне невідоме x_1, а за провідне рівняння – перше. До другого рівняння додамо перше рівняння, помножене на -2, до третього – перше помножене на -3, а до четвертого – перше помножене на -4:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ \quad -3x_2 + x_3 - 4x_4 = -6, \\ \quad -x_2 + x_3 - 9x_4 = -9, \\ \quad -x_2 + x_3 - 9x_4 = -10. \end{cases}$$

В утвореній системі переставимо місцями останні три рівняння:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ \quad -x_2 + x_3 - 9x_4 = -9, \\ \quad -x_2 + x_3 - 9x_4 = -10, \\ \quad -3x_2 + x_3 - 4x_4 = -6. \end{cases}$$

До третього рівняння додамо друге рівняння, помножене на -1, а до четвертого – друге помножене на -3:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ \quad -x_2 + x_3 - 9x_4 = -9, \\ \qquad\qquad 0 = -1 \neq 0, \\ \qquad -2x_3 + 23x_4 = 21, \end{cases}$$

звідси і випливає несумісність системи.

Відповідь. Система несумісна.

§3. Однорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь. Загальний і частинний розв'язки

Означення. Система лінійних рівнянь називається **однорідною**, якщо праві частини цих рівнянь дорівнюють нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \tag{14}$$

Система (14) завжди сумісна, тому що розширена матриця відрізняється від основної на стовпець, який являє собою нуль-вектор. Оскільки система, яка має нуль-вектор, завжди лінійно залежна, то ранг розширеної матриці збігається з рангом основної. Це очевидно, тому що система (14) завжди має тривіальний зв'язок:

$$x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0.$$

Запишемо систему (14) у векторній формі:

$$\vec{a}_1 x_1 + \vec{a}_2 x_2 + \ldots + \vec{a}_n x_n = \vec{0} \tag{15}$$

і доведемо, що сукупність розв'язків системи (14), або (15), утворює підпростір. Для цього треба довести, що коли вектори

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

є розв'язком системи, то $\vec{x} + \vec{y}$ і $\lambda\vec{x}$ також будуть розв'язками цієї системи.

Дійсно, за умовою

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n = \vec{0},$$

і

$$y_1\vec{a}_1 + y_2\vec{a}_2 + \ldots + y_n\vec{a}_n = \vec{0}.$$

Додавши ці рівності, дістанемо

$$(x_1 + y_1)\vec{a}_1 + (x_2 + y_2)\vec{a}_2 + \ldots + (x_n + y_n)\vec{a}_n = \vec{0}.$$

Помноживши рівняння (15) на λ, знайдемо

$$(\lambda x_1)\vec{a}_1 + (\lambda x_2)\vec{a}_2 + \ldots + (\lambda x_n)\vec{a}_n = \vec{0}.$$

Це означає, що $\vec{x} + \vec{y}$ і $\lambda\vec{x}$ також є розв'язками системи (15).

Нехай матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

має ранг r, тобто серед векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ є $\vec{r}$ лінійно незалежних, причому $r \le m \le n$. Тоді система векторів

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_r, \vec{a}_j,$$

де $j = r+1, r+2, \ldots, n$, лінійно залежна:

$$\vec{a}_j = z_1^{(j)}\vec{a}_1 + z_2^{(j)}\vec{a}_2 + \ldots + z_r^{(j)}\vec{a}_r .$$

Покладемо $z_i^{(j)} = -y_i^{(j)}$, тоді

$$y_1^{(j)}\vec{a}_1 + y_2^{(j)}\vec{a}_2 + \ldots + y_r^{(j)}\vec{a}_r + \vec{a}_j = \vec{0}. \qquad (16)$$

Розв'язками цього рівняння є вектори

$$\begin{aligned} \vec{y}_1 &= \left(y_1^{(r+1)}, y_2^{(r+1)}, \ldots, y_r^{(r+1)}, 1, 0, 0, \ldots, 0\right), \\ \vec{y}_2 &= \left(y_1^{(r+2)}, y_2^{(r+2)}, \ldots, y_r^{(r+2)}, 0, 1, 0, \ldots, 0\right), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vec{y}_{n-r} &= \left(y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \ldots, y_r^{(n)}, 0, 0, 0, \ldots, 1\right), \end{aligned} \qquad (17)$$

при цьому число координат у векторів $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_{n-r}$ дорівнює n.

Доведемо, що вектори $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_{n-r}$ лінійно незалежні. Дійсно, якщо рівність

$$\lambda_1\vec{y}_1 + \lambda_2\vec{y}_2 + \lambda_3\vec{y}_3 + \ldots + \lambda_{n-r}\vec{y}_{n-r} = \vec{0} \qquad (18)$$

записати в скалярній формі (див. §11), використавши (17), то вона виконується лише за умови

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_{n-r} = 0.$$

Доведемо, що будь-який розв'язок однорідної системи (14) $\vec{x}_1 = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq \vec{0}$, є лінійною комбінацією векторів $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_{n-r}$, тобто

$$\vec{x} = x_{r+1}\vec{y}_1 + x_{r+2}\vec{y}_2 + \ldots + x_n\vec{y}_{n-r} . \qquad (19)$$

Припустимо, що рівність (19) не виконується, тобто

$$\vec{x} - x_{r+1}\vec{y}_1 - x_{r+2}\vec{y}_2 - \ldots - x_n\vec{y}_{n-r} = \vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n).$$

Знайдемо координати вектора $\vec{u}$, використовуючи (17):

$$\begin{aligned} u_1 &= x_1 - x_{r+1}y_1^{(r+1)} - x_{r+2}y_1^{(r+2)} - \ldots - x_n y_1^{(n)}, \\ u_2 &= x_2 - x_{r+1}y_2^{(r+1)} - x_{r+2}y_2^{(r+2)} - \ldots - x_n y_2^{(n)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_r &= x_r - x_{r+1}y_r^{(r+1)} - x_{r+2}y_r^{(r+2)} - \ldots - x_n y_r^{(n)}, \\ u_{r+1} &= x_{r+1} - x_{r+1}\cdot 1 - x_{r+2}\cdot 0 - \ldots - x_n\cdot 0 = 0, \\ u_{r+2} &= x_{r+2} - x_{r+1}\cdot 0 - x_{r+2}\cdot 1 - \ldots - x_n\cdot 0 = 0, \\ u_{r+3} &= 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n &= 0. \end{aligned}$$

Оскільки вектори $\vec{x}$ і $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_{n-r}$ є розв'язками системи (14), то і вектор $\vec{u}$ є розв'язком цієї системи:

$$u_1\vec{a}_1 + u_2\vec{a}_2 + ... + u_r\vec{a}_r + u_{r+1}\vec{a}_{r+1} + ... + u_n\vec{a}_n = \vec{0}.$$

Через те що $u_{r+1} = u_{r+2} = ... = u_n = 0$, останні *n-r* доданків дорівнюють нулю. Тоді

$$u_1\vec{a}_1 + u_2\vec{a}_2 + ... + u_r\vec{a}_r = \vec{0}.$$

Оскільки вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_r$ лінійно незалежні, остання рівність можлива лише при

$$u_1 = 0, u_2 = 0, ..., u_r = 0,$$

тобто $\vec{u} = \vec{0}$ і (19) доведено.

Таким чином, вектори $\vec{y}_1, \vec{y}_2, ..., \vec{y}_{n-r}$ утворюють базис підпростору розмірності *n-r*.

Сукупність розв'язків системи (14) утворює підпростір розмірності *n-r*. Число рівнянь *m* збігається з розмірністю підпростору, в якому задано вектори (див. §1). У цьому просторі максимальне число лінійно незалежних векторів може бути не більше *m*, ранг $r \le m$, а число невідомих *n*. Тобто система (14) має нетривіальний розв'язок, якщо число невідомих більше числа рівнянь: $n - m > 0$. Якщо ж число рівнянь *m* збігається з рангом матриці і дорівнює числу невідомих, то однорідна система має єдиний тривіальний (нульовий) розв'язок. Те саме спостерігаємо, коли в однорідній системі число рівнянь буде більше числа невідомих. Розв'язки (17) називаються **загальними розв'язками однорідної системи.** Сукупність лінійно незалежних розв'язків системи (14) $\vec{y}_1, \vec{y}_2, ..., \vec{y}_{n-r}$ називається **фундаментальною системою розв'язків.** Змінні $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$ називаються **вільними**, $x_1, x_2, ..., x_r$ — **базисними.**

П р и к л а д. Нехай дано однорідну систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 4x_3 - 9x_4 = 0, \end{cases}$$

в якій чотири невідомих і три рівняння. Якщо ввести вектори

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -9 \end{pmatrix},$$

то систему можна записати у вигляді

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 + x_4\vec{a}_4 = \vec{0}.$$

Виключимо з другого і третього рівнянь x_1. Для цього помножимо перше рівняння на λ і додамо до другого:

$$(2+\lambda)x_1+(3-2\lambda)x_2+(-2+3\lambda)x_3-(1+4\lambda)x_4=0.$$

Поклавши $\lambda=-2$, дістанемо

$$7x_2-8x_3+7x_4=0.$$

Аналогічно помножимо перше рівняння на λ і додамо його до третього:

$$(4+\lambda)x_1-(1+2\lambda)x_2+(4+3\lambda)x_3-(9+4\lambda)x_4=0.$$

Поклавши $\lambda=-4$, дістанемо

$$7x_2-8x_3+7x_4=0.$$

Таким чином, маємо систему

$$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=0, \\ \qquad 7x_2-8x_3+7x_4=0, \\ \qquad 7x_2-8x_3+7x_4=0. \end{cases}$$

Відкинувши третє рівняння, яке збігається з другим, дістанемо систему двох рівнянь.

З другого рівняння знаходимо x_2, а з першого – x_1:

$$\begin{cases} x_2=\dfrac{8}{7}x_3-x_4, \\ x_1=-\dfrac{5}{7}x_3+2x_4. \end{cases} \tag{20}$$

Вільними змінними тут є x_3 і x_4, а базисними — x_1 і x_2.

Поклавши у (20) $x_3=1,\ x_4=0$, дістанемо вектор

$$\vec{y}_1=\left(-\frac{5}{7},\frac{8}{7},1,0\right),$$

а при $x_3=0$, $x_4=1$ дістанемо вектор

$$\vec{y}_2=(2,-1,0,1).$$

Вектори $\vec{y}_1$ і $\vec{y}_2$ лінійно незалежні. Тоді загальний розв'язок даної системи рівнянь можна записати у вигляді

$$\vec{x}=x_3\vec{y}_1+x_4\vec{y}_2. \tag{21}$$

Як випливає з (19) і (21), ці розв'язки складають лінійний підпростір розмірності *n-r*. У даному прикладі розмірність підпростору, який описано однорідною системою, дорівнює 2. Вектори $\vec{y}_1$ і $\vec{y}_2$ являють собою базис цього підпростору. Справедливо і обернене: *кожний лінійний підпростір можна подати як сукупність розв'язків відповідно підібраної системи лінійних рівнянь.*

У зв'язку з цим виникає ряд задач, пов'язаних з можливістю описання лінійною системою підпросторів. Одним із способів визначення розмірності підпросторів, що описані системою лінійних рівнянь, є метод Гаусса, який було використано у попередньому прикладі. Цей метод дає змогу визначити зразу число вільних змінних.

Число вільних змінних дорівнює розмірності підпростору, який задано системою лінійних рівнянь. Ранг матриці, що задає однорідну систему, дорівнює різниці між числом невідомих і числом вільних змінних.

На закінчення сформулюємо теорему про однорідні системи.

Теорема. *Однорідна система, у якої однакове число невідомих і рівнянь, тільки тоді має ненульовий розв'язок, коли визначник системи дорівнює нулю. Якщо визначник цієї системи відмінний від нуля, то система має тільки нульовий (тривіальний) розв'язок.*

Д о в е д е н н я. Нехай дано систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0, \end{cases}$$

Однорідна система має ненульовий розв'язок, якщо число рівнянь (невідомих) більше за ранг матриці, тобто більше за порядок r базисного мінору ($n > r$), а це означає, що всі мінори $r+1, r+2, \ldots, n$ дорівнюють нулю. Це і є доведенням теореми.

Зазначимо, що у цьому разі серед рівнянь є такі, які являються наслідком інших (як у наведеному вище прикладі). У зв'язку з цим вводять поняття про **незалежні рівняння**.

Означення. Два рівняння називаються **незалежними**, якщо внаслідок лінійних операцій над рівняннями (додавання і множення на число) жодне з них не можна привести до іншого.

Якщо в системі немає рівнянь, які являють собою лінійну комбінацію інших рівнянь цієї системи, то кажуть, що система складається з незалежних рівнянь. Число рівнянь при цьому збігається з рангом матриці. Метод Гаусса зручний тому, що при поданні системи у певній формі (див. (12), (13)) число рівнянь після відкидання тих, які повторюються, дорівнює рангу матриці.

Якщо внаслідок додавання якого-небудь рівняння до інших, помножених на деякі .числа, дістають рівняння виду

$$0 = b, \text{ де } b \neq 0,$$

то це означає, що система несумісна.

Приклад. Знайти базис і розмірність простору, який утворюється сукупністю розв'язків однорідної системи

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 7x_4 = 0. \end{cases} \qquad (22)$$

Розв'язання.

Третє рівняння заданої системи є наслідком першого і другого, тому його можна відкинути. Систему (22) можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases} \qquad (23)$$

Ранг заданої системи $r = 2$. Дійсно, мінор другого порядку

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

а всі мінори третього порядку, що обводять цей мінор, дорівнюють нулю.

Маємо чотири невідомих, $n = 4$. Сукупність розв'язків системи (22) утворює підпростір розмірності $n - r = 4 - 2 = 2$. Вільних змінних у системі дві, базисних невідомих теж дві.

Для визначення базису приймемо в системі (23) як вільні змінні x_3 і x_4, дістанемо:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = x_3 - 4x_4, \\ 2x_1 + 4x_2 = x_3 - 3x_4. \end{cases} \qquad (24)$$

Нехай вільні змінні x_3 і x_4 набувають почергово значень 1,0 і 0,1, дістанемо:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 = 3, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x_1 + 3x_2 = -4, \\ 2x_1 + 4x_2 = -3. \end{cases}$$

Розв'язки відповідно першої і другої систем:

$$x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2}; x_1 = \frac{7}{2}, x_2 = -\frac{5}{2}.$$

Вектори $\vec{y}_1 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right)$ і $\vec{y}_2 = \left(\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}, 0, 1\right)$ - лінійно незалежні. Дійсно, доведемо, що векторне рівняння

$$\lambda_1 \vec{y}_1 + \lambda_2 \vec{y}_2 = \vec{0} \qquad (25)$$

має єдиний розв'язок $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$.

Запишемо рівняння (25) у вигляді

$$\begin{cases} \lambda_1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \lambda_2 \cdot \frac{7}{2} = 0, \\ \lambda_1 \cdot \frac{1}{2} + \lambda_2 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) = 0, \\ \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 0 = 0, \\ \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 1 = 0. \end{cases} \tag{26}$$

Система (26) має єдиний роз'язок

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0.$$

Відповідь. Сукупність розв'язків утворює підпростір розмірності 2, а базис утворюють вектори

$$\vec{y}_1 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right) \text{ і } \vec{y}_2 = \left(\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}, 0, 1\right).$$

§4. Неоднорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь. Загальний і частинний розв'язки

Нехай задано неоднорідну систему рівнянь, яку у векторній формі можна подати у вигляді

$$\vec{a}_1 x_1 + \vec{a}_2 x_2 + \ldots + \vec{a}_n x_n = \vec{b}\,. \tag{27}$$

Розглянемо відповідну однорідну систему

$$y_1 \vec{a}_1 + y_2 \vec{a}_2 + \ldots + y_n \vec{a}_n = \vec{0}. \tag{28}$$

Нехай вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ є розв'язком неоднорідної системи (27), а вектор $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ є розв'язком однорідної системи (28). Тоді, додавши систему (27) до (28), дістанемо систему

$$(x_1 + y_1)\vec{a}_1 + (x_2 + y_2)\vec{a}_2 + \ldots + (x_n + y_n)\vec{a}_n = \vec{b}$$

таку, що $\vec{x} + \vec{y}$ також є розв'язком неоднорідної системи. Неважко помітити, що коли вектор $\vec{z}$ є розв'язком системи (27), тоді вектор $\vec{z} - \vec{x} = \vec{y}$ є розв'язком системи (28).

Таким чином, вектор $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$ має такий зміст: якщо $\vec{x}$ — частинний розв'язок системи (27), а $\vec{y}$ — будь-який розв'язок системи (28), то $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$ є розв'язком системи (27). Тоді, використавши формулу (19), матимемо

$$\vec{y} = c_1 \vec{y}_1 + c_2 \vec{y}_2 + \ldots + c_{n-r} \vec{y}_{n-r},$$

а тому

$$\bar{z} = \bar{x} + c_1 \bar{y}_1 + c_2 \bar{y}_2 + \ldots + c_{n-r} \bar{y}_{n-r}, \tag{29}$$

тобто якщо $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_{n-r}$ є системою лінійно незалежних векторів-розв'язків однорідної системи, то розв'язком неоднорідної системи є сукупність її частинного і загального розв'язків однорідної системи.

Розв'язок (29) називається **загальним розв'язком неоднорідної системи рівнянь.**

Неоднорідна система рівнянь має єдиний розв'язок, якщо система сумісна і ранг основної матриці збігається з кількістю рівнянь і кількістю невідомих системи: $m = n = r$. При цьому маємо на увазі, що усі рівняння системи незалежні. З умови сумісності випливає, що ранг розширеної матриці дорівнює рангу основної, але ранг дорівнює найвищому порядку мінору, відмінного від нуля, у даному разі *n*. Таким чином, визначник основної матриці має бути відмінним від нуля. Якщо ж визначник основної матриці системи дорівнює нулю то система має або нескінченну множину розв'язків, або несумісна (не має розв'язків).

Якщо система (27) сумісна, то вона або розв'язувана при будь-якому векторі $\vec{b}$, або відповідне однорідне рівняння (28) має нескінченну множину розв'язків. Це припущення називається **альтернативою Фредгольма.**

Правило Крамера. Розглянемо окремий випадок системи (27), коли кількість рівнянь збігається з кількістю невідомих, при цьому всі рівняння незалежні. *Система n рівнянь з n невідомими, якщо детермінант основної матриці не дорівнює нулю, має один і тільки один розв'язок*

$$x_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta},\ i = 1,2,\ldots,n, \tag{30}$$

де Δ *— визначник основної матриці;* Δx_i *— визначник, утворений із визначника* Δ *заміною коефіцієнтів невідомого* x_i *вільними членами системи* b_i.

§5. Обернена матриця

Означення. Матрицею A^{-1}, **оберненою до квадратної матриці** *A* розміру $n \times n$, називається така, для якої справедлива рівність

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E. \tag{31}$$

Наприклад, легко перевірити рівність

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, одна із перемножуваних матриць є оберненою відносно іншої.

Означення. Матриця, визначник якої не дорівнює нулю, називається **невиродженою**.

Для того щоб дана матриця мала обернену, необхідно і достатньо, щоб вона була невиродженою.

Щоб знайти матрицю, обернену до даної, треба:

а) знайти визначник даної матриці; якщо він, не дорівнює нулю, то дана матриця має обернену;

б) скласти матрицю з алгебраїчних доповнень елементів даної матриці;

в) транспонувати матрицю з алгебраїчних доповнень;

г) кожний елемент транспонованої матриці поділити на визначник даної матриці.

Властивості невироджених матриць.

1°. $\det A^{-1} \cdot \det A = 1$.

2°. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

3°. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

4°. $\left(A^{n}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{n}$.

Означення. Якщо визначник матриці дорівнює нулю, то вона називається **виродженою** або **особливою.**

Приклад. Знайти матрицю, обернену до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 10 \\ 15 & 6 & 20 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Знаходимо визначник даної матриці

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 10 \\ 15 & 6 & 20 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

тобто дана матриця має обернену.

Обчислюємо алгебраїчні доповнення елементів даної матриці:

$$A_{11} = 0, \quad A_{12} = 10, \quad A_{13} = -3,$$
$$A_{21} = -2, \quad A_{22} = -5, \quad A_{23} = 3,$$
$$A_{31} = 1, \quad A_{32} = 1, \quad A_{33} = -1.$$

Складаємо матрицю з алгебраїчних доповнень:

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 10 & -3 \\ -2 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Транспонуємо матрицю

$$\left(A^*\right)^T = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 10 & -5 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Поділивши кожний елемент транспонованої матриці на визначник даної матриї $\Delta = 1$, дістанемо обернену матрицю

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 10 & -5 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 10 & -5 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

§6. Матричний спосіб розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Запишемо систему *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{32}$$

у матричній формі

$$AX = B, \tag{33}$$

де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \; a_{12} \; \ldots \; a_{1n} \\ a_{21} \; a_{22} \; \ldots \; a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \; a_{n2} \quad a_{nn} \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Припустимо, що матриця *A* невироджена, тоді система (32) називається **невиродженою**, у протилежному разі — **виродженою**, причому визначник $\Delta = |A| \neq 0$ і матриця *A* має обернену матрицю A^{-1}, яка єдина.

Помножимо обидві частини рівняння (33) на A^{-1} зліва:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

Оскільки $A^{-1}A = E$ і $EX = X$, то

$$X = A^{-1}B. \tag{34}$$

Рівність (34) можна записати у вигляді

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix},$$

або, перемноживши A^{-1} і B, дістанемо

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \ldots + A_{n2}b_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n \end{pmatrix},$$

звідки

$$x_k = \frac{1}{\Delta}\left(A_{1k}b_1 + A_{2k}b_2 + \ldots + A_{nk}b_n\right),$$

де $k = 1, 2, \ldots, n$, а $A_{1k}b_1 + A_{2k}b_2 + \ldots + A_{nk}b_n = \Delta x_k$. Тоді $x_k = \frac{\Delta x_k}{\Delta}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Тим самим доведено правило Крамера.

Матричний метод розв'язання системи (32) не простіший, ніж метод, розглянутий раніше, але дає змогу зручно і компактно записати розв'язок.

П р и к л а д. Розв'язати матричним способом систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y + 3z = -5, \\ 2x - 3y + z = 0, \\ 3x + 2y - z = 5. \end{cases}$$

Розв'язання. Утворюємо матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$

тоді система набере вигляду

$$AX = B.$$

Обчислюємо визначник матриці A:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 45 \neq 0,$$

тобто існує обернена матриця

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{45} & \frac{7}{45} & \frac{2}{9} \\ \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{13}{45} & \frac{1}{45} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

Запишемо розв'язок системи в матричній формі:

$$X = A^{-1}B, \text{ або } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{45} & \frac{7}{45} & \frac{2}{9} \\ \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{13}{45} & \frac{1}{45} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Перемножимо матриці:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{45} \cdot (-5) + \frac{7}{45} \cdot 0 + \frac{2}{9} \cdot 5 \\ \frac{1}{9} \cdot (-5) + \left(-\frac{2}{9}\right) \cdot 0 + \frac{1}{9} \cdot 5 \\ \frac{13}{45} \cdot (-5) + \frac{1}{45} \cdot 0 + \left(-\frac{1}{9}\right) \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Відповідь. $x = 1, y = 0, z = -2$.

Розділ IV. ЛІНІЙНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

§1. Перетворення (оператори, відображення)

Нехай дано дві множини Q і Q_1 елементів різного походження. **Означення**. **Перетворенням (оператором, відображенням)** називають закон, що дає змогу за заданим елементом x множини Q знайти елемент у множини Q_1.

Перетворення позначають буквою A і записують

$$y = \mathsf{A}x \in Q_1 \text{ при } x \in Q.$$

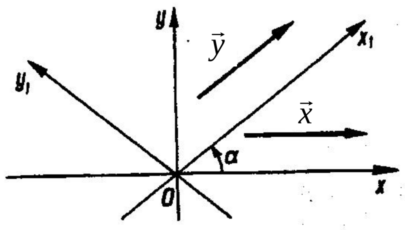


Рис. 35

Якщо множини Q і Q_1 збігаються, то говорять про **перетворення множини самої в себе**. У цьому разі перетворенням називають закон, що дає змогу за заданим елементом x множини Q знайти елемент y, який належить тій самій множині, і записують

$$y = \mathsf{A}x \in Q_1 \text{ при } x \in Q.$$

Далі розглядатимемо перетворення множини самої в себе. Крім того, під x і y будемо розуміти вектори з евклідового простору.

П р и к л а д и.

1. Нехай у площині xOy лежить вектор $\vec{x}$ (рис. 35). Повернемо площину xOy на кут α навколо точки O, зберігаючи положення площини у просторі. Тоді вектор $\vec{x}$ перейде в новий вектор $\vec{y}$, який належить площині:

$$\vec{y} = \mathsf{A}\vec{x}.$$

Тут перетворення A — це поворот площини на кут α. Перетворення A називається **перетворенням обертання**.

2. Нехай перетворення A кожному вектору $\vec{x}$ ставить у відповідність той самий вектор $\vec{x}$, тобто $\vec{x} = \mathsf{A}\,\vec{x}$. Таке перетворення називається **тотожним** або **одиничним** і позначається буквою E:

$$\vec{x} = E\vec{x}.$$

3. Нехай A перетворює вектор $\vec{x}$ у вектор $\vec{y} = k\vec{x}$, тобто

$$\vec{y} = \mathsf{A}\vec{x} = k\vec{x}.$$

Таке перетворення називається **перетворенням подібності**.

