Лекція №1. Визначники та їх властивості

1. Визначники другого порядку

Означення: **визначником другого порядку** називається величина, що представлена у вигляді квадратної таблиці, складеної із чотирьох елементів, що розташовані у двох рядках і двох стовпцях, і яка обчислюється за таким правилом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \qquad (1)$$

Елементи таблиці позначаються однією буквою з двома індексами: перший індекс — номер рядка, другий — номер стовпця. Так, наприклад,

a_{12} — це елемент, розташований на першому рядку у другому стовпці,
a_{ij} — це елемент, розташований на i-тому рядку у j-тому стовпці.

Елементи таблиці називають також елементами визначника; Δ — позначення визначника.

Елементи визначника, розташовані на діагоналі таблиці, яка іде із верхнього лівого кута в нижній правий, утворюють головну діагональ, а елементи визначника протилежної діагоналі, тобто тієї, що іде із верхнього правого кута у нижній лівий, утворюють бічну діагональ. Так, у таблиці (1) a_{11}, a_{22}— елементи головної діагоналі, а a_{12}, a_{21} — бічної.

Формула (1) означає, що визначник другого порядку, який представлений таблицею (1), дорівнює добутку елементів головної діагоналі мінус добуток елементів бічної діагоналі.

Приклади. Обчислити визначники:

а) $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (-1) \cdot 3 = 7$

б)

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & -\sin\alpha \end{vmatrix} = \sin\alpha \cdot (-\sin\alpha) - \cos\alpha \cdot \cos\alpha = -\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = -1$$

2. Визначники третього порядку

Означення: в**изначником третього порядку** називається величина, що представлена у вигляді квадратної таблиці, складеної із дев'яти елементів, що розташовані у трьох рядках і трьох стовпцях, і яка обчислюється за таким правилом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - \qquad (2)$$

$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11}$$

Елементи a_{11}, a_{22}, a_{33} утворюють головну діагональ визначника, а елементи a_{13}, a_{22}, a_{31} — бічну.

Зауважимо, що кожний доданок у формулі (2), який називається членом визначника, складається із добутку трьох елементів і містить по одному і тільки одному елементу із кожного стовпця і кожного рядка.

Для зручності запам'ятовування формули (2) наведемо таке мімічне правило — «правило зірочки». Зобразимо дві таблиці, в яких елементи позначимо точками:

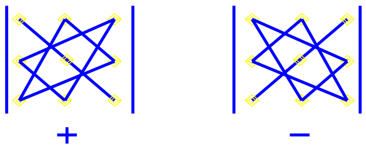

Рис. 1

У першій таблиці (рис.1) з'єднаємо елементи головної діагоналі, а потім елементи, які розташовані на напрямах, паралельних головній діагоналі, з'єднаємо з елементами, що знаходяться у протилежному куті. У формулі (2) цим з'єднанням відповідають три члени, які входять у цю формулу зі знаком «+». Аналогічні з'єднання елементів виконуємо відносно бічної діагоналі, що показано на другій таблиці (рис.1). У формулі (2) їм відповідають члени, які входять у цю формулу зі знаком «—».

Приклад. Обчислити визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 6 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 1 + (-3) \cdot 5 \cdot 6 + 0 \cdot (-2) \cdot (-1) -$$

$$-(-1) \cdot 1 \cdot 6 - 5 \cdot (-2) \cdot 2 - 0 \cdot (-3) \cdot 1 = -62$$

Іноді для того, щоб запам'ятати формулу (2), користуються так званим «правилом Саррюса». До таблиці із формули (2) допишемо праворуч перший і другий її стовпці:

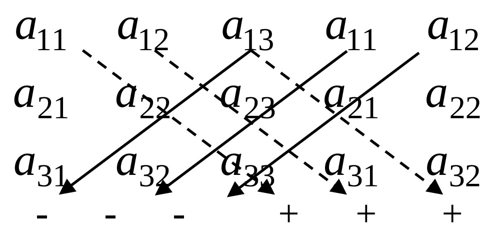

Рис. 2

З'єднаємо по три елементи, які стоять на одному напрямі (рис. 2). Добутки елементів, які розташовані на одній лінії, відповідають членам визначника у формулі (2). При цьому добутки елементів головної діагоналі і напрямів їй паралельних, потрібно брати із власним знаком, а добутки елементів бічної діагоналі і напрямів їй паралельних із протилежним знаком.

3. Властивості визначників

Розглянемо властивості визначників на прикладі визначників третього порядку.

Транспонуванням визначника називається операція, при якій його рядки і стовпці міняються місцями.

До визначника Δ (див.(1.2)) транспонованим Δ^T буде визначник

$$\Delta^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Властивість 1. **Транспонування** визначника не змінює його значення

$$\Delta = \Delta^T.$$

Властивість легко перевірити, обчисливши Δ^T за формулою (2).

Із цієї властивості випливає, що рядки і стовпці визначника є рівноправними, тобто якщо властивість має місце для рядків визначника, то аналогічна властивість має місце і для стовпців.

Властивість 2. Якщо у визначнику два будь-які стовпці (рядки) поміняти місцями, то визначник змінює знак.

Наприклад, поміняємо у Δ місцями перший і третій стовпці і обчислимо цей визначник згідно з формулою (2). Маємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} = a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} -$$

$$- a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{23} - a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} = -\Delta$$

Аналогічно отримуємо при будь-якій іншій перестановці стовпців (рядків).
Властивість 3. Якщо всі елементи деякого стовпця (рядка) дорівнюють нулеві, то і визначник дорівнює нулеві.
Приклад:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Дійсно, із формули (2) випливає, що у кожному добутку цієї формули є елемент із стовпця, який складається із нулів.

Властивість 4. Визначник, у якому є два однакових стовпці (рядка), дорівнює нулеві.

Наприклад, нехай у визначнику Δ_1 є два однакових стовпці:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Якщо у визначнику Δ_1 замінити місцями перший і другий стовпці,

то, з одного боку, дістаємо —Δ_1 (властивість 2), а з другого боку, цей визначник не зміниться (перший і другий стовпці однакові). Тобто Δ_1 = – Δ_1, а це можливо лише тоді, коли Δ_1 = 0.

Властивість 5. Якщо всі елементи будь-якого стовпця (рядка) визначника помножити на одне й те ж число k, то і визначник помножиться на число k. Наприклад:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Дійсно, в кожному члені правої частини формули (2), записаної для Δ_2, буде елемент із першого стовпця, тобто множник *к*.

Цю властивість можна сформулювати ще так: загальний співмножник елементів деякого стовпця (рядка) визначника можна винести за знак визначника.

Властивість 6. Якщо два стовпці (рядка) визначника містять відповідно пропорційні елементи, то визначник дорівнює нулеві.

Наприклад:

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{11} & a_{13} \\ ka_{21} & a_{21} & a_{23} \\ ka_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

(Згідно з властивістю 5 множник *k* можна винести за знак визначника, а потім використати властивість 4).

Властивість 7. Якщо всі елементи будь-якого стовпця (рядка) визначника є сумами двох доданків, то визначник дорівнює сумі двох визначників, в першому з яких у відповідному стовпці (рядку) розташовані перші доданки, а у другому — другі доданки. Інші стовпці в обох визначниках однакові і такі, як у вихідному визначнику.

Наприклад:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Ця властивість випливає із формули (2), тому що кожний член визначника, що стоїть ліворуч, містить елементи першого стовпця. Ці члени можна представити як суми двох добутків, в кожен з яких входять відповідно елементи визначників, що стоять праворуч.

Властивість 8. Визначник не зміниться, якщо до елементів будь-якого стовпця (рядка) додати відповідні елементи іншого стовпця (рядка), попередньо помножені на одне й те ж саме число, а інші стовпці (рядки) залишити без зміни.

Наприклад, додамо до першого стовпця визначника Δ другий, помножений на число *k*. Тоді, використовуючи властивості 7, 5 та 4, дістанемо

$$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta + k\cdot 0 = \Delta.$$

Наступні властивості пов'язані з деякими додатковими поняттями.

4. Мінор. Алгебраїчне доповнення.

Означення. **Мінором** M_{ij} деякого елемента a_{ij} визначника Δ називається визначник, який одержується із Δ, якщо із нього викреслити i-ий рядок і j-ий стовпець, на перетині яких стоїть елемент a_{ij}.

Отже, мінор M_{ij} елемента a_{ij} у визначнику третього порядку є визначником другого порядку. Наприклад, запишемо мінор M_{12} елемента a_{12} Для цього потрібно викреслити із Δ перший рядок і другий стовпець.

Маємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad i \quad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Означення. **Алгебраїчним доповненням** A_{ij} елемента a_{ij} називається його мінор M_{ij}, взятий із своїм знаком, якщо сума номерів рядка і стовпця, на перетині яких стоїть a_{ij}, є парне число, і з протилежним знаком, якщо ця сума — непарне число, тобто

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \tag{3}$$

Так, наприклад, $A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}= M_{11}$, а $A_{12}=(-1)^{1+2} M_{12}= -M_{12}$

На рис.1 знаком «+» позначені ті елементи, для яких $i+j$ — парне число і $A_{ij}=M_{ij}$, і знаком «—» — ті елементи, для яких $i+j$ — непарне число і тоді $A_{ij}= -M_{ij}$

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Рис.3

Властивість 9. **Розклад визначника за елементами будь-якого стовпця (рядка).** Визначник дорівнює сумі добутків всіх елементів деякого стовпця (рядка) на їх алгебраїчні доповнення.

Наприклад, розклад визначника за елементами першого стовпця має вигляд

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$$

Аналогічно можна розкласти визначник за елементами будь-якого іншого стовпця або рядка. Отже, для визначника третього порядку маємо 6 розкладів

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} \qquad (j=1,2,3) \\ \Delta &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} \qquad (i=1,2,3) \end{aligned} \tag{4}$$

Перша формула у (4) — це розклад визначника за елементами j-того стовпця, а друга — за елементами i-того рядка (в дужках зазначено всі можливі номери стовпців і рядків).

Зауваження. Алгебраїчні доповнення до елементів деякого стовпця (рядка) не залежать від самих цих елементів. Так, якщо замінити всі елементи деякого стовпця (рядка) іншими, то алгебраїчні доповнення не зміняться.

Наприклад, замінемо у визначнику Δ елементи першого стовпця, а потім одержаний визначник розкладемо за елементами першого стовпця згідно з формулою (4). Дістанемо

$$\begin{vmatrix} h_1 & a_{12} & a_{13} \\ h_2 & a_{22} & a_{23} \\ h_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = h_1 A_{11} + h_2 A_{21} + h_3 A_{31} \qquad (5)$$

Властивість 10. Сума добутків усіх елементів будь-якого стовпця (рядка) визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого стовпця (рядка) дорівнює нулеві.

Наприклад, розглянемо добуток елементів другого стовпця на алгебраїчні доповнення елементів першого стовпця. Враховуючи формулу (5), дістанемо

$$a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

Одержаний визначник дорівнює нулеві тому, що він має два однакових стовпця (властивість 4).

Властивість 10 можна записати так:

$$\begin{aligned} &a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + a_{3j}A_{3k} = 0 \qquad (j \neq k; k = 1,2,3) \\ &a_{i1}A_{p1} + a_{i2}A_{p2} + a_{i3}A_{p3} = 0 \qquad (i \neq p; p = 1,2,3) \end{aligned} \qquad (6)$$

Перша із рівностей (6) записана для стовпців визначника з номерами j та ***k*** $(j \neq k)$, а друга — для рядків з номерами i та p $(i \neq p)$.

5. Визначники *n*-го порядку

За аналогією з визначниками другого і третього порядку, розглянемо величину, яка представлена квадратною таблицею, що складається із 16-ти елементів, що розташовані у 4-х стовпцях і 4-х рядках і яка може бути обчислена згідно з властивістю 9.

Дістанемо

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} + a_{4j}A_{4j} = \sum_{i=1}^{4} a_{ij}A_{ij} \text{*)} \qquad (7)$$

$$(j = 1, 2, 3,\ 4)$$

або

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} + a_{i4}A_{i4} = \sum_{j=1}^{4} a_{ij}A_{ij} \text{*)} \qquad (8)$$

$$(i = 1, 2, 3,\ 4)$$

Величина, що визначається формулою (7) або (8), називається **визначником четвертого порядку.** Значення індексів i та j в дужках вказує на те, що існує 8 представлень для визначника четвертого порядку. Алгебраїчні доповнення A_{ij} до елементів a_{ij} цього визначника будуть пов'язані з мінорами M_{ij} цих елементів згідно з формулою (3), тобто алгебраїчні доповнення визначаються за допомогою визначників третього порядку, а їх знаки відповідають розташуванню знаків у таблиці, наведеній на рис. 4 (порівняйте з рис. 3).

