Лекція №5. Матриці

1. Основні поняття

Означення. **Матрицею** називається прямокутна таблиця чисел (або елементів однієї природи), розташованих у рядках і стовпцях, тобто таблиця вигляду

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Числа, що утворюють матрицю, називаються її елементами. Вони позначаються однією буквою з двома індексами: a_{ij}, де перший індекс i — номер рядка, а другий індекс j — номер стовпця. Матриці позначаються великими літерами $A, B,...$ і таблиця записується або у круглих (), або у квадратних [ ] дужках, або у подвійних рисках || ||. Якщо матриця A має m рядків і n стовпців (див. (1)), то говорять, що вона вимірності ($m \times n$) і матрицю позначають так:

$$A = ||a_{ij}||\ m\times n = (a_{ij})_{m\times n}$$

Зауважимо, що матриця не має числової величини. Це — умовний спосіб позначення таблиць з числами.

Так, наприклад, наступні таблиці будуть матрицями:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

При цьому матриця A вимірності (2×2), а матриця B — вимірності (2×3).

Вираз $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \end{pmatrix}$ не є матрицею, тому що це не прямокутна таблиця.

Матриця, яка складається із одного рядка і n стовпців або із одного стовпця і n рядків $A = (a_1\ a_2\ ...\ a_n)$ або $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$ називається відповідно вектор-рядком (вимірність $(1\times n)$) або вектор-стовпцем (вимірність $(n\times 1)$).

Взагалі рядки і стовпці матриці можна розглядати як n-вимірні вектори і, отже, поняття матриці — це узагальнення поняття n-вимірного вектора.

Матриця, число рядків якої дорівнює числу стовпців, називається **квадратною матрицею.** Квадратну матрицю з n рядками і n стовпцями, тобто вимірності $(n\times n)$, називають матрицею ***n*-го порядку.** Так, матриця А у попередньому прикладі — це матриця другого порядку.

Із кожною квадратною матрицею А пов'язане число — визначник цієї матриці, який позначається $|A|$ або $det\ A$ — детермінант матриці А (згадаємо, що таблиця, яка визначає визначник, подається у вертикальних рисках).

Нуль-матрицею 0 називається матриця, всі елементи якої дорівнюють нулеві. Наприклад, матриця:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— це нуль-матриця вимірності (2×3).

Квадратна матриця називається **діагональною,** якщо відмінні від нуля лише елементи її головної діагоналі, наприклад, D — діагональна матриця третього порядку:

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix}$$

При цьому, очевидно, визначник такої матриці дорівнює добутку елементів її головної діагоналі:

$$|D| = \begin{vmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{vmatrix} = d_{11}d_{22}d_{33}$$

Діагональна матриця називається **одиничною** матрицею *E,* якщо всі елементи її головної діагоналі дорівнюють одиниці (інші елементи— нулі!):

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Очевидно, що визначник матриці E дорівнює одиниці: $|E| = 1$.

$$|E| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

2. Дії над матрицями

Узагальнимо основні поняття, які введено для n-вимірних векторів, і введемо дії з матрицями.

Означення. Дві матриці A та B однакової вимірності називаються **рівними** $A = B,$ якщо рівні їх відповідні елементи, тобто, якщо $A = (a_{ij})_{m\times n}$ і $B = (b_{ij})_{m\times n}$, то $a_{ij}= b_{ij}$ $(i = 1,2,...m; j = 1,2,...n)$. Наприклад, якщо

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ то A = B

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ то $A \neq B$

Означення **(Лінійні операції над матрицями).**

а) **Сумою** двох матриць A та B однакової вимірності називається матриця $C = A + B$ тієї ж вимірності, кожний елемент якої є сума відповідних елементів матриць A та $B,$ тобто, якщо $A = (a_{шо})_{m\times n}$ та $B = (b_{ij})_{m\times n}$, $C = A+B = (c_{ij})_{m\times n}$, де $c_{ij}= a_{ij}+ b_{ij}$ (для всіх i,j).

б) **Добутком** скаляра λ на матрицю A є матриця $C = \lambda A$ тієї ж вимірності, кожний елемент якої є добуток λ на відповідний елемент матриці $A,$ тобто, якщо $A = (a_{ij})_{m\times n}$, то $C = \lambda A = (c_{ij})_{m\times n}$, де $c_{ij}= \lambda\ a_{y}$, (для всіх i, j).

в)**Лінійною комбінацією** матриць A та B однакової вимірності із скаярами λ_1 і λ_2 називається матриця $C = \lambda_1 A + \lambda_2 B$ тієї ж вимірності,
кожний елемент якої є лінійна комбінація відповідних елементів матриць A та

B із скалярами *Xi* iX_2, тобто, якщо $A = (ay)_{mxn}$, $B = (Ьц)_{mxn}$, то
$C = \lambda_1 A + \lambda_2 B = (c_{ij}) m_x n$, де $c_{ij} = \lambda_1 a_{ij} + \lambda_2 b_{ij}$ (для всіх *i,j*).