4. Нехай перетворення A кожному вектору $\vec{x}$ ставить у відповідність нуль-вектор $\vec{0}$:

$$\mathsf{A}\,\vec{x} = \vec{0}.$$

Таке перетворення називається **нульовим** і позначається

$$0 \cdot \vec{x} = \vec{0}.$$

5. Нехай задано n-вимірний афінний простір, елементами якого є точки. Нехай перетворення A кожній точці M цього простору ставить у відповідність число U:

$$U = \mathsf{A}M .$$

Таке перетворення називається **функцією** і позначається, наприклад, буквою f:

$$U = f(M).$$

Множина усіх точок M, які розглядаються при цьому перетворенні, називається **областю визначення функції** f, а множина усіх чисел U — **областю значень даної функції**.

6. Нехай перетворення A — це проектування векторів, які виходять з однієї точки простору, на площину, яка проходить через ту саму точку. Як відомо, проекцією вектора $\vec{x}$ на площину є вектор $\vec{y}$:

$$\vec{y} = \mathsf{A}\ \vec{x} .$$

Тут перетворення A називається **перетворенням проектування**.

§2. Лінійні перетворення і їхній зв'язок з матрицями

Означення. Перетворення A називається **лінійним**, якщо для будь-яких векторів $\vec{x}$ і $\vec{y}$, що належать лінійному простору, виконуються умови:

1) $\mathsf{A}\left(\vec{x} + \vec{y}\right) = \mathsf{A}\vec{x} + \mathsf{A}\vec{y}$.

2) $\mathsf{A}\left(\lambda\vec{x}\right) = \lambda\left(\mathsf{A}\vec{x}\right)$.

Обертання, подібність, тотожне і нульове перетворення, перетворення проектування — це лінійні перетворення.

Лінійне перетворення переводить лінійну комбінацію одних векторів у лінійну комбінацію інших векторів.

Справді, нехай дано n векторів: $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ і перетворення A. Застосовуючи послідовно умови 1) і 2), дістаємо

$$\mathsf{A}\left(\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + ... + \lambda_n\vec{a}_n\right) = \lambda_1\mathsf{A}\vec{a}_1 + \lambda_2\mathsf{A}\vec{a}_2 + ... + \lambda_n\mathsf{A}\vec{a}_n .$$

Візьмемо у n-вимірному просторі базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$. Нехай дано перетворення A, яке переводить $\vec{e}_1$ в $\mathsf{A}\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ в $\mathsf{A}\vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ в $\mathsf{A}\vec{e}_n$. Кожний вектор $\mathsf{A}\vec{e}_i$, де $i = 1,2,...,n$, можна виразити через базис:

$$\mathsf{A}\vec{e}_i = a_{1i}\vec{e}_1 + a_{2i}\vec{e}_2 + ... + a_{ni}\vec{e}_n . \qquad (1)$$

Матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

що складається з координат векторів $\mathsf{A}\vec{e}_i$, називається **матрицею лінійного перетворення у базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$.**

Покажемо, що заданням матриці A цілком визначається перетворення A.

Візьмемо деякий вектор

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathsf{A}\vec{e}_i \qquad (3)$$

і знайдемо вектор $\vec{y} = \mathsf{A}\vec{x}$, припускаючи, що матриця A відома. Маємо

$$\vec{y} = \mathsf{A} \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathsf{A}\vec{e}_i .$$

Враховуючи рівність (1), дістанемо

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^{n} \left[(x_i a_{1i})\vec{e}_1 + (x_i a_{2i})\vec{e}_2 + \dots + (x_i a_{ni})\vec{e}_1 \right] =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i a_{1i} \right)\vec{e}_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i a_{2i} \right)\vec{e}_2 + \dots + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ni} \right)\vec{e}_n .$$

Якщо координати вектора $\vec{y}$ у базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n$ позначити через $y_1, y_2, \dots, y_n$ і записати $\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \dots + y_n\vec{e}_n$, то, порівнюючи цей вираз з попередньою рівністю, дістанемо

$$\begin{aligned} y_1 &= \sum_{i=1}^{n} x_i a_{1i} = x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \dots + x_n a_{1n}, \\ y_2 &= \sum_{i=1}^{n} x_i a_{2i} = x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \dots + x_n a_{2n}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n &= \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ni} = x_1 a_{n1} + x_2 a_{n2} + \dots + x_n a_{nn}. \end{aligned} \qquad (4)$$

Таким чином, знайдено координати вектора $\vec{y}$. Кожному перетворенню A у базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n$ відповідає єдина матриця A і, навпаки, кожній матриці A відповідає єдине перетворення A векторів у базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n$.

Лінійне перетворення A векторів

$$\vec{y} = \mathsf{A}\vec{x} \qquad (5)$$

можна записати у матричній формі. Якщо ввести матриці координат векторів $\vec{y}$, $\vec{x}$

$$Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad (6)$$

то, згідно з системою (4),

$$Y = AX.$$

Нехай тепер перетворення A задане своєю матрицею A, визначник якої відмінний від нуля. Тоді існує єдина обернена матриця A^{-1}.

Припустимо, що перетворення A переводить вектор $\vec{x}$ у вектор $\vec{x}_1$, тобто

$$\vec{x}_1 = \mathsf{A}\vec{x},$$

або у матричній формі

$$X_1 = AX. \qquad (8)$$

Помноживши цю рівність на A^{-1} зліва, дістанемо

$$A^{-1}X_1 = A^{-1}AX.$$

Враховуючи, що $A^{-1}A = E$, знаходимо

$$X = A^{-1}X_1, \qquad (9)$$

або у векторній формі

$$\vec{x} = \mathsf{A}^{-1}\vec{x}_1. \qquad (10)$$

Нехай тепер дано перетворення A і B, задані своїми матрицями A і B так, що

$$\vec{x}_1 = \mathsf{A}\,\vec{x}, \qquad (11)$$

$$\vec{x}_2 = \mathsf{B}\,\vec{x}_1. \qquad (12)$$

Знайдемо перетворення, які виражають $\vec{x}_2$ через $\vec{x}$. Замінивши у перетворенні (12) $\vec{x}_1$ через $\mathsf{A}\,\vec{x}$, матимемо

$$\vec{x}_2 = \mathsf{B}(\mathsf{A}\,\vec{x}) = \mathsf{BA}\,\vec{x}. \qquad (13)$$

Таким чином, $\vec{x}$ переводиться в $\vec{x}_2$ перетворенням B, що має матрицю, яка дорівнює добутку матриць перетворень B і A:

$$C = B\,A.$$

Використовуючи (13) і (10), можна знайти обернене перетворення, яке переводить $\vec{x}_2$ у $\vec{x}$. Якщо визначник $|BA| \neq 0$, то існує обернена матриця $(BA)^{-1}$, тоді

$$X = (BA)^{-1}X_2,\ \text{або}\ \vec{x} = (\mathsf{BA})^{-1}\vec{x}_2. \qquad (14)$$

§3. Матриця переходу від одного базису до іншого

Нехай у n-вимірному просторі задано два базиси:

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n \text{ і } \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \ldots, \vec{e}'_n .$$

Виразимо вектори $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \ldots, \vec{e}'_n$ через вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, які утворюють перший базис. Маємо

$$\vec{e}'_i = \alpha_{i1}\vec{e}_1 + \alpha_{i2}\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_{in}\vec{e}_n ,$$

де $i = 1, 2, \ldots, n$.

Координати векторів $\vec{e}'_i$ у базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ можна записати у вигляді матриці

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (15)$$

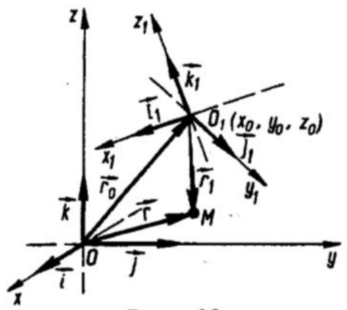


Рис. 36

Ця матриця називається **матрицею переходу** від одного базису до іншого. Введемо величини

$$\Pi = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \ldots \\ \vec{e}_n \end{bmatrix} \text{ і } \Pi' = \begin{bmatrix} \vec{e}'_1 \\ \vec{e}'_2 \\ \ldots \\ \vec{e}'_n \end{bmatrix},$$

тоді

$$\Pi' = L\Pi . \qquad (16)$$

Матриця переходу (перетворення) L має визначник, відмінний від нуля, оскільки у протилежному разі вектори $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \ldots, \vec{e}'_n$ будуть лінійно залежними. Помноживши рівність (16) на L^{-1} зліва, дістанемо

$$\Pi = L^{-1}\Pi' . \qquad (17)$$

Запишемо матрицю L для тривимірного простору. Виберемо за перший базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, а за другий базис $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ (рис. 36). Тоді

$$\begin{aligned} \vec{i}_1 &= l_1\vec{i} + m_1\vec{j} + n_1\vec{k}, \\ \vec{j}_1 &= l_2\vec{i} + m_2\vec{j} + n_2\vec{k}, \\ \vec{k}_1 &= l_3\vec{i} + m_3\vec{j} + n_3\vec{k}, \end{aligned} \qquad (18)$$

Якщо перший рядок помножимо послідовно на $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то дістанемо

$$l_1 = np_x\vec{i}_1 = \cos\left(x,\hat{\vec{i}_1}\right),$$

$$m_1 = np_y\vec{i}_1 = \cos\left(y,\hat{\vec{i}_1}\right),$$

$$n_1 = np_z\vec{i}_1 = \cos\left(z,\hat{\vec{i}_1}\right).$$

Після аналогічних дій над другим і третім рядками рівностей (18) знаходимо

$$l_2 = np_x\vec{j}_1 = \cos\left(x,\hat{\vec{j}_1}\right),$$

$$m_2 = np_y\vec{j}_1 = \cos\left(y,\hat{\vec{j}_1}\right),$$

$$n_2 = np_z\vec{j}_1 = \cos\left(z,\hat{\vec{j}_1}\right).$$

та

$$l_3 = np_x\vec{k}_1 = \cos\left(x,\hat{\vec{k}_1}\right),$$

$$m_3 = np_y\vec{k}_1 = \cos\left(y,\hat{\vec{k}_1}\right),$$

$$n_3 = np_z\vec{k}_1 = \cos\left(z,\hat{\vec{k}_1}\right).$$

При цьому матриця переходу

$$L = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{pmatrix}, \qquad (19)$$

а матриця оберненого переходу

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix}. \qquad (20)$$

Тоді

$$\Pi' = L\Pi \text{ і } \Pi = L^{-1}\Pi'. \qquad (21)$$

Зазначимо, що

$$\begin{aligned} l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 &= 1, \\ l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 &= 1, \\ l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 &= 1. \end{aligned} \qquad (22)$$

і

$$\begin{aligned} l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 &= 0, \\ l_1 l_3 + m_1 m_3 + n_1 n_3 &= 0, \\ l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 &= 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Порівнюючи (19) і (20), переконуємось, що $L^{-1} = L^T$.

Означення. Квадратна матриця *A*, для якої $A^{-1} = A^T$ називається **ортогональною.**

Матриці *L* і L^{-1} ортогональні. Для ортогональних матриць

$$\det\left(AA^T\right) = (\det A)\left(\det A^T\right) = (\det A)^2 = 1.$$

Зауваження. Величина Π' визначається трьома векторами $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$, або *L*-матрицею, тобто дев'ятьма числами. Величина Π' відрізняється від звичайного вільного вектора хоча б тим, що останній визначається лише трійкою чисел. Величина Π' називається **афінним ортогональним тензором другого рангу** або **афінором.**

Повернемось тепер до матриці переходу *L*. Елементи цієї матриці мають задовольняти умови (22) і (23), тобто із дев'яти величин, які складають елементи матриці *L*, тільки три будь-які можна вибирати довільно. Решта шість визначаються з умов (22) і (23). Три довільно вибрані елементи матриці *L* називаються **незалежними**, а решта — **залежними.**

Якщо за базис вважати три будь-яких некомпланарних вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2$, з $\vec{a}_3$, то позначаючи проекції цих векторів на координатні осі через $\vec{a}_1 = (a_{11}; a_{12}; a_{13})$, $\vec{a}_2 = (a_{21}; a_{22}; a_{23})$, $\vec{a}_3 = (a_{31}; a_{32}; a_{33})$, і враховуючи рівності (18), маємо

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= a_{11}\vec{i} + a_{12}\vec{j} + a_{13}\vec{k}, \\ \vec{a}_2 &= a_{21}\vec{i} + a_{22}\vec{j} + a_{23}\vec{k}, \\ \vec{a}_3 &= a_{31}\vec{i} + a_{32}\vec{j} + a_{33}\vec{k}. \end{aligned} \tag{24}$$

Тепер матриця переходу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

має елементи, для яких не виконуються умови (22) і (23).

§4. Перетворення координат. Паралельне перенесення і поворот (у просторах) системи координат

Задача перетворення координат полягає ось у чому. Нехай дано дві системи координат: $Oxyz$ і $O_1x_1y_1z_1$, а також координати точки *M* або вектора в одній системі через їхні координати в іншій системі (рис.36).

Розглянемо декілька випадків.

Якщо напрями осей обох систем координат збігаються, то говорять про **паралельне перенесення системи координат** (рис. 37).

