Самостійна робота № 6.

Тема: Метод Жордана—Гаусса для розв'язування системи лінійних рівнянь.
Мета: Навчитися розв'язувати системи лінійних рівнянь за допомогою методу Жордана—Гаусса.

План занять

1. Засвоєння методу Жордана—Гаусса.
2. Фундаментальна система розв'язків систем рівