Самостійна робота № 5.

Тема: Розв’язування системи лінійних рівнянь за теоремою Кронекера—Капеллі.
Мета: Навчитися розв’язувати системи лінійних рівнянь за допомогою теореми Кронекера—Капеллі.

План занять

1. Застосування теореми Кронекера—Капеллі для розв’язування системи лінійних рівнянь.
2. Розв’язування однорідних систем рівнянь.

Термінологічний словник ключових понять

Головна матриця системи рівнянь — матриця, складена з коефіцієнтів при невідомих.
Розширена матриця — до головної матриці приєднано стовпець вільних членів.

Навчальні завдання

1. Розв’язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

- Знайдемо ранги матриць A і $\overline{A}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 16 & -12 & 1 \\ 0 & 14 & 32 & -24 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right).$$

Ліворуч від вертикальної риски маємо головну матрицю A. Вилучивши риску, дістанемо розширену матрицю $\overline{A}$. Такий запис дає змогу одночасно обчислювати ранги обох матриць за допомогою елементарних перетворень. З останнього перетворення випливає, що ранг матриці A дорівнює 2. Ранг матриці $\overline{A}$ дорівнює 3. Тобто $rang(A) \neq rang(\overline{A})$. За теоремою Кронекера—Капеллі така система не має розв’язків (несумісна).

2. Розв’язати за допомогою теореми Кронекера—Капеллі систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

- $$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 7 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -7 & -7 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

З останнього перетворення випливає, що $rang(A) = rang(\overline{A}) = 2$. Початкова система еквівалентна системі: $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4 \end{cases}$. Серед мінорів другого порядку, складених з елементів матриці коефіцієнтів при невідомих, існує хоча б один відмінний від нуля. У нашому випадку їх кілька. Якщо відмінний від нуля мінор виберемо з коефіцієнтів при двох невідомих, то таким чином ми переведемо ці невідомі в розряд основних. Нехай, наприклад, це невідомі x_1, x_2. Тоді, перенісши решту невідомих у праву частину системи рівнянь, дістанемо: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 + 2x_3 + x_4 - x_5 \\ 3x_1 - x_2 = 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5 \end{cases}$. Головний визначник цієї системи $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$. Знайдемо Δ_1 і Δ_2.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 + 2x_3 + x_4 - x_5 & 1 \\ 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5 & -1 \end{vmatrix} = -5 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 + 2x_3 + x_4 - x_5 \\ 3 & 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5 \end{vmatrix} = 1 - 7x_3 - 7x_4.$$

За правилом Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{5}{4} + \frac{x_3}{4} - \frac{3x_4}{4} - x_5, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{1}{4} + \frac{7x_3}{4} + \frac{7x_4}{4}.$$

Останні рівності визначають загальний розв’язок системи рівнянь. Щоб дістати частинні розв’язки, достатньо надати вільним невідомим x_3, x_4, x_5 деяких числових значень. Наприклад, якщо $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, маємо розв’язок $\left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}, 0, 0, 0\right)$; якщо $x_3 = 2$, $x_4 = 1$, $x_5 = -2$ — розв’язок (3, 5, 2, 1, –2) і т. д. Таких частинних розв’язків у даному разі можна побудувати нескінченну кількість.

Останню систему рівнянь можна розв’язати і методом оберненої матриці, побудувавши обернену для матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Справді, $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, а тому:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 + 2x_3 + x_4 - x_5 \\ 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} + \frac{x_3}{4} - \frac{3x_4}{4} - x_5 \\ -\frac{1}{4} + \frac{7x_3}{4} + \frac{7x_4}{4} \end{pmatrix}.$$

Прирівнявши відповідні елементи матриць, дістанемо попередній результат.