Початок нової системи координат $O_1x_1y_1z_1$ перенесено у точку O_1, радіус-вектор якої у старій системі координат $Oxyz$

$$\overrightarrow{OO_1} = \overrightarrow{r_0}\,.$$

Якщо початки нової системи координат O_1 і старої O збігаються, тобто $\overrightarrow{r_0} = 0$, а осі нової системи повернуто відносно старої, то говорять про **поворот системи координат** (рис. 38).

Коли напрям осей змінюється і здійснюється перенесення початку координат $\vec{r}_0 \neq 0$, то йдеться про **загальний випадок** або **спільний поворот і перенесення системи координат** (рис. 36).

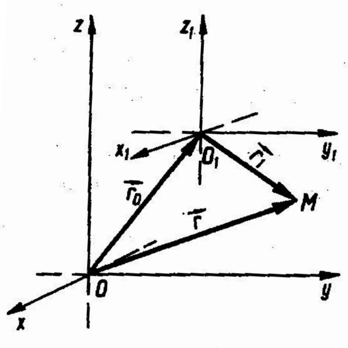


Рис. 37

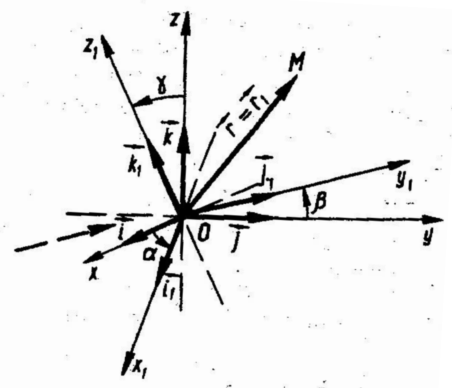


Рис. 38

I. ***Паралельне перенесення системи координат.*** Нехай положення точки M у системі $Oxyz$ визначається її радіусом-вектором $\vec{r} = (x, y, z)$, а у системі $O_1x_1y_1z_1$ — радіусом-вектором $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$. Положення нового початку координат (точки O_1) визначається радіусом-вектором $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

Тоді з векторного трикутника OO_1M (рис. 37) маємо

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}_1, \qquad (25)$$

тобто радіус-вектор точки у старій системі координат дорівнює сумі радіуса-вектора цієї точки у новій системі координат і радіуса-вектора початку нової системи координат.

Вираз (25) у координатній формі можна записати у вигляді

$$x = x_0 + x_1;\ y = y_0 + y_1;\ z = z_0 + z_1. \qquad (26)$$

У формулах (25) і (26) вважаються відомими

$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0) \text{ і } \vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1),$$

тобто відомі координати точки у новій системі координат, а відшукуються координати точки у старій системі.

Природнішою є обернена задача: коли відомі $\vec{r}_0$ і $\vec{r}$, а треба знайти $\vec{r}_1$. Тоді із рівності (25) знаходимо

$$\vec{r}_1 = \vec{r} - \vec{r}_0$$

і відповідно

$$x_1 = x - x_0;\ y_1 = y - y_0;\ z_1 = z - z_0. \qquad (27)$$

При паралельному перенесенні $\vec{i}_1 = \vec{i}$, $\vec{j}_1 = \vec{j}$, $\vec{k}_1 = \vec{k}$, тоді

$$l_1 = 1,\ m_1 = 0,\ n_1 = 0,$$
$$l_2 = 0,\ m_2 = 1,\ n_2 = 0,$$
$$l_3 = 0,\ m_3 = 0,\ n_3 = 1.$$

і L-матриця набирає вигляду

$$L = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

тобто є одиничною.

II. ***Поворот системи координат.*** Нехай положення точки M у обох системах координат визначається одним і тим самим вектором $\vec{r} = \vec{r}_1$ (рис. 38), який через базис системи можна записати

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \qquad \vec{r}_1 = x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1, \qquad (28)$$

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1. \qquad (29)$$

Замінюючи тут $\bar{i}_1, \bar{j}_1, \bar{k}_1$ за формулами (18) і групуючи, дістанемо

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x_1 l_1 + y_1 l_2 + z_1 l_3)\vec{i} +$$
$$+ (x_1 m_1 + y_1 m_2 + z_1 m_3)\vec{j} + (x_1 n_1 + y_1 n_2 + z_1 n_3)\vec{k},$$

або

$$\begin{aligned} x &= l_1 x_1 + l_2 y_1 + l_3 z_1, \\ y &= m_1 x_1 + m_2 y_1 + m_3 z_1, \\ z &= n_1 x_1 + n_2 y_1 + n_3 z_1. \end{aligned} \qquad (30)$$

Формули (30) виражають координати точки у старій системі через координати тієї самої точки у новій системі координат.

Щоб записати формули (30) у матричній формі, введемо позначення

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ L^T = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix},\ X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}. \qquad (31)$$

Тоді

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \qquad (32)$$

або

$$X = L^T X_1. \qquad (33)$$

Матриця L^T є транспонованою відносно L-матриці.

Виразимо координати x_1, y_1, z_1 через координати *x, y, z* точки *M*. Для цього помножимо (33) зліва на L-матрицю, обернену до матриці L^T :

$$LX = LL^T X_1. \qquad (34)$$

Оскільки

$$LL^T = E, \qquad (35)$$

то рівність (34) запишемо у вигляді

$$X_1 = LX. \qquad (36)$$

Записавши (36) у вигляді (32), дістанемо формули, які виражають координати точки у новій системі координат через її координати у старій системі при повороті системи координат:

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 x + m_1 y + n_1 z, \\ y_1 &= l_2 x + m_2 y + n_2 z, \\ z_1 &= l_3 x + m_3 y + n_3 z. \end{aligned} \qquad (37)$$

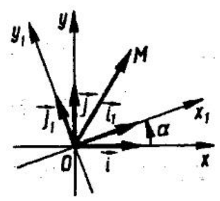


Рис. 39

III. ***Загальний випадок (поворот і паралельне перенесення системи координат).*** Внаслідок незалежності повороту і паралельного перенесення системи координат і грунтуючись на (26) і (30) маємо:

$$\begin{aligned} x &= l_1 x_1 + l_2 y_1 + l_3 z_1 + x_0, \\ y &= m_1 x_1 + m_2 y_1 + m_3 z_1 + y_0, \\ z &= n_1 x_1 + n_2 y_1 + n_3 z_1 + z_0, \end{aligned} \qquad (38)$$

а також

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 x + m_1 y + n_1 z - x_0, \\ y_1 &= l_2 x + m_2 y + n_2 z - y_0, \\ z_1 &= l_3 x + m_3 y + n_3 z - z_0. \end{aligned} \qquad (39)$$

Запишемо ці формули у матричній формі:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \tag{40}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \tag{41}$$

$$X = L^T X_1 + X_0,\ X_1 = LX - X_0. \tag{42}$$

IV. ***Поворот системи координат, розміщеної у площині*** (рис.39). Розглянемо окремий випадок — поворот системи координат Oxy. У цьому разі L-матриця (19) набирає вигляду

$$L = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{pmatrix}, \tag{43}$$

при цьому

$$l_1^2 + m_1^2 = 1,\ l_2^2 + m_2^2 = 1,\ l_1 l_2 + m_1 m_2 = 0. \tag{44}$$

Як бачимо, з чотирьох елементів матриці (43) лише один елемент є довільним. Вважатимемо таким елементом косинус кута між $\bar{i}$ та $\bar{i}_1$ і позначимо цей кут через α. Тоді

$$\begin{aligned} l_1 &= \cos\left(\widehat{\vec{i}_1, \vec{i}}\right) = \cos\alpha, \\ m_1 &= \cos\left(\widehat{\vec{i}_1, \vec{j}}\right) = \cos\left(90^\circ - \alpha\right) = \sin\alpha, \\ l_2 &= \cos\left(\widehat{\vec{j}_1, \vec{i}}\right) = \cos\left(90^\circ + \alpha\right) = -\sin\alpha, \\ m_2 &= \cos\left(\widehat{\vec{j}_1, \vec{j}}\right) = \cos\alpha. \end{aligned} \tag{45}$$

Отже, формули (30), (37) і (38) для системи координат, розміщеної у площині, наберуть вигляду

$$\begin{cases} x = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha, \\ y = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha. \end{cases} \tag{48}$$

$$\begin{cases} x_1 = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ y_1 = -x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{cases} \tag{47}$$

Якщо виконати паралельне перенесення системи координат на вектор $\bar{r}_0 = (x_0, y_0)$ і одночасно поворот на кут α, то формули перетворення координат точки M набирають вигляду

$$\begin{cases} x = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha + x_0, \\ y = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha + y_0, \end{cases} \tag{48}$$

і

$$\begin{cases} x_1 = x\cos\alpha + y\sin\alpha - x_0, \\ y_1 = -x\sin\alpha + y\cos\alpha - y_0. \end{cases} \tag{49}$$

§5. Дробово-лінійна функція і її геометричний зміст

Означення. Дробово-лінійною називається функція

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

Якщо $c = 0$ і $d \neq 0$, то дробово-лінійна функція називається **цілою лінійною функцією.** При $ad - bc = 0$ дробово-лінійна функція є сталою величиною. Доведемо, що при $c \neq 0$ і $ad - bc \neq 0$ графіком дробово-лінійної функції є **графік оберненої пропорційності**, який ще називається **рівнобічною гіперболою**.

Справді, виконавши паралельне перенесення системи координат таким чином, щоб її початок перейшов у точку $O_1(x_0, y_0)$, і вибравши координати точки O_1 так, щоб

$$x_0 = -\frac{d}{c},\ y_0 = \frac{d}{c},\ c \neq 0,$$

дістанемо рівняння гіперболи

$$x_1 y_1 = \frac{bc - ad}{c^2}.$$

Позначимо $\frac{bc-ad}{c^2} = k$, тоді $x_1 y_1 = k$, або $y_1 = \frac{k}{x_1}$.

Як відомо, це і виражає обернену пропорційну залежність між x_1 та y_1.

§6. Перетворення координат *n*-вимірного вектора при переході до нового базису

Розглянемо у *n*-вимірному, лінійному просторі два базиси: $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ і $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n$. Перший називатимемо **старим**, а другий — **новим.**

Означення. **Матрицею переходу від старого базису до нового** називається матриця системи векторів $\vec{b}_i$ у базисі $\vec{a}_i$, $i = 1,2,\ldots,n$.

Позначимо цю матрицю за аналогією з (15) через

$$T=\begin{pmatrix} t_{11}\ t_{12}\ \dots\ t_{1n} \\ t_{21}\ t_{22}\ \dots\ t_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ t_{n1}\ t_{n2}\dots\ t_{nn} \end{pmatrix}. \tag{50}$$

Тоді

$$\bar{b}_i = t_{1i}\vec{a}_1 + t_{2i}\vec{a}_2 + \ldots + t_{ni}\vec{a}_n,\ i = 1,2,\ldots,n. \tag{51}$$

Матриця T є аналогом матриці (2).

Означення. Формули, які зв'язують координати n-вимірного вектора у різних базисах, називаються **формулами перетворення координат**.

Теорема. *Якщо* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *— координати вектора* $\vec{x}$ *у базисі* $\vec{a}_i, i = 1,2,\ldots,n$, *а* $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ *— координати цього самого вектора у базисі* $\vec{b}_i, i = 1,2,\ldots,n$, *то справджується співвідношення*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \dots \\ x_n' \end{pmatrix}, \text{ або } X = TX',$$

де

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},\quad X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \dots \\ x_n' \end{pmatrix},$$

а T — матриця переходу від базису $\vec{a}_i$ до базису $\vec{b}_i$.

Д о в е д е н н я. Виразимо вектор $\vec{x}$ через базиси $\vec{a}_i$ і $\vec{b}_i$:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{a}_i,\ \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i' \vec{b}_i. \tag{52}$$

Враховуючи (51), дістанемо

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i'\left(t_{1i}\vec{a}_1 + t_{2i}\vec{a}_2 + \ldots + t_{ni}\vec{a}_n\right) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i' t_{1i}\right)\vec{a}_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i' t_{2i}\right)\vec{a}_2 + \ldots + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i' t_{ni}\right)\vec{a}_n.$$

Порівнюючи цю рівність з рівністю

$$\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n, \tag{53}$$

знаходимо

$$x_j = x_1' t_{j1} + x_2' t_{j2} + \ldots + x_n' t_{jn},\ i = 1,2,\ldots,n,$$

або у матричній формі

$$X = TX'.$$

Матриця T має обернену T^{-1}, а тому

$$X' = T^{-1}X.$$

§7. Ядро і область значень лінійного перетворення

Нехай задано множину M векторів n-вимірного простору і довільне лінійне перетворення A.

Означення. Застосувавши до вектора $\vec{a} \in \mathrm{M}$ перетворення A дістанемо вектор $\vec{b} = \mathrm{A}\vec{a}$, який називається **образом** вектора $\vec{a}$.

Вектор $\vec{b}$ може належати або не належати множині M векторів.

