Самостійна робота № 2.

Тема: Обчислення визначників *n*-го порядку.

Мета: Засвоїти методику обчислення визначників *n*-го порядку.

План занять

1. Обчислення визначників *4*-го порядку.
2. Обчислення визначника *n*-го порядку.

Термінологічний словник ключових понять

Транспонування — зміна місцями рядків і стовпців визначника або матриці.

Мінор k-го порядку — визначник, утворений з елементів визначника або матриці, розміщених на перетині *k* рядків і *k* стовпців.

Алгебраїчне доповнення до мінора — визначник, що складається з елементів, котрі не належать тим рядкам і тим стовпцям визначника, з яких утворено мінор, і береться зі знаком $(-1)^{i_1+\ldots+i_k+j_1+\ldots+j_k}$, де i_1 i_2, ..., i_k, j_1, j_2, ..., j_k, — індекси відповідно тих рядків і тих стовпців, які брали участь в утворенні мінора.

Означення. **Визначником *n*-го порядку** називається величина, яка представлена квадратною таблицею, що складається із n^2 елементів, що розташовані в *n* рядках і *n* стовпцях, і дорівнює сумі добутків всіх елементів будь-якого стовпця (рядка) на їх відповідні алгебраїчні доповнення.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nm} \end{vmatrix} = a_{1j}A_{1j} + \dots + a_{ij}A_{ij} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{4} a_{ij}A_{ij}$$

$$(j = 1, 2, \dots, n). \qquad (9)$$

або

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{ij}A_{ij} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{4} a_{ij}A_{ij} \qquad (10)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n).$$

У формулах (9) записано розклад визначника за елементами j-го стопця, а у (10) — за елементами i-го рядка. Загалом таких розкладів буде $2n$. Алгебраїчне доповнення A_{ij} елемента a_{ij} пов'язане з його мінором M_{ij} формулою (1), тобто

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

де M_{ij} є визначник порядку $(n—1)$, який дістаємо, якщо із даного визначника викреслити i-тий рядок і j-тий стовпець. Отже, у загальному випадку обчислення визначника n-го порядку зводиться до обчислення n визначників $(n—1)$-го порядку.

Легко переконатися, що властивості 1-8,10, для визначника третього порядку, мають місце і для визначника n-го порядку.

Приклад 1. Обчислити визначник четвертого порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Перший спосіб. Згідно з означенням (див. (7), (8)) ми повинні розкласти цей визначник за елементами будь-якого стовпця або рядка і звести його обчислення до обчислення визначників третього порядку. Оберемо для розкладу четвертий рядок. Тоді із (8) при $i = 4$ дістанемо

$$\Delta = 3\cdot A_{41} + 1\cdot A_{42} + 0\cdot A_{43} + 0\cdot A_{44} = 3\cdot A_{41} + A_{42}.$$

Отже, вибір четвертого рядка не був випадковим: у розкладі визначника два доданки, що дорівнюють нулеві, і обчислення звелось до обчислення двох визначників (замість чотирьох) третього порядку.

Враховуючи, що $A_{41} = (—1)^{4+1}M_{41} = — M_{41}$, $A_{42} = (—1)^{4+2}M_{42} = M_{42}$, маємо

$$\Delta = -3\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -3\cdot 36 + (-26) = -134$$

Нагадаємо, що для того, щоб одержати мінор M_{41}, із визначника Δ потрібно викреслити четвертий рядок і перший стовпець, а для M_{42} — четвертий рядок і другий стовпець.

Другий спосіб. Із формул (7) і (8) ясно, що раціональніше розкладати визначник за елементами того стовпця чи рядка, де є нулі. Але у визначнику не завжди є такі елементи. Тому за допомогою властивості 8 перетворюють стовпці або рядки так, щоб з'явились нулі. Так, у даному прикладі помножимо другий стовпець на —3 і додамо до першого. Дістанемо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$+ \quad -3$

У одержаному визначнику у четвертому рядку є тільки один елемент, що не дорівнює нулеві. Розкладаємо визначник за елементами

четвертого рядка:

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{4+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

Цей визначник третього порядку можна також обчислити, використовуючи властивості 5 та 8. Винесемо 2 (спільний множник) із першого рядка і додамо перший стовпець до третього:

$$\Delta = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

$+$

Помножимо перший стовпець на 2 і додамо до другого. Дістанемо

$$\Delta = 2\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 5 & 13 & 6 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix}.$$

В останньому виразі у першому рядку два нульових елементи, тому розкладемо цей визначник за першим рядком. Маємо

$$\Delta = 2\cdot(-1)\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = -2\cdot(91-24) = -134$$

Можна було б у визначнику одержати елементи, що дорівнюють нулеві, і інакше. Бажано тільки, щоб у кінцевому підсумку у якомусь рядку чи стовпці залишався лише один елемент, що не дорівнює нулеві.

Приклад 2.

Обчислити визначник, розклавши його за елементами 3 рядка:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 4 \\ -3 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} + (-2)\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \end{vmatrix} + (-1)\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix} +$$

$$+4\cdot(-1)^{3+4}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & -3 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \ldots$$

Чим більше елементів у рядку (чи стовпчику) визначника дорівнюють нулю, тим простішим є розклад визначника за елементами даного рядка. Ясно, що найпростішим є варіант, коли деякий рядок (стовпчик) містить тільки один ненульовий елемент. Цього можна добитися з допомогою виконання над рядками (стовпчиками) визначника відповідних елементарних перетворень. Зокрема, в деякому *j*-тому стовпчику можна отримати нуль в деякому *i*-му рядку, якщо відняти від *i*-го рядка, наприклад, перший рядок, помножений на $\frac{a_{ij}}{a_{1j}}$, чи другий рядок, помножений на $\frac{a_{ij}}{a_{2j}}$ і т. д.

Приклад 3.

Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 4 \\ -3 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

Розв'язування.

Виберемо 4^{й} стовпчик:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 4 \\ -3 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ -8 & -18 & 11 & 0 \\ -13 & -19 & 15 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{2+4}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -8 & -18 & 11 \\ -13 & -19 & 15 \end{vmatrix} = \ldots$$

Виберемо 4^{й} рядок:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 4 \\ -3 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 5 & 5 \\ 14 & 4 & -3 & -19 \\ -6 & -2 & -1 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{4+2}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 14 & -3 & -19 \\ -6 & -1 & 14 \end{vmatrix} = \ldots$$

Завдання для перевірки знань

1. Обчислити наступні визначники 4-го порядку:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

В: а) –7; б) 0; в) –1; г) –18. ▲

2. Обчислити наступні визначники 4-го порядку:

а) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

В: а) 1; б) –5; в) 0; г) –3. ▲

3. Обчислити наступні визначники 4-го порядку:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 3/4 & 2 & -1/2 & -5 \\ 1 & -2 & 3/2 & 8 \\ 5/6 & -4/3 & 4/3 & 14/3 \\ 2/5 & -4/5 & 1/2 & 12/5 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}$.

В: а) 1; б) 48; в) 1; г) $abcd\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$. ▲

4. Обчислити визначники 4-го порядку:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$.

В: а) –8; б) –9; в) –6; г) –10. ▲

5. Обчислити визначники 5-го порядку:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$. В: а) 52; б) 5. ▲

6. Зведенням до трикутного вигляду обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 3 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -x & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -x & x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -x_1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$.

В: а) $n!$; б) $2n + 1$; в) $x^n (a_0 + a_1 + \ldots + a_n)$; г) $x_1 x_2 \ldots x_n \left(\frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \cdots + \frac{a_n}{x_n} \right)$. ▲

7. Обчислити визначники методом виділення лінійних множників:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -x & a & b & c \\ a & -x & b & c \\ b & c & -x & a \\ c & b & a & -x \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix}$.

В: а) $(x – 1)(x – 2)\ldots(x – n +1)$; б) $(x – a – b – c)(x – a + b + c)(x + a – b + c)(x + a + b – c)$;

в) $(x^2 – 1)(x^2 – 4)$; г) $x^2 z^2$, **вказівка:** визначник не зміниться, якщо 1-й стовпець поміняти місцями з 2-м стовпцем і одночасно 1-й рядок із 2-м рядком; при $x = 0$ визначник дорівнює 0, аналогічно по z. ▲

8. Розв’язати рівняння:

а) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_1+a_2-x & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_2+a_3-x & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1}+a_n-x \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n-x \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1-x & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-x \end{vmatrix}$ (x ÎR).

В: а) $x_i = a_i$, i = 1, 2, … , n – 1; б) $x_i = a_i$, i = 1, 2, … , n; в) x = 0, 1, 2, … , n – 1; г) x = 1. ▲

9. Використовуючи метод рекурентних співвідношень, обчислити визначники: а) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 7 \end{vmatrix}$.

В: а) $-a_1a_2\dots a_n\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_n}\right)$; б) $2^{n+1} - 1$; в) $\frac{5^{n+1}-2^{n+1}}{3}$. ▲

10. Обчислити визначники методом представлення їх у вигляді суми визначників:

а) $\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$.

В: а) $x^n + (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)x^{n-1}$; б) вказівка: x_i º $(x_i - a_i + a_i)$,

$(x_1-a_1)(x_2-a_2)\dots(x_n-a_n)\left(1+\frac{a_1}{x_1-a_1}+\frac{a_2}{x_2-a_2}+\dots+\frac{a_n}{x_n-a_n}\right)$. ▲

11. Обчислити визначники методом зміни елементів визначника:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 1-\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & \cdots & 1-\frac{1}{n} \\ 1-\frac{1}{n} & 2 & 1-\frac{1}{n} & \cdots & 1-\frac{1}{n} \\ 1-\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & 2 & \cdots & 1-\frac{1}{n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1-\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & \cdots & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$.

В: а) $\frac{(n+1)^{n-1}}{n^n}(n^2+1)$; б) $a_1a_2\dots a_n\left(1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_n}\right)$. ▲

12. Обчислити визначники n-го порядку:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 3 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 5 & \cdots & 5 \\ 5 & 3 & 5 & \cdots & 5 \\ 5 & 5 & 3 & \cdots & 5 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 5 & 5 & 5 & \cdots & 3 \end{vmatrix}$.

В: а) 1; б) 3^n; в) 1; г) x^n; д) $1 - n$; е) $(-2)^{n-1}(5n - 2)$. ▲

13. Обчислити визначники n-гопорядку:

а) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

В: а) $(-2)^{n-2}(1 - n)$; б) $n + 1$; в) $(-1)^{n-1}(n - 1)$; г) 1; д) $(1 - (-1)^n)/2$, вказівка: $D_n = 1 - D_{n-1}$; е) 0, якщо $n = 2k + 1$; $(-1)^{n/2}$, якщо $n = 2k$, $k \in \mathbf{Z}$; вказівка: $D_n = -D_{n-2}$. ▲

14. Обчислити визначники n-го порядку:

а) $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \cdots & n-1 & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}$.

В: а) $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n)$; б) $(n-1)!$; в) $(-1)^{n-1.} n!$; г) 0;
д) $(-1)^{(n(n-1))/2} n^{n-1} (n+1)/2$; е) $x^n - C_{n-1}^1 x^{n-2} + C_{n-2}^2 x^{n-4} + \cdots$ ▲