3. Знайти фундаментальну систему розв’язків системи рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 9x_4 - x_5 = 0 \end{cases}.$$

- Знайдемо ранг матриці A:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -8 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2 \\ 1 & 11 & -12 & 34 & -5 \\ 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 1 & 3 & -5 & 9 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -8 & 7 & -25 & 4 \\ 0 & -8 & 7 & -25 & 4 \\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4 \\ 0 & -8 & 7 & -25 & 4 \\ 1 & 3 & -5 & 9 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, $rang(A) = 2$. Залишаємо в системі останні два рівняння і переносимо доданки з вільними невідомими в праву частину системи:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 = -2x_3 + 16x_4 - 3x_5 \\ x_1 + 3x_2 = 5x_3 + 9x_4 - x_5. \end{cases}$$

Знаходимо загальний розв’язок: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8$;

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2x_3 + 16x_4 - 3x_5 & -5 \\ 5x_3 + 9x_4 - x_5 & 3 \end{vmatrix} = 19x_3 + 3x_4 - 4x_5;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2x_3 + 16x_4 - 3x_5 \\ 1 & 5x_3 + 9x_4 - x_5 \end{vmatrix} = 7x_3 - 25x_4 + 4x_5;$$

$$x_1 = \frac{19}{8}x_3 + \frac{3}{8}x_4 - \frac{1}{2}x_5, \ x_2 = \frac{7}{8}x_3 - \frac{25}{8}x_4 + \frac{1}{2}x_5.$$

Щоб знайти фундаментальну систему розв'язків, потрібно вибрати довільний відмінний від нуля визначник. Надамо йому найпростішого вигляду: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. Беручи рядки цього визначника як значення вільних невідомих, дістанемо три розв'язки, які утворюють фундаментальну систему розв'язків:

$$\left(\frac{19}{8},\ \ \frac{7}{8},\ \ 1,\ \ 0,\ \ 0\right);\ \left(\frac{3}{8},\ \ \frac{-25}{8},\ \ 0,\ \ 1,\ \ 0\right);\ \left(\frac{-1}{2},\ \ \frac{1}{2},\ \ 0,\ \ 0,\ \ 1\right).$$

Завдання для перевірки знань

1. Розв'язати за теоремою Кронекера—Капеллі:

а) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2 \end{cases}$

в) $\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8 \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3 \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7 \end{cases}$

Відповідь. а) $x_3 = 6 - 15x_1 + 10x_2; x_4 = -7 + 18x_1 - 2x_2;$ б) система несумісна; в) $x_3 = 2 - \frac{27}{13}x_1 + \frac{9}{13}x_2$, $x_4 = -1 + \frac{3}{13}x_1 - \frac{1}{13}x_2$; г) $x_1 = -\frac{6}{7} + \frac{8}{7}x_4$, $x_2 = \frac{1}{7} - \frac{13}{4}x_4$, $x_3 = \frac{15}{7} - \frac{6}{7}x_4$.

2. Дослідити на сумісність системи залежно від λ. У разі сумісності знайти розв'язок:

а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 5 \\ x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 20x_4 = -11 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + \lambda x_4 = 2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9 \\ \lambda x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11 \end{cases}$

в) $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1 \end{cases}$ г) $\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda^2 \end{cases}$

Відповідь. а) При $\lambda = 0$ система несумісна; при $\lambda \neq 0$ $x_1 = \frac{4-\lambda}{5\lambda} - \frac{3}{5}$, $x_2 = \frac{9\lambda - 16}{5\lambda} - \frac{8}{5}x_3$; б) система сумісна при будь-якому λ; при $\lambda = 8$, $x_2 = 4 + 2x_1 - 2x_4, x_3 = 3 - 2x_4$; при $\lambda \neq 8$, $x_1 = 0, x_2 = 4 - 2x_4, x_3 = 3 - 2x_4$; в) при $(\lambda - 1)(\lambda + 2) \neq 0$

система має єдиний розв’язок $x_1 = x_2 = x_3 = \dfrac{1}{\lambda + 3}$; при $\lambda = 1, x_1 = 1 - x_2 - x_3$; при $\lambda = -2$ система несумісна; г) при $\lambda(\lambda + 3) \neq 0$ система має єдиний розв’язок $x_1 = \dfrac{2 - \lambda^2}{\lambda(\lambda + 3)}, x_2 = \dfrac{2\lambda - 1}{\lambda(\lambda + 3)}, x_3 = \dfrac{\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 1}{\lambda(\lambda + 3)}$; при $\lambda = 0$ і $\lambda = -3$ система несумісна.