Самостійна робота № 4.

Тема: Обернені матриці.

Мета: Навчитися знаходити обернені матриці.

План занять

1. Відшукання оберненої матриці 2-го порядку.
2. Відшукання оберненої матриці 3-го порядку.

Термінологічний словник ключових понять

Невироджена матриця — квадратна матриця, визначник якої відмінний від нуля.

Обернена матриця до А — матриця A^{-1} така, що $AA^{-1}=A^{-1}A = E$.

Алгоритм знаходження матриці, оберненої до матриці A

Нехай дана квадратна матриця. Для спрощення будемо алгоритм ілюструвати на матриці третього порядку

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

1. Знаходимо визначник $|A|$. Якщо $|A| = 0$, то матриця A не має оберненої. Якщо $|A| \neq 0$, то переходимо до п.2.
2. Знаходимо матрицю A^*, складену із алгебраїчних доповнень до елементів матриці A, тобто

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

3. Знаходимо матрицю, транспоновану до матриці A^*, яку називають приєднаною $A^{ПР}$ до матриці A:

$$\left(A^*\right)^{TP}=A^{ПР}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

4. Знаходимо матрицю A^{-1}, обернену до матриці A, за формулою:

$$A^{-1} = A^{ПР}/|A|$$

Навчальні завдання

Приклад. Дано $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$. Знайти A^{-1}

Розв'язання. Згідно з алгоритмом знаходимо:

1. $|A|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{vmatrix}=5\neq 0$ Отже, матриця *A* невироджена і має обернену

2. $A^*=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$; 3. $A^{ПР}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$;

4. $A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot 1/5=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{2}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$

Приклад. Побудувати матрицю, обернену до матриці $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}$.

- Обчислимо:

$\Delta(A)=\begin{vmatrix}3 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 10 & -5 & 0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}3 & -1\\ 10 & -5\end{vmatrix}=15-10=5$. $\Delta(A)\neq 0$ — обернена матриця існує.

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 4\end{vmatrix}=5,\ A_{12}=-\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 2 & 4\end{vmatrix}=10,\ A_{13}=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=0,\ A_{21}=-\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -1 & 4\end{vmatrix}=4,\ A_{22}=\begin{vmatrix}3 & 0\\ 2 & 4\end{vmatrix}=12,$$

$$A_{23}=-\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=1,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1,\ A_{32}=-\begin{vmatrix}3 & 0\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-3,\ A_{33}=\begin{vmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{vmatrix}=1.$$

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5 & 4 & -1\\ 10 & 12 & -3\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5}\\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5}\\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}.$$

Переконаємося, що матриця A^{-1}, побудована нами, справді є оберненою до матриці *A*. Знайдемо AA^{-1}:

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5}\\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5}\\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Завдання для перевірки знань

Знайти матриці, обернені до матриць:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{г) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Результат перевірити множенням.