Означення. Сукупність векторів $\vec{b}$, які є образами усіх M векторів, називається **образом множини** M векторів відносно перетворення A.

Означення. **Областю значень перетворення** A називається сукупність усіх векторів n-вимірного простору.

Означення. Розмірність області значень перетворення A називається **рангом перетворення**.

Означення. **Ядром лінійного перетворення** називається сукупність усіх тих векторів n-вимірного простору, які перетворення A переводить у нульовий вектор.

Означення. Розмірність ядра називається **дефектом перетворення** A.

П р и к л а д. Нехай дано тривимірний простір і у ньому множину векторів, які виходять із деякої точки *O*. Виберемо систему прямокутних координат з початком у точці *O*. За перетворення A виберемо перетворення проектування векторів, які виходять із точки *O*, на площину *xOy*. Тоді ранг перетворення дорівнює 2. Ядром перетворення є множина векторів, які лежать на осі *Oz,* оскільки лише ці вектори при проектуванні на площину *xOy* дають нульовий вектор. Дефект перетворення при цьому дорівнює 1. Сума рангу і дефекту перетворення дорівнює 3 (розмірності простору). Цей факт є загальним. Справедлива **теорема:** *сума рангу і дефекту лінійного перетворення дорівнює розмірності простору.*

§8. Власні вектори і власні числа матриці лінійного перетворення

Нехай A — перетворення, задане квадратною матрицею *A* порядку *n*. Якщо існує ненульовий вектор $\vec{x}$ і таке число λ, що

$$\mathrm{A}\,\vec{x} = \lambda\vec{x}, \tag{54}$$

то говорять, що λ — **власне число матриці** ***A***, а $\vec{x}$ — **її власний**

вектор, який відповідає власному числу.

Властивості власних векторів лінійного перетворення A **.**

1°. *Кожному власному вектору відповідає одне власне число*.

Справді, нехай $\vec{x}$ — власний вектор. Припустимо, що йому відповідають два різних власних числа: λ_1 і λ_2. Внаслідок рівності (54) $\mathsf{A}\,\vec{x}=\lambda_1\vec{x}$ і $\mathsf{A}\,\vec{x}=\lambda_2\vec{x}$, або $\vec{0}=(\lambda_1-\lambda_2)\vec{x}$. Оскільки $\vec{x}\neq 0$, то $\lambda_1=\lambda_2$.

2°. *Якщо* $\vec{x}$ *— власний вектор матриці A з власним числом* λ*, то будь-який вектор* $\gamma\vec{x}$*, колінеарний вектору* $\vec{x}$*, також є власним вектором матриці A з тим самим власним числом.*

Справді,

$$A(\gamma\vec{x})=\gamma(A\vec{x})=\gamma(\lambda\vec{x})=\lambda(\gamma\vec{x}).$$

3°. *Якщо* $\vec{x}_1$ *і* $\vec{x}_2$*— власні вектори матриці A з одним і тим самим власним числом λ, то їхня сума* $\vec{x}_1+\vec{x}_2$ *також є власним вектором матриці A з тим самим власним числом.*

Із властивостей 2° і 3° випливає, що *кожному власному числу відповідає нескінченна множина (колінеарних) власних векторів*. Ця множина утворює **підпростір**.

Розв'яжемо тепер рівняння (54). Нехай, наприклад, перетворення задано матрицею

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix},$$

а вектор $\vec{x}$ подамо у вигляді матриці $X=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$:

$$\vec{x}=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=X\,.$$

Тоді рівняння (54) запишемо у вигляді

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}, \tag{55}$$

або

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = \lambda x, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = \lambda y, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = \lambda z. \end{cases} \tag{56}$$

Звідси

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \\ a_{21}x + (a_{22} - \lambda)y + a_{23}z = 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + (a_{33} - \lambda)z = 0. \end{cases} \tag{57}$$

Для того щоб ця однорідна система мала відмінні від нуля розв'язки, необхідно і достатньо, щоб

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{58}$$

Дістанемо кубічне рівняння. Корені цього рівняння не обов'язково дійсні і не обов'язково різні. У комплексному просторі всі три корені власні числа. У дійсному просторі власними числами будуть тільки дійсні корені (один або усі три).

Якщо $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — три різних дійсних корені, то, підставивши їх у систему (57), знайдемо координати трьох власних векторів:

$$\vec{x}_1 = X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_2 = X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_3 = X_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

Справедлива така теорема.

Теорема. *Якщо $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ — власні вектори матриці A відповідно з різними власними числами $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, то вектори $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ лінійно незалежні.*

Протилежне твердження у загальному випадку не справджується, оскільки існують лінійно незалежні вектори, які відповідають одному і тому самому власному числу.

Для визначення власних чисел λ матриці *A* треба знайти всі розв'язки рівняння (58). Підставляючи кожне із знайдених власних чисел λ_i у систему (57), відшукаємо її лінійно незалежні розв'язки, які і визначають координати власних векторів, відповідних λ_i.

Ці міркування можна навести і для *n*-вимірного випадку. Рівняння (54) запишемо у вигляді

$$AX = \lambda EX, \tag{59}$$

або

$$(A-\lambda E)X=0, \tag{60}$$

де

$$X=\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ і } A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Рівняння (60) — це матрична форма запису рівняння, аналогічного рівнянню (57). Тоді

$$\det|A-\lambda E|=0 \tag{61}$$

є матричною формою запису рівняння (58). Рівняння (61) називається **характеристичним.** У розгорнутій формі рівняння (61) записується у вигляді

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0. \tag{62}$$

П р и к л а д. Знайти власні числа і власні вектори симетричної матриці *A* (лінійного перетворення А), якщо

$$A=\begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}. \tag{63}$$

Знайдені власні вектори нормувати.

Для визначення власних чисел симетричної матриці (63) складемо її характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix}=0$$

Розв’язками цього рівняння є

$$\lambda_1=6, \lambda_2=9, \lambda_3=3.$$

Оскільки усі корені різні, матриця *A* має три лінійно незалежні власні вектори. Координати цих векторів визначимо із системи (57):

$$\begin{cases} (7-\lambda)x-2y+0\cdot z=0, \\ -2x+(6-\lambda)y-2z=0, \\ 0\cdot x-2y+(5-\lambda)z=0. \end{cases}$$

Підставивши сюди $\lambda_1=6$ дістанемо координати вектора

$$\vec{x}_1 = X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix},\ x_1 = -2t; y_1 = -t; z_1 = 2t,$$

тобто одним із власних векторів, який відповідає $\lambda_1 = 6$, перетворення А є

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -2t \\ -t \\ 2t \end{pmatrix}.$$

Його довжина

$$|\vec{x}_1| = \sqrt{4t^2 + t^2 + 4t^2} = 3|t|.$$

Далі нормуємо вектор $\bar{x}_1$, тобто знаходимо одиничний вектор

$$\vec{i}_1 = \frac{\vec{x}_1}{|\vec{x}_1|} = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Аналогічно знаходимо по одному із власних векторів, які відповідають $\lambda_2 = 9$ і $\lambda_3 = 3$:

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2t \\ -2t \\ t \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ 2t \end{pmatrix}.$$

Нормуючи їх, дістанемо

$$\vec{j}_1 = \frac{\vec{x}_2}{|\vec{x}_2|} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

і відповідно

$$\vec{k}_1 = \frac{\vec{x}_3}{|\vec{x}_3|} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Таким чином, матриця *A* має три лінійно незалежні вектори:

$$\vec{i}_1 = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right),$$

$$\vec{j}_1 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right),$$

$$\vec{k}_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Обчислимо скалярні добутки:

$$\vec{i}_1 \cdot \vec{j}_1 = -\frac{4}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = 0,$$

$$\vec{i}_1 \cdot \vec{k}_1 = -\frac{2}{9} - \frac{2}{9} + \frac{4}{9} = 0,$$

$$\vec{j}_1 \cdot \vec{k}_1 = \frac{2}{9} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = 0.$$

Тобто *власні вектори симетричної матриці* (63), *які відповідають різним власним числам, утворюють базис.*

Ця властивість власних векторів симетричних матриць є загальною.

Доведемо таку теорему.

Теорема. *Нехай лінійне перетворення* A *задано симетричною матрицею A, тоді:*

1) *власні вектори матриці A утворюють базис;*
2) *у цьому базисі матриця перетворення має діагональний вигляд.*

Д о в е д е н н я. Припустимо, що матриця *A* має *n* різних власних чисел. Поставимо у відповідність кожному власному числу один із власних векторів, позначивши їх $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n$. Ці вектори лінійно незалежні. Справді, припустимо, що система векторів $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n$ лінійно залежна, тобто

$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + ... + \alpha_n \vec{x}_n = \vec{0}, \tag{64}$$

де, наприклад, $\alpha_1 \neq 0$. Застосувавши до виразу (64) перетворення A, дістанемо

$$\mathsf{A}\left(\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + ... + \alpha_n \vec{x}_n\right) = \vec{0},$$

$$\alpha_1 \mathsf{A}\vec{x}_1 + \alpha_2 \mathsf{A}\vec{x}_2 + ... + \alpha_n \mathsf{A}\vec{x}_n = \vec{0}.$$

Оскільки $\mathsf{A}\vec{x}_i = \lambda_i \vec{x}_i = A\vec{x}_i$, то

$$\alpha_1 \lambda_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \vec{x}_2 + ... + \alpha_n \lambda_n \vec{x}_n = \vec{0}, \tag{65}$$

де $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ — власні числа матриці *A*. Помножимо рівність (64) на λ_n і результат віднімемо від (65):

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_n)\vec{x}_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_n)\vec{x}_2 + ... + \alpha_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n)\vec{x}_{n-1} = \vec{0}, \tag{66}$$

Лінійна комбінація у останній рівності вміщує вже $(n-1)$ вектор. Продовжуючи цей процес, дійдемо рівності

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_n)(\lambda_1 - \lambda_{n-1})(\lambda_1 - \lambda_{n-2})...(\lambda_1 - \lambda_2)\vec{x}_1 = \vec{0}.$$

Оскільки власні числа попарно різні, то дістанемо $\vec{x}_1 = \vec{0}$, що неможливо. Таким чином, вектори $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n$ лінійно незалежні і їх можна ортогоналізувати, внаслідок чого дістанемо ортонормований базис

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n.$$

У цьому базисі матриця лінійного перетворення має діагональний вигляд.

Справді, якщо вектор $\vec{e}_i$ — власний, то $A\vec{e}_i = \lambda\vec{e}_i$ і, отже, елемент i координатного стовпця дорівнює λ_i, а решта елементів стовпця $A\vec{e}_i$ є нулями:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 \; 0 \ldots 0 \\ 0 \;\; \lambda_1 \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \;\; 0 \ldots \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Тим самим доведено теорему для окремого випадку попарно різних власних чисел. Якщо власне число матриці A має кратність k, то йому відповідає не більше k лінійно незалежних власних векторів. Доведення цього припущення не даємо.

Покажемо на конкретному прикладі матриці А третього порядку, як вибирати власні вектори, якщо серед власних чисел є кратні.

3) Нехай серед коренів $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ характеристичного рівняння (57) є два кратних: $\lambda_2 = \lambda_3 \neq \lambda_1$. Тоді кореням λ_2 і λ_3 відповідає нескінченна множина власних векторів. Система (57) при цьому зводиться до одного рівняння, інші рівняння системи мають коефіцієнти, пропорційні коефіцієнтам даного рівняння. Нехай це буде рівняння

$$(a_{11} - \lambda)x + a_{12}y + a_{13}z = 0. \tag{67}$$

Тоді будь-який ненульовий розв'язок цього рівняння при $\lambda = \lambda_1$ визначає власний вектор $\vec{x}_1$ з координатами (x, y, z). За другий власний вектор можна вважати $\vec{x}_2$ з координатами $(a_{11} - \lambda_2, a_{12}, a_{13})$. Із рівняння (67) випливає, що ці вектори взаємно перпендикулярні.

Нормуючи вектори $\vec{x}_1$ і $\vec{x}_2$, знайдемо $\vec{i}_1$, $\vec{j}_1$. Помноживши векторно нормовані вектори $\vec{i}_1 \times \vec{j}_1 = \vec{k}_1$, дістанемо третій одиничний вектор базису $\vec{k}_1$, який відповідає власному числу $\lambda_2 = \lambda_3$.

2. Нехай усі корені характеристичного рівняння (58) рівні між собою: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, тоді усі вектори простору є власними. За базис можна вибрати будь-яку трійку попарно перпендикулярних векторів.

