Самостійна робота № 3.

Тема: Ранг матриці.

Мета: Навчитися знаходити ранг матриці.

План занять

1. Відшукання рангу матриці методом обвідних мінорів.
2. Відшукання рангу матриці за допомогою елементарних перетворень.

Термінологічний словник ключових понять

Невироджена матриця — квадратна матриця, визначник якої відмінний від нуля.

Ранг матриці — найвищий порядок відмінного від нуля мінора матриці.

Навчальні завдання

Приклад 1. Знайти ранг матриці A методом обвідних мінорів, якщо

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

● Мінор другого порядку, який міститься в лівому верхньому куті цієї матриці, дорівнює нулю: $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=0$. Проте матриця A має й відмінні від нуля мінори другого порядку, наприклад $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$. Далі запишемо мінор третього порядку, який обводить відмінний від нуля мінор другого порядку:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=1\neq 0.$$

Утворимо тепер обвідні мінори четвертого порядку для мінора третього порядку. Їх існує лише два:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix}=0, \qquad \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix}=0.$$

Обидва вони дорівнюють нулю, а це означає, що ранг початкової матриці дорівнює трьом.

Приклад 2. За допомогою елементарних перетворень знайти ранг матриці

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & -5 & -6 \\ -3 & 1 & -4 & -7 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

● Виконаємо спочатку елементарні перетворення матриці.

1. Поміняємо місцями перший і другий стовпці:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\ 4 & -1 & -5 & -6\\ 1 & -3 & -4 & -7\\ 2 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\ 0 & -9 & -9 & -18\\ 0 & -5 & -5 & -10\\ 0 & -3 & -3 & -6\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -9 & -9 & -18\\ 0 & -5 & -5 & -10\\ 0 & -3 & -3 & -6\end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

2. За аналогією до того, як під час обчислення визначників утворювали нулі в рядках або стовпцях, утворимо нулі в першому стовпці. З цією метою всі елементи першого рядка спочатку помножимо на –4 і додамо до другого рядка, потім — на –1 і додамо до третього рядка і нарешті помножимо на 2 і додамо до четвертого рядка. У результаті дістанемо матрицю, яку в (1.7) записано другою. Помноживши тепер елементи першого стовпця послідовно на –2, –1, –3 і виконавши відповідне додавання, дістанемо останню матрицю в ланцюжку перетворень (1.7).

3. Помноживши другий рядок здобутої матриці на $-\frac{1}{9}$, третій — на $-\frac{1}{5}$, четвертий — на $-\frac{1}{3}$, дістанемо:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Виконаємо знову елементарні перетворення, аналогічні наведеним у п. 2, але візьмемо другий рядок і другий стовпець матриці.

З остаточного вигляду матриці після виконання елементарних перетворень випливає, що її ранг дорівнює 2, оскільки єдиний мінор другого порядку не дорівнює нулю: $\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} \neq 0$. Решта мінорів вищого порядку дорівнюють нулю.

Завдання для перевірки знань

1. Знайти ранг матриць методом обвідних мінорів:

$$\text{а) } \begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & -1\\ 2 & -1 & -3 & 4\\ 5 & 1 & -1 & 7\\ 7 & 7 & 9 & 1\end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix}3 & -1 & 3 & 2 & 5\\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4\\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7\\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1\end{pmatrix}.$$

Відповідь. а) 3; б) 3.

2. Дослідити залежно від значення λ ранг матриць:

$$\text{а) } \begin{pmatrix}3 & 1 & 1 & 4\\ \lambda & 4 & 10 & 1\\ 1 & 7 & 17 & 3\\ 2 & 2 & 4 & 3\end{pmatrix}; \qquad \text{б) } \begin{pmatrix}1 & \lambda & -1 & 2\\ 2 & -1 & \lambda & 5\\ 1 & 10 & -6 & 1\end{pmatrix}.$$

Відповідь. а) якщо $\lambda = 0, r(A) = 2$; якщо $\lambda \neq 0, r(A) = 3$; б) якщо $\lambda = 3, r(A) = 2$; якщо $\lambda \neq 3, r(A) = 3$.

3. Знайти ранг матриць методом елементарних перетворень:

$$
\text{а) } \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix};
$$

$$
\text{в) } \begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{pmatrix}.
$$

Відповідь. а) 2; б) 3; в) 2.

4. Довести, що в результаті приєднання до матриці одного стовпця або рядка її ранг збільшується на одиницю або не змінюється.