Із цього означення випливає, що віднімання двох матриць *A* та *B* однакової вимірності зводиться до віднімання відповідних елементів цих матриць, тобто, якщо $A = (a_{ij})_{m\times n}$ та $B = (b_{ij})_{m\times n}$, то

$$C = A - B = (c_{ij})_{m\times n} = (a_{ij} - b_{ij})_{m\times n}.$$

Підкреслимо, що всі операції визначено лише для матриць однакової вимірності.

Легко перевірити, що лінійні операції з матрицями підкоряються основним законам цих операцій.

1. Переставний закон :

$$A + B = B + A.$$

2. Сполучний закон:

$$(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C,$$

$$\lambda_1(\mu A) = \mu(\lambda_1 A) = \lambda_1 A.$$

3. Розподільний закон:

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B,$$

$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A.$$

4. $$A + 0 = A, A + (-A) = 0.$$

(Нуль матриця 0 тієї ж вимірності, що і *A*).

Приклад. Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Знайти *A + B, 2A, 3A — 2B.*

Розв'язання. Матриці *A* та *B* — однакової вимірності, тому можнавиконувати лінійні операції. Тоді

1). $$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix};$$

2). $$2A = 2\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

3).

$$3A-2B=3\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 5\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-1 & 3 & 1\\ -1 & 3 & 5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}6 & 3 & 0\\ -3 & 3 & 15\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2 & 6 & 2\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -3 & -2\\ -3 & 9 & 11\end{pmatrix}$$

3. Добуток матриць

Розглянемо дві матриці: A вимірності *(m×n)* і B вимірності *(n×r)*, тобто

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1r}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2r}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ir}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nr}\end{pmatrix};$$

$$B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1r}\\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2r}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{ir}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{nr}\end{pmatrix}$$

Означення. **Добутком матриці** A вимірності *(m×n)* на матрицю B вимірності (*n×r* називається матриця $C = A\,B = (c_{ij})_{m\times r}$ кожний елемент c_{ij} якої є добутком *i*-го рядка матриці A *j*-ий стовпець матриці B, тобто

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj} + \ldots + a_{in}b_{nj};$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, r). \qquad (2)$$

У добутку AB матриця A називається лівим множником, а B — правим множником. Із попереднього ясно, що добуток AB можливий лише тоді, коли число стовпців *(n)* лівого множника дорівнює числу рядків *(n)* правого множника. Добуток $C = AB$ має однакову з матрицею A кількість рядків *(m)* і однакову з матрицею *B* кількість стовпців *(r).* Для представлення вимірності добутку може бути

$$A_{m\times n}\,B_{n\times r} = C_{m\times r}$$

Звідси ясно, що із того, що можливим є добуток *AB,* не випливає можливість добутку *BA.* Але навіть тоді, коли можливі обидва добутки *AB* і *BA* (наприклад, якщо *A* та *B* — квадратні матриці одного порядку), результати можуть бути різними, тобто добуток матриць, взагалі кажучи, не переставний

$$AB \neq BA.$$

Зауважимо, що сполучний і розподільний закони при множенні матриць (якщо відповідні операції можливі) мають місце, тобто

$$(AB)C = A(BC)=ABC,$$

$$A\,(B + C)=AB +AC.$$

Приклад. Нехай

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix} \quad \text{і} \quad B=\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\ 4 & 5 & 2\end{pmatrix}$$

знайти *AB.* **Розв'язання.**

$$AB=\begin{pmatrix}1\cdot 3+2\cdot 4 & 1\cdot 0+2\cdot 5 & 1\cdot(-1)+2\cdot 2\\ (-1)\cdot 3+3\cdot 4 & (-1)\cdot 0+3\cdot 5 & (-1)\cdot(-1)+3\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 10 & 3\\ 9 & 15 & 7\end{pmatrix}$$

Матриця *A* вимірності (2×2), а *B* — вимірності (2×3). Одержуємо матрицю *AB* вимірності (2×3).

Зауважимо, що виконати множення *BA* неможливо.

При множенні матриць для зручності обирають послідовність, у якій проводиться множення матриць. Наприклад, перший рядок матриці *A* множиться послідовно на всі стовпці матриці *B.* В результаті дістаємо перший рядок матриці *AB.* Потім, другий рядок матриці *A* множиться послідовно на всі стовпці матриці *B.* Одержуємо другий рядок матриці *AB* тощо.