П р и к л а д. Скласти ортонормований базис із власних векторів матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Р о з в' я з а н н я. Запишемо характеристичне рівняння даної матриці:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -4 \\ 2 & -2-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

Розкривши визначник, дістанемо

$$\lambda^3 - 27\lambda - 54 = 0 .$$

Із цього рівняння знаходимо корені (власні числа матриці)

$$\lambda_1 = 6, \lambda_2 = \lambda_3 = -3.$$

Система рівнянь для визначення координат власних векторів матриці має вигляд

$$\begin{cases} (1-\lambda)x + 2y - 4z = 0, \\ 2x - (2+\lambda)y - 2z = 0, \\ -4x - 2y + (1-\lambda)z = 0. \end{cases} \tag{68}$$

Покладаючи $\lambda = \lambda_2 = \lambda_3 = -3$, дістаємо

$$2x + y - 2z = 0 . \tag{69}$$

При $\lambda = \lambda_1 = 6$ система (68) має розв'язок

$$x_1 = 2t, y_1 = t, z_1 = -2t .$$

Тоді відповідний власний вектор

$$\vec{x}_1 = (2t, t, -2t).$$

Нормуючи цей вектор, знаходимо

$$\vec{i}_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right).$$

Візьмемо будь-який розв'язок рівняння (69), наприклад $x_2 = 1, y_2 = 2, z_2 = 2$ і дістанемо

$$\vec{x}_2 = (t, 2t, 2t).$$

Нормуючи його, знайдемо

$$\vec{j}_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right).$$

Тепер визначимо третій вектор, перпендикулярний до двох знайдених:

$$\vec{k}_1 = \vec{i}_1 \times \vec{j}_1 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right).$$

Відповідь. Ортонормований базис складають вектори

$$\vec{i}_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right), \ \vec{j}_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right), \ \vec{k}_1 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

П р и к л а д. Знайти власні числа і власні вектори лінійного перетворення A , заданого матрицею:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Р о з в' я з а н н я. Запишемо характеристичне рівняння даної матриці

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Розв'язками цього рівняння є

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -1.$$

Усі корені (власні числа матриці) рівні між собою.

Система рівнянь для визначення координат власних векторів матриці має вигляд

$$\begin{cases} (2-\lambda)x - y + 2z = 0, \\ 5x + (-3-\lambda)y + 3z = 0, \\ -x \quad + \quad (-2-\lambda)z = 0. \end{cases}$$

Підставляючи в систему $\lambda_1 = -1$, дістанемо

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 0, \\ 5x - 2y + 3z = 0, \\ -x \quad - \quad z = 0. \end{cases}$$

Розв'язок системи: $x_1 = t, y_1 = t, z_1 = -t, t \in R$, тоді власний вектор, який відповідає $\lambda_1 = -1$, перетворення A є

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} t \\ t \\ -t \end{pmatrix}, t \in R, t \neq 0.$$

При кратних λ два інших вектори $\vec{x}_2$ і $\vec{x}_3$ можна взяти будь-якими, аби тільки вектори $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ були попарно перпендикулярними. Враховуючи, що вектор $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3t \\ -t \\ 2t \end{pmatrix}$ перпендикулярний до вектора $\vec{x}_1$ (це випливає із першого рівняння $3x - y + 2z = 0$ системи, якщо його ліву частину розглядати, як скалярний добуток двох векторів:

$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} t \\ t \\ -t \end{pmatrix}$ і $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3t \\ -t \\ 2t \end{pmatrix}$), за другий власний вектор можна вибрати $\vec{x}_2$. За третій власний вектор $\vec{x}_3$ виберемо вектор, який дорівнює векторному добутку $\vec{x}_1 \times \vec{x}_2$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} t \\ -5t \\ -4t \end{pmatrix}$, так як $\vec{x}_3 \perp \vec{x}_1$ і $\vec{x}_3 \perp \vec{x}_2$.

Нормуючи ці вектори, знаходимо

$$\vec{i}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\ \vec{j}_1 = \left(\frac{3}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}\right),$$

$$\vec{k}_1 = \left(\frac{1}{3\sqrt{14}}, -\frac{5}{3\sqrt{14}}, -\frac{4}{3\sqrt{14}}\right).$$

Відповідь: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, $\vec{i}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\vec{j}_1 = \left(\frac{3}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}\right)$, $\vec{k}_1 = \left(\frac{1}{3\sqrt{14}}, -\frac{5}{3\sqrt{14}}, -\frac{4}{3\sqrt{14}}\right)$.

Розділ V. ЛІНІЙНІ І КВАДРАТИЧНІ ФОРМИ. ПРИВЕДЕННЯ КВАДРАТИЧНОЇ ФОРМИ ДО КАНОНІЧНОГО ВИГЛЯДУ

§1. Лінійні форми

Розглянемо n-вимірний евклідів простір. Поставимо у відповідність до n-вимірного вектора $\vec{x}$ з цього простору певне дійсне число $f(\vec{x})$. Дістанемо числову функцію векторного аргументу

$$u = f(\vec{x}). \tag{1}$$

Означення. Функція (1) називається **лінійною функцією** або **лінійною формою**, якщо справджуються такі умови:

1) $f(c\vec{x}) = cf(\vec{x})$, (2)

2) $f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_2)$. (3)

3) $f(c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2) = c_1 f(\vec{x}_1) + c_2 f(\vec{x}_2)$. (4)

Якщо при цьому $c_1 = c_2 = 0$, то

$$f(\vec{0}) = 0. \tag{5}$$

Враховуючи цю умову, часто замість «лінійної функції» говорять про «лінійну однорідну функцію». У одновимірному просторі лінійна однорідна функція має вигляд $y = kx$.

Якщо задано базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ n-вимірного простру, в якому координати вектора $\bar{x}$ є $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n.$$

На основі рівності (4)

$$f(\vec{x}) = x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) + \ldots + x_n f(\vec{e}_n).$$

Позначимо

$$f(\vec{e}_1) = a_1; \quad f(\vec{e}_2) = a_2; \quad \ldots \quad f(\vec{e}_n) = a_n,$$

тоді

$$f(\vec{x}) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n. \tag{6}$$

Зазначимо, що при переході від одного базису до другого лінійні форми перетворюються так само, як і вектори базису.

§2. Квадратичні форми

Означення. **Квадратичною формою** називається многочлен, однорідний відносно змінних другого ступеня.

Наприклад

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2},$$

$$x^2 + 2xy + y^2, \ x^2 + y^2 + z^2 + 6xy + 8xz - 10yz$$

є квадратичні форми, а вираз

$$x^2 + xy + y^2 - 7x + 8$$

вже не є квадратичною формою.

Запишемо квадратичну форму двовимірного вектора $\vec{x}, \vec{x} = (x, y) = (x_1, x_2)$, або двох змінних:

$$\Phi(\vec{x}, \vec{x}) = a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{21}xy + a_{22}y^2. \tag{7}$$

Якщо $a_{12} = a_{21}$, то

$$\Phi(\vec{x}, \vec{x}) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2, \tag{8}$$

або

$$\Phi(\vec{x}, \vec{x}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2. \tag{9}$$

Зазначимо, що умова $a_{12} = a_{21}$ виконується завжди. Справді, нехай $a_{12} \neq a_{21}$, тоді

$$a_{12}xy + a_{21}xy = (a_{12} + a_{21})xy = 2b_{12}xy,$$

при цьому

$$b_{12} = \frac{a_{12} + a_{21}}{2}.$$

Квадратична форма трьох змінних має вигляд

$$\Phi(\vec{x},\vec{x}) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz\,, \qquad (10)$$

або

$$\Phi(\vec{x},\vec{x}) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3\,. \qquad (11)$$

Вирази (9) і (11) можна записати у вигляді

$$\Phi(\vec{x},\vec{x}) = \sum_{i,\,j=1}^{2} a_{ij}x_i x_j\,, \qquad (12)$$

$$\Phi(\vec{x},\vec{x}) = \sum_{i,\,j=1}^{3} a_{ij}x_i x_j$$

Остання форма запису компактніша і дає змогу узагальнення на *n*-вимірний випадок. Так, для *n*-вимірного вектора формула (12) набирає вигляду

$$\Phi(\vec{x},\vec{x}) = \sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j\,. \qquad (13)$$

Означення. **Матрицею квадратичної форми** називається матриця, складена із її коефіцієнтів, для якої завжди справджується рівність $a_{ij} = a_{ji}$.

Таким чином, квадратичній формі (13) відповідає єдина симетрична матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (14)$$

І навпаки, будь-якій симетричній матриці (14) відповідає єдина квадратична форма з точністю до позначення змінних.

Введемо вектор-стовпець і матрицю-стовпець:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{і} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

та вектор-рядок (матрицю-рядок)

$$\vec{x}' = (x_1, x_2, \dots, x_n),\ X' = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Легко помітити, що

$$\vec{x}^T = \vec{x}', \quad X^T = X'.$$

Теорема. *Квадратичну форму* $\Phi(\vec{x},\vec{x})$ *завжди можна подати у вигляді скалярного добутку* $\vec{x}'$ *і* $A\vec{x}$*:*

$$\Phi(\vec{x},\vec{x}) = \vec{x}' \cdot A\vec{x}\,. \qquad (15)$$

Доведення проведемо на прикладі квадратичної форми двох змінних. Розглянемо квадратичну форму двох змінних. Тоді

$$\Phi(\vec{x},\vec{x}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)x_1 +$$

$$+ (a_{12}x_1 + a_{22}x_2)x_2 = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \vec{x}' \cdot A\vec{x}.$$

Теорему доведено.

Із доведення теореми випливає, що квадратичну форму $\Phi(\vec{x},\vec{x})$ завжди можна подати у вигляді добутку матриць X', A, X:

$$\Phi(\vec{x},\vec{x}) = X'AX. \tag{16}$$

Розглянемо залежність зміни матриці квадратичної форми при зміні базису. Нехай дано ортонормований базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$, в якому квадратична форма задана матрицею A. Нехай здійснюється перехід до нового ортонормованого базису $\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n$, в якому квадратична форма має матрицю B. Знайдемо залежність між A і B. Використавши позначення (15), (16), де Π' — це матриця-стовпець, складена із векторів $\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n$, можна записати

$$\Pi' = L\Pi \text{ і } \Pi = L^{-1}\Pi'.$$

Введемо дві системи координат (стару і нову), які відповідають двом базисам: Π і Π'. Розмістимо початки цих систем у одній точці і позначимо один і той самий вектор у двох базисах відповідно матрицями X і Y. Тоді

$$Y = LX, \ X = L^{-1}Y, \ X' = Y'L.$$

Підставимо значення X і X' у формулу (16):

$$\begin{aligned} &\Phi(\vec{x},\vec{x}) = X'AX = X'A\left(L^{-1}Y\right) = Y'LAL^{-1}Y. \\ &\Phi(\vec{x},\vec{x}) = Y'LAL^{-1}Y, \end{aligned} \tag{17}$$

але

$$\Phi(\vec{x},\vec{x}) = Y'BY. \tag{18}$$

Порівнюючи вирази (17) і (18), знаходимо

$$B = LAL^{-1}. \tag{19}$$

Таким чином, при зміні базису матриця квадратичної форми у новому базисі має вигляд (19).

Означення. Якщо матриця квадратичної форми має діагональний вигляд, то квадратичну форму називають **канонічною.**

Канонічна квадратична форма має вигляд

$$\Phi(\vec{x},\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \eta_i^2, \tag{20}$$

де η_i — координати вектора $\vec{x}$ у новому базисі. Для форми (20) матриця A має діагональний вигляд, тобто

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{pmatrix}. \qquad (21)$$

Означення. Напрями, в яких квадратична форма має вигляд (20), називаються **головними напрямами** або **напрямами власних векторів.**

Теорема. *Із власних векторів матриці квадратичної форми можна побудувати ортонормований базис. У цьому базисі квадратична форма має канонічний вигляд.*

Справді, якщо за базис вважати ортонормовану систему власних векторів, то матриця A матиме діагональний вигляд, а квадратична форма — канонічний.

Таким чином, щоб квадратичну форму привести до канонічного вигляду, потрібно:

1) знайти матрицю A квадратичної форми;

2) знайти власні числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ і власні вектори $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ матриці A;

3) записати в канонічному вигляді квадратичну форму.

П р и к л а д. Привести до канонічного вигляду квадратичну форму

$$\Phi(\vec{x},\vec{x}) = 5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2$$

Розв'язання. 1) Складемо матрицю квадратичної форми

$$A=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix}.$$

2) Записуємо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix}5-\lambda & 4\\ 4 & 5-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

звідки

$$(5-\lambda)(5-\lambda)-16=0;\ \ 25-10\lambda+\lambda^2-16=0;$$

$$\lambda^2-10\lambda+9=0.$$

Розв'язуючи останнє рівняння, знаходимо власні числа

$$\lambda_1=1,\ \lambda_2=9.$$

Позначимо координати вектора $\vec{x}$ у системі власних векторів матриці через η_1, η_2. Тоді квадратична форма має вигляд

$$\Phi(\vec{x},\vec{x}) = \eta_1^2 + 9\eta_2^2.$$

3) Знаходимо ортонормовані власні вектори матриці

$$\vec{b}_1 = (l_1, m_1),\ \vec{b}_2 = (l_2, m_2).$$

Координати l, m задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} (5-\lambda)l + 4m = 0, \\ 4l + (5-\lambda)m = 0. \end{cases} \qquad (22)$$

Покладемо $\lambda = \lambda_1 = 1$, тоді система набере вигляду

$$\begin{cases} 4l_1^* + 4m_1^* = 0, \\ 4l_1^* + 4m_1^* = 0, \end{cases} \text{ або } l_1^* + m_1^* = 0.$$

За розв'язок можна взяти $l_1^* = 1,\ m_1^* = -1$. Таким чином, $\vec{b}_1^* = (1, -1)$.