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$$

Рис. 4

Так, наприклад:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},\ A_{41} = (-1)^{4+1}M_{41} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

Отже, обчислення визначника четвертого порядку зводиться, взагалі кажучи, до обчислення чотирьох визначників третього порядку.

Аналогічно можна ввести визначник n-го порядку.

Означення. **Визначником *n*-го порядку** називається величина, яка представлена квадратною таблицею, що складається із n^2 елементів, що розташовані в n рядках і n стовпцях, і дорівнює сумі добутків всіх елементів будь-якого стовпця (рядка) на їх відповідні алгебраїчні доповнення.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nm} \end{vmatrix} = a_{1j}A_{1j} + \dots + a_{ij}A_{ij} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{4} a_{ij}A_{ij}$$

$$(j = 1, 2, \dots, n).$$

або

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{ij}A_{ij} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{4} a_{ij}A_{ij} \qquad (10)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n).$$

У формулах (9) записано розклад визначника за елементами j-го стопця, а у (10) — за елементами i-го рядка. Загалом таких розкладів буде $2n$. Алгебраїчне доповнення A_{ij} елемента a_{ij} пов'язане з його мінором M_{ij} формулою (1), тобто

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \,,$$

де M_{ij} є визначник порядку $(n—1)$, який дістаємо, якщо із даного визначника викреслити i-тий рядок і j-тий стовпець. Отже, у загальному випадку обчислення визначника n-го порядку зводиться до обчислення n визначників $(n—1)$-го порядку.

Легко переконатися, що властивості 1-8,10, для визначника третього порядку, мають місце і для визначника n-го порядку.

Приклад. Обчислити визначник четвертого порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Перший спосіб. Згідно з означенням (див. (7), (8)) ми повинні розкласти цей визначник за елементами будь-якого стовпця або рядка і звести його обчислення до обчислення визначників третього порядку. Оберемо для розкладу четвертий рядок. Тоді із (8) при $i = 4$ дістанемо

$$\Delta = 3 \cdot A_{41} + 1 \cdot A_{42} + 0 \cdot A_{43} + 0 \cdot A_{44} = 3 \cdot A_{41} + A_{42}.$$

Отже, вибір четвертого рядка не був випадковим: у розкладі визначника два доданки, що дорівнюють нулеві, і обчислення звелось до обчислення двох визначників (замість чотирьох) третього порядку.

Враховуючи, що A_{41} = $(-1)^{4+1}M_{41} = -M_{41}$, $A_{42} = (-1)^{4+2}M_{42} = M_{42}$, маємо

$$\Delta = -3\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -3\cdot 36 + (-26) = -134$$

Нагадаємо, що для того, щоб одержати мінор M_{41}, із визначника Δ потрібно викреслити четвертий рядок і перший стовпець, а для M_{42} — четвертий рядок і другий стовпець.

Другий спосіб. Із формул (7) і (8) ясно, що раціональніше розкладати визначник за елементами того стовпця чи рядка, де є нулі. Але у визначнику не завжди є такі елементи. Тому за допомогою властивості 8 перетворюють стовпці або рядки так, щоб з'явились нулі. Так, у даному прикладі помножимо другий стовпець на —3 і додамо до першого. Дістанемо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

\+ - 3

У одержаному визначнику у четвертому рядку є тільки один елемент, що не дорівнює нулеві. Розкладаємо визначник за елементами четвертого рядка:

$$\Delta = 1\cdot(-1)^{4+2}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

Цей визначник третього порядку можна також обчислити, використовуючи властивості 5 та 8. Винесемо 2 (спільний множник) із першого рядка і додамо перший стовпець до третього:

$$\Delta = 2\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

\+

Помножимо перший стовпець на 2 і додамо до другого. Дістанемо

$$\Delta = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 5 & 13 & 6 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix}.$$

В останньому виразі у першому рядку два нульових елементи, тому розкладемо цей визначник за першим рядком. Маємо

$$\Delta = 2 \cdot (-1) \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = -2 \cdot (91 - 24) = -134$$

Можна було б у визначнику одержати елементи, що дорівнюють нулеві, і інакше. Бажано тільки, щоб у кінцевому підсумку у якомусь рядку чи стовпці залишався лише один елемент, що не дорівнює нулеві.

Повернутися до змісту