Приклад. Нехай $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 3\\ 4\end{pmatrix}$

Знайти *AB* і *BA*

Розв'язання. Маємо AB = (1 (—1) + 2 2 + 0 3 + 1 4) = (7), тобто добуток вектор-рядка на вектор-стовпець є матриця, що складається із одного елемента. Знайдемо BA. Маємо

$$BA=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\cdot 1 & -1\cdot 2 & -1\cdot 0 & -1\cdot 1\\ 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 0 & 2\cdot 1\\ 3\cdot 1 & 3\cdot 2 & 3\cdot 0 & 3\cdot 1\\ 4\cdot 1 & 4\cdot 2 & 4\cdot 0 & 4\cdot 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0 & -1\\ 2 & 4 & 0 & 2\\ 3 & 6 & 0 & 2\\ 4 & 8 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

Обидва добутки AB і BA визначені, але вони абсолютно різні.

4. Обернена матриця

Нехай A — квадратна матриця, а E — одинична матриця того самого порядку. Тоді

$$AE = EA = A.$$

Переконаємося у цьому на прикладі матриць другого порядку. Маємо

$$AE=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\cdot 1+a_{12}\cdot 0 & a_{11}\cdot 0+a_{12}\cdot 1\\ a_{21}\cdot 1+a_{22}\cdot 0 & a_{21}\cdot 0+a_{22}\cdot 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=A$$

Аналогічно переконаємося, що $EA = A$.

Розглянемо квадратну матрицю A і введемо поняття оберненої до неї матриці. Згадаємо, що, якщо $a \neq 0$ — дійсне число, то існує число $a^{-1} = 1/a$, яке називається оберненим до a, і $a\ a' = 1$.

Означення. Нехай дана квадратна матриця A. Якщо існує квадратна матриця B така, що $AB = BA = E$, то матриця B називається **оберненою** до A і позначається $B = A^{-1}$, так що

$$AA^{-1}=A^{-1}A = E. \qquad (3)$$

Зауважимо, що $A^{-1} \neq 1/A$, оскільки операція ділення для матриць (так само, як і для векторів) не визначена.

Виникає питання, коли матриця A має обернену A^{-1} (для дійсного числа a це умова: $a \neq 0$).

Означення. Квадратна матриця A називається **невиродженою,** якщо її визначник $|A| \neq 0$ і **виродженою,** якщо $|A| = 0$.

Приймемо без доведення твердження: будь-яка невироджена квадратна матриця A ($|A| \neq 0$) має обернену A^{-1}. Шукається матриця A^{-1} за алгоритмом, описаним нижче. Для того, щоб зрозуміти цей алгоритм, потрібно попередньо згадати, що таке визначник $|A|$, алгебраїчне доповнення A_{ij} до елемента a_{ij} і що таке операція транспонування визначника. Аналогічно визначається транспонування матриці і алгебраїчне доповнення A_{ij} до елемента a_{ij} матриці A.

Алгоритм знаходження матриці, оберненої до матриці A

Нехай дана квадратна матриця. Для спрощення будемо алгоритм ілюструвати на матриці третього порядку

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

1. Знаходимо визначник $|A|$. Якщо $|A| = 0$, то матриця A не має оберненої. Якщо $|A| \neq 0$, то переходимо до п.2.
2. Знаходимо матрицю A^*, складену із алгебраїчних доповнень до елементів матриці A, тобто

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

3. Знаходимо матрицю, транспоновану до матриці A^*, яку називають приєднаною $A^{ПР}$ до матриці A:

$$\left(A^*\right)^{TP} = A^{ПР} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

4. Знаходимо матрицю A^{-1}, обернену до матриці A, за формулою:

$$A^{-1} = A^{ПР}/|A| \qquad (4)$$

Переконаємося, що для матриці A і матриць A^{-1}, визначеної за формулою (4), виконується рівність (3), тобто A^{-1} дійсно є оберненою до A. Зробимо це для матриць третього порядку. Для цього знайдемо добуток AA^{-1} (див. (1)). Дістанемо:

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}\div|A|=$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} & a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23} & a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33} \\ a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+a_{23}A_{13} & a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23} & a_{21}A_{31}+a_{22}A_{32}+a_{23}A_{33} \\ a_{31}A_{11}+a_{32}A_{12}+a_{33}A_{13} & a_{31}A_{21}+a_{32}A_{22}+a_{23}A_{23} & a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33} \end{pmatrix}\cdot$$

$$\cdot 1/|A|$$

Враховуючи властивості 9 і 10 визначників, переконуємося, що у цій матриці елементи, що стоять на головній діагоналі, дорівнюють $|A|$, а всі інші елементи дорівнюють нулеві, тобто:

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix}\cdot 1/|A|=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E$$

Приклад. Дано $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Знайти A^{-1}

Розв'язання. Згідно з алгоритмом знаходимо:

1. $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=5\neq 0$ Отже, матриця A невироджена і має обернену

2. $A^{*}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; 3. $A^{ПР}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

4. $A^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot 1/5=\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$