Поділивши координати вектора $\vec{b}_1^*$ на його довжину, дістанемо нормований вектор $\vec{b}_1$:

$$\left|\vec{b}_1^*\right| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},\ \vec{b}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Оскільки $\lambda = \lambda_2 = 9$, то система (22) набере вигляду

$$\begin{cases} -4l_2^* + 4m_2^* = 0, \\ 4l_2^* - 4m_2^* = 0, \end{cases} \text{ або } l_2^* - m_2^* = 0.$$

За розв'язок можна взяти $l_2^* = 1,\ m_2^* = 1$. Тоді $\vec{b}_2^* = (1, 1)$. Нормуючи $\vec{b}_2^*$, дістанемо $\vec{b}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Покажемо, що вектори $\vec{b}_1^*$ і $\vec{b}_2^*$ лінійно незалежні. Розглянемо векторне рівняння

$$\lambda_1 \vec{b}_1^* + \lambda_2 \vec{b}_2^* = \vec{0}.$$

Перепишемо його у вигляді

$$\begin{cases} \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 1 = 0, \\ \lambda_1 \cdot (-1) + \lambda_2 \cdot 1 = 0. \end{cases}$$

Ця однорідна система має єдиний розв'язок $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, так як

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Таким чином, вектори $\vec{b}_1^*$ і $\vec{b}_2^*$ лінійно незалежні.

Відповідь. Канонічна форма квадратичної форми $\Phi(\vec{x}, \vec{x}) = \eta_1^2 + 9\eta_2^2$, власні вектори квадратичної форми

$$\vec{b}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \vec{b}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}\right).$$

Індивідуальні завдання

Задача №1. Перевірити, чи колінеарні вектори $\vec{c}$ та $\vec{d}$, що побудовані на даних векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

№	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$	$\vec{d}$
1	{1,-2,-3}	{3,2,-2}	$6\vec{a}-3\vec{b}$	$2\vec{a}-\vec{b}$
2	{2,3,-4}	{1,3,5}	$2\vec{a}-5\vec{b}$	$4\vec{a}-10\vec{b}$
3	{-1,4,5}	{2,4,-1}	$\vec{a}+3\vec{b}$	$3\vec{a}+\vec{b}$
4	{2,3,1}	{0,1,2}	$2\vec{a}-\vec{b}$	$6\vec{a}-3\vec{b}$
5	{3,-1,2}	{1,-1,3}	$3\vec{a}+4\vec{b}$	$9\vec{a}+12\vec{b}$
6	{1,-1,0}	{2,-4,1}	$-5\vec{a}+\vec{b}$	$-5\vec{a}-\vec{b}$
7	{2,-4,3}	{0,3,-2}	$2\vec{a}-4\vec{b}$	$\vec{a}-2\vec{b}$
8	{0,-1,2}	{-4,-1,1}	$-\vec{a}+5\vec{b}$	$\vec{a}-5\vec{b}$
9	{3,1,-2}	{0,1,3}	$-6\vec{a}+2\vec{b}$	$2\vec{a}-3\vec{b}$
10	{-2,1,0}	{1,-1,1}	$-4\vec{a}+3\vec{b}$	$4\vec{a}-3\vec{b}$
11	{3,-1,2}	{0,2,-5}	$2\vec{a}-3\vec{b}$	$-6\vec{a}+9\vec{b}$
12	{1,4,-5}	{3,1,-3}	$4\vec{a}-6\vec{b}$	$-2\vec{a}+3\vec{b}$
13	{3,-1,4}	{-5,4,2}	$2\vec{a}+4\vec{b}$	$\vec{a}-2\vec{b}$
14	{-1,2,3}	{4,3,-1}	$-3\vec{a}+2\vec{b}$	$6\vec{a}-4\vec{b}$
15	{3,2,1}	{-2,-1,1}	$5\vec{a}-3\vec{b}$	$-10\vec{a}+6\vec{b}$
16	{5,-4,3}	{3,-5,4}	$4\vec{a}-\vec{b}$	$\vec{a}-4\vec{b}$
17	{2,4,1}	{-1,4,3}	$6\vec{a}-9\vec{b}$	$-2\vec{a}+3\vec{b}$
18	{1,0,-1}	{2,1,-1}	$-2\vec{a}-4\vec{b}$	$\vec{a}+2\vec{b}$
19	{-2,3,-4}	{3,1,-1}	$-6\vec{a}-2\vec{b}$	$12\vec{a}+4\vec{b}$
20	{4,-3,1}	{1,-3,5}	$-4\vec{a}+2\vec{b}$	$4\vec{a}-2\vec{b}$
21	{0,2,4}	{-2,2,4}	$-\vec{a}-\vec{b}$	$2\vec{a}+4\vec{b}$
22	{-5,3,-2}	{-3,0,2}	$2\vec{a}+3\vec{b}$	$-6\vec{a}-9\vec{b}$
23	{1,-3,-5}	{4,3,-1}	$\vec{a}-5\vec{b}$	$-\vec{a}+5\vec{b}$
24	{3,-2,1}	{2,0,-5}	$-\vec{a}+2\vec{b}$	$2\vec{a}-\vec{b}$
25	{2,-1,3}	{1,4,-3}	$-5\vec{a}+4\vec{b}$	$-10\vec{a}+8\vec{b}$
26	{0,2,-2}	{2,-1,3}	$4\vec{a}-5\bar{b}$	$5\vec{a}-4\vec{b}$
27	{-1,1,0}	{-2,-3,4}	$3\vec{a}-4\vec{b}$	$-6\vec{a}+8\vec{b}$
28	{-4,3,-2}	{-1,-2,-3}	$6\vec{a}-\vec{b}$	$-12\vec{a}+2\vec{b}$
29	{2,1,-3}	{-4,2,0}	$-\vec{a}+\vec{b}$	$2\vec{a}-2\vec{b}$
30	{3,-5,4}	{5,2,-1}	$5\vec{a}-4\vec{b}$	$4\vec{a}-5\vec{b}$

Задача №2. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$,якщо задано $|\vec{p}|$ та $|\vec{n}|$ та кут $\gamma = (\vec{p},^\wedge \vec{n})$.

№	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\|\vec{p}\|$	$\|\vec{n}\|$	$\gamma = (\vec{p},^\wedge \vec{n})$
1	$\vec{p} - 3\vec{n}$	$2\vec{p} - 4\vec{n}$	1	2	$3\pi/4$
2	$\vec{p} + 2\vec{n}$	$3\vec{p} + 5\vec{n}$	3	4	$\pi/3$
3	$\vec{p} - 4\vec{n}$	$4\vec{p} - 7\vec{n}$	6	0.5	$\pi/2$
4	$3\vec{p} + \vec{n}$	$\vec{p} + 3\vec{n}$	2	2.5	$\pi/6$
5	$6\vec{p} - \vec{n}$	$\vec{p} - 2\vec{n}$	4	3.5	$2\pi/3$
6	$2\vec{p} - 3\vec{n}$	$3\vec{p} - 6\vec{n}$	7	1	$\pi/6$
7	$5\vec{p} + \vec{n}$	$8\vec{p} - 9\vec{n}$	5	4	$\pi/4$
8	$2\vec{p} + 4\vec{n}$	$10\vec{p} - \vec{n}$	8	1.5	$5\pi/6$
9	$2\vec{p} + 5\vec{n}$	$\vec{p} - 3\vec{n}$	9	2	$\pi/3$
10	$3\vec{p} - \vec{n}$	$2\vec{p} + 4\vec{n}$	10	2.5	$2\pi/3$
11	$4\vec{p} - 2\vec{n}$	$3\vec{p} + 7\vec{n}$	3	6	$\pi/2$
12	$10\vec{p} - \vec{n}$	$\vec{p} + 2\vec{n}$	1	7	$\pi/6$
13	$6\vec{p} - 8\vec{n}$	$3\vec{p} + \vec{n}$	7	2	$\pi/4$
14	$3\vec{p} - 4\vec{n}$	$6\vec{p} - \vec{n}$	2	3.5	$3\pi/4$
15	$4\vec{p} + \vec{n}$	$3\vec{p} - 2\vec{n}$	6	0.5	$5\pi/6$
16	$5\vec{p} - 2\vec{n}$	$7\vec{p} - 3\vec{n}$	3	4	$\pi/6$
17	$6\vec{p} - 3\vec{n}$	$9\vec{p} - 5\vec{n}$	5	3	$\pi/2$
18	$7\vec{p} - 4\vec{n}$	$3\vec{p} + 2\vec{n}$	9	2	$\pi/3$
19	$8\vec{p} - 5\vec{n}$	$10\vec{p} - 9\vec{n}$	4	2.5	$2\pi/3$
20	$9\vec{p} - 6\vec{n}$	$7\vec{p} + 8\vec{n}$	8	1	$3\pi/4$
21	$10\vec{p} - 8\vec{n}$	$6\vec{p} - 2\vec{n}$	2	0.5	$5\pi/6$
22	$\vec{p} + 2\vec{n}$	$3\vec{p} - 5\vec{n}$	1	9	$\pi/6$
23	$2\vec{p} - 4\vec{n}$	$5\vec{p} + 7\vec{n}$	7	3	$\pi/4$
24	$3\vec{p} - 6\vec{n}$	$4\vec{p} - 2\vec{n}$	3	14	$\pi/2$
25	$4\vec{p} - 8\vec{n}$	$2\vec{p} + \vec{n}$	6	4	$\pi/3$
26	$5\vec{p} - \vec{n}$	$6\vec{p} + 2$	4	2.5	$\pi/6$
27	$6\vec{p} - 4\vec{n}$	$3\vec{p} - \vec{n}$	5	4	$\pi/4$
28	$7\vec{p} - 5\vec{n}$	$4\vec{p} + \vec{n}$	2	7	$3\pi/4$
29	$5\vec{p} - 9\vec{n}$	$2\vec{p} - 3\vec{n}$	7	1	$\pi/2$
30	$9\vec{p} - 10\vec{n}$	$7\vec{p} + 6\vec{n}$	9	2	$\pi/3$

б) Знайти довжину векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, якщо задано $|\vec{p}|$, $|\vec{n}|$ та кут $\gamma = (\vec{p},\hat{\ }\vec{n})$

№	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\|\vec{p}\|$	$\|\vec{n}\|$	$\gamma = (\vec{p},\hat{\ }\vec{n})$
1	$3\vec{p} - \vec{n}$	$2\vec{p} + 5\vec{n}$	1	4	$\pi/6$
2	$2\vec{p} + 4\vec{n}$	$3\vec{p} - 6\vec{n}$	2	0.5	$2\pi/3$
3	$\vec{p} - 3\vec{n}$	$5\vec{p} + \vec{n}$	4	1.5	$\pi/4$
4	$6\vec{p} + \vec{n}$	$2\vec{p} - 3\vec{n}$	8	1	$3\pi/4$
5	$2\vec{p} - \vec{n}$	$3\vec{p} + 2\vec{n}$	10	2	$5\pi/6$
6	$\vec{p} + 2\vec{n}$	$4\vec{p} - 7\vec{n}$	3	6	$\pi/3$
7	$\vec{p} - 4\vec{n}$	$3\vec{p} + 2\vec{n}$	5	3	$\pi/2$
8	$3\vec{p} + \vec{n}$	$\vec{p} - 3\vec{n}$	7	1	$2\pi/3$
9	$6\vec{p} - \vec{n}$	$\vec{p} + 2\vec{n}$	9	4	$\pi/4$
10	$2\vec{p} - 3\vec{n}$	$3\vec{p} + 4\vec{n}$	6	2	$3\pi/4$
11	$5\vec{p} + \vec{n}$	$6\vec{p} - 4\vec{n}$	4	3	$\pi/6$
12	$2\vec{p} + 4\vec{n}$	$2\vec{p} - 6\vec{n}$	2	5	$\pi/3$
13	$\vec{p} + 5\vec{n}$	$8\vec{p} - 10\vec{n}$	1	6	$\pi/2$
14	$3\vec{p} - \vec{n}$	$7\vec{p} + 5\vec{n}$	3	2	$5\pi/6$
15	$4\vec{p} - 2\vec{n}$	$3\vec{p} + 4\vec{n}$	5	4	$\pi/4$
16	$10\vec{p} - \vec{n}$	$\vec{p} + 3\vec{n}$	6	1	$\pi/2$
17	$6\vec{p} - 8\vec{n}$	$2\vec{p} + \vec{n}$	4	3	$\pi/3$
18	$3\vec{p} - 4\vec{n}$	$7\vec{p} + \vec{n}$	7	2	$2\pi/3$
19	$4\vec{p} + \vec{n}$	$3\vec{p} - 2\vec{n}$	9	4	$3\pi/4$
20	$5\vec{p} - 2\vec{n}$	$6\vec{p} + \vec{n}$	8	1	$5\pi/6$
21	$7\vec{p} - 4\vec{n}$	$3\vec{p} - 2\vec{n}$	3	2	$\pi/2$
22	$8\vec{p} - 5\vec{n}$	$\vec{p} + \vec{n}$	2	1	$\pi/3$
23	$10\vec{p} - 8\vec{n}$	$\vec{p} - 2\vec{n}$	5	3	$\pi/2$
24	$\vec{p} + 2\vec{n}$	$2\vec{p} - 3\vec{n}$	1	4	$\pi/4$
25	$2\vec{p} - 4\vec{n}$	$3\vec{p} + 5\vec{n}$	6	5	$\pi/6$
26	$3\vec{p} - 6\vec{n}$	$4\vec{p} + \vec{n}$	9	2	$\pi/3$
27	$4\vec{p} - 8\vec{n}$	$2\vec{p} - \vec{n}$	7	1	$\pi/2$
28	$9\vec{p} - 6\vec{n}$	$3\vec{p} + 2\vec{n}$	3	4	$\pi/6$
29	$6\vec{p} - 4\vec{n}$	$2\vec{p} + 5\vec{n}$	4	3	$\pi/3$
30	$5\vec{p} - 9\vec{n}$	$\vec{p} + 2\vec{n}$	2	1	$\pi/4$

Задача №3. Дано точки $\vec{A}$, $\vec{B}$ і $\vec{C}$ та силу $\vec{F}$, прикладену в точці $\vec{B}$.
Знайти:1) косинус кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$;

2) момент сили $\vec{F}$ відносно точки $\vec{B}$;

3) роботу сили $\vec{F}$ при переміщенні з точки $\vec{B}$ в точку $\vec{C}$.

№	A	B	C	$\vec{F}$
1	(1, 2, -3)	(2, -3, 4)	(5, 1, -2)	{-3, -4, 1}
2	(2, -3, 4)	(-3, 4, -5)	(4, 3, 1)	{1, -2, 0}
3	(3, 1, -2)	(1, -1, 0)	(2, 3, -4)	{5, 4, 3}
4	(0, 4, 1)	(2, 1, -3)	(3, 5, -2)	{1, -3, 2}
5	(5, -1, 2)	(3, 0, -1)	(2, -3, 1)	{4, -5, 6}
6	(6, 3, -4)	(2, -1, 0)	(4, 2, -2)	{5, -7, 1}
7	(7, -2, 5)	(5, 3, -2)	(0, 1, 2)	{6, -4, -1}
8	(0, -4, 6)	(2, -2, 3)	(3, 5, -4)	{-2, 6, 3}
9	(8 ,-5 , 7)	(3, -2, 4)	(4, 2, -1)	{1, -3, 5}
10	(9, 6, -3)	(3, 0, -4)	(4, -5, 2)	{5, -4, 1}
11	(-1, 2, 4)	(0, 4, 6)	(3, 5, -2)	{-2, -3, 5}
12	(-2, 5, 6)	(1, -2, 3)	(-3, 4, 1)	{0, 2, -5}
13	(-3, 9, 1)	(2, -3, 5)	(4, -4, -2)	{1, -2, 6}
14	(0, 8, -3)	(-1, 3, 4)	(2, 5, -6)	{2, 4, -5}
15	(-7, 3, -4)	(0, -2, 3)	(1, 4, -5)	{6, 5, 2}
16	(-6, 1, -2)	(1, 3, -4)	(5, 2, -3)	{7, 4, 0}
17	(-5, 2, 3)	(0, 5, -1)	(4, 1, -2)	{-1, 4, -5}
18	(1, 4, 6)	(2, -3, 5)	(3, 0, -4)	{-2, 5, -1}
19	(4, 7, 5)	(-1, 1, 2)	(-2, 3, 0)	{-6, 4, -2}
20	(3, 6, -5)	(-2, 3, 4)	(1, 2, -6)	{2, 1, 0}
21	(2, 3, -6)	(5, 1, -3)	(4, -1, -2)	{3, -4, 1}
22	(0, 1, -4)	(2, 4, 6)	(5, -5, 3)	{-2, 3, 4}
23	(-3, 0, -7)	(1, -3, 5)	(2, -4, 6)	{-1, 1, 2}
24	(-4, 8, 5)	(3, 6, 7)	(0, -1, 2)	{3, -5, 4}
25	(-2, 5, 3)	(-3, 4, -1)	(1, 2, -6)	{2, 4, -6}
26	(2, 4, -2)	(0, 1, -5)	(-1, 3, -2)	{-3, 5, 1}
27	(3, 7, -1)	(4, -2, 6)	(0, -3, 5)	{-4, 1, -2}
28	(6, 9, 0)	(1, -3, 4)	(5, -2, 1)	{-2, 1, 3}
29	(9, 2, -2)	(-1, 3, -5)	(8, -4, 1)	{7, -6, 2}
30	(7, 1, -4)	(-2, 4, -6)	(5, 3, 2)	{4, -2, -3}

Задача №4

Дано координати вершини піраміди ABCD. Потрібно:

1) записати вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ в системі орт;
2) знайти напрямні косинуси векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$;
3) знайти проекцію вектора $\overrightarrow{AD}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$;
4) знайти об'єм піраміди *ABCD* та висоту, опущену із вершини *D* на грань ABC:

№	A	B	C	D
1	(3, 1, -2)	(4, -1, 0)	(14, 3, 8)	(11, 5, 6)
2	(0, 2, -10)	(1, 0, -8)	(11, 4, 0)	(8, 6, -2)
3	(-8, 3, -1)	(-7, 1, 1)	(3, 5, 9)	(0, 7, 7)
4	(-1, -2, -8)	(0, -4, -6)	(10, 0, 2)	(7, 2, 0)
5	(2, -1, -4)	(3, -3, -2)	(13, 1, 6)	(10, 3, 4)
6	(1, -4, 0)	(2, -6, 2)	(12, -2, 10)	(9, 0, 8)
7	(-4, 5, -5)	(-3, 3, -3)	(7, 7, 5)	(4, 9, 3)
8	(-5, 0, 1)	(-4, -2, 3)	(6, 2, 11)	(3, 4, 9)
9	(-2, -3, 2)	(-1, -5, 4)	(9, 1, 12)	(6, 1, 10)
10	(4, -2, 5)	(8, 2, 3)	(6, 9, -5)	(4, 0, 6)
11	(-3, 4, -3)	(-2, 2, -1)	(8, 6, 7)	(5, 8, 5)
12	(3, 3, -3)	(7, 7, -5)	(5, 14, -13)	(3, 5, -2)
13	(5, 0, 4)	(9, 4, 2)	(7, 11, -7)	(5, 2, 5)
14	(0, 4, 3)	(4, 8, 1)	(2, 15, -7)	(0, 6, 4)
15	(9, 3, 0)	(13, 7, 2)	(11, 14, -10)	(9, 5, 1)
16	(-2, 0, -2)	(2, 4, -4)	(0, 11, -12)	(-2, 2, -1)
17	(3, -2, 2)	(7, 2, 0)	(5, 9, -8)	(3, 0, 3)
18	(-4, 2, -1)	(0, 6, -3)	(-2, 13, -11)	(-4, 4, 0)
19	(0, -3, 5)	(4, 1, 3)	(2, 8, -6)	(0, -1, 6)
20	(-1, -1, -5)	(3, 5, -7)	(1, 12, -15)	(-1, 3, -4)
21	(3, 5, -1)	(7, 9, -3)	(5, 16, -11)	(3, 7, 10)
22	(-3, -6, 2)	(1, -2, 0)	(-1, 2, 8)	(-3, -4, 3)
23	(-1, 5, 2)	(3, 9, 0)	(1, 16, -8)	(-1, 7, 3)
24	(1, -4, 3)	(5, 0, -2)	(3, 7, -10)	(-1, -2, 1)
25	(-2, 2, 1)	(2, 6, -1)	(0, 13, -9)	(-2, 4, 2)
26	(5, -1, -4)	(9, 3, -6)	(7, 10, -14)	(5, 1, -3)
27	(0, 2, 0)	(4, 6, -2)	(2, 13, -10)	(0, 4, 1)
28	(0, -1, -1)	(-2, 3, 5)	(1, -5, -9)	(-1, -6, 3)
29	(2, -3, 1)	(6, 1, -1)	(4, 8, -9)	(2, -1, 2)
30	(2, 3, 1)	(4, 1, -2)	(6, 3, 7)	(7, 5, -3)

Задача №5

Дано координати векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ в базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Знайти координати α, β, γ вектора $\vec{d}$ в базисі $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ($\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$).

№	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$	$\vec{d}$
1	{-3, 4, -2}	{2, -5, 3}	{3, 2, 5}	{-7, -5, -7}
2	{6, 5, -4}	{4, 3, -2}	{3, 2, 1}	{-1, 0, -3}
3	{2, 3, 1}	{5, -2, 1}	{4, -3, -2}	{1, 2, -2}
4	{-2, -3, -5}	{-1, 2, -3}	{4, 2, 3}	{2, -8, -1}
5	{3, 2, 2}	{-4, 1, 2}	{2, 5, 3}	{0, -2, 5}
6	{-1, -3, 5}	{2, 1, 1}	{2, 3, 1}	{6, -4, -8}
7	{4, 2, 3}	{-3, 1, -2}	{6, 3, 1}	{5, 5, -3}
8	{1, -2, 1}	{2, 1, 3}	{1, 3, -2}	{3, -6, 7}
9	{3, 1, 2}	{-3, 3, -1}	{1, 2, 3}	{8, 2, 9}
10	{1, -2, -4}	{3, 2, 1}	{2, 1, 3}	{2, -2, 1}
11	{1, -2, 3}	{1, 3, -2}	{2, -2, 3}	{2, 11, 18}
12	{2, -3, 4}	{2, 2, 3}	{3, -1, 2}	{-1, 8, 4}
13	{3, 2, 4}	{-5, -3, 1}	{3, 2, 2}	{19, 12, 6}
14	{-5, -2, -2}	{2, 3, 2}	{4, 3, -1}	{-7, -2, 1}
15	{3, 2, 1}	{-1, 3, -2}	{2, -1, 3}	{0, -6, 4}
16	{2, 3, 4}	{-4, -2, 5}	{5, 3, -2}	{-3, -5, -5}
17	{-3, -2, -5}	{4, 5, 3}	{2, 3, 4}	{3, 5, -3}
18	{-4, 2, -1}	{-3, 1, 2}	{2, 3, 1}	{3, -2, 3}
19	{5, 2, 4}	{3, 2, 1}	{4, -3, 2}	{3, 5, 5}
20	{-2, -4, -3}	{5, 3, 2}	{3, -5, 4}	{0, -6, 5}
21	{4, 2, 3}	{2, 3, -4}	{-2, -4, 5}	{-10, -9, 0}
22	{5, 6, 4}	{-2, -3, -4}	{-1, -2, 3}	{7, 7, 7}
23	{4, 5, 2}	{5, -4, 1}	{-3, 4, -1}	{5, 1, 3}
24	{-2, -1, -3}	{6, 3, 5}	{5, 4, 3}	{3, 3, 4}
25	{4, 2, 3}	{-4, -1, -3}	{-5, -8, -1}	{-1, -5, 2}
26	{3, 4, 5}	{-4, 2, 2}	{4, -1, 3}	{-2, -8, -2}
27	{5, -2, 3}	{-2, 3, -4}	{4, 3, 5}	{3, -8, 2}
28	{3, 2, 2}	{-4, 3, -2}	{3, 2, -4}	{7, -1, -8}
29	{2, 1, 3}	{3, -4, 2}	{3, 2, -5}	{-5, -9, 9}
30	{-6, -8, -5}	{5, 3, 4}	{2, -4, 3}	{-2, 2, 0}

1. Дубовик В.П., Юрик І.І., Вища математика. –К.: 1988 А.С.К.,2001.
2. Суліма І.М., Ковтун І.І., Радчик І.А. Вища математика. Частина перша. Лінійна та векторна алгебра. Аналітична геометрія. – К.:Видавничий центр НАУ,2006.
3. Суліма І.М., Ковтун І.І., Батечко Н.Г., Нікітіна І.А., Яковенко В.М., Збірник задач-К.: Видавничий центр НАУ, 2006.
4. Суліма І.М., Ковтун І.І., Батечко Н.Г., Нікітіна І.А., Яковенко В.М., Вища математика у задачах і вправах. Частина перша. – К.: Видавничий центр НАУ, 2005.
5. Бугров Я.С., Никольський С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Наука, 1988.
6. Гантмахер Р.Р. Теория матриц. – 4-е изд. М.: Наука, 1988.
7. Гусак А.А., Гусак Г.М. Справочник по высшей математике. – Минск: Наука и техника, 1991.
8. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1988.
9. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – 3-е изд. – М.: Наука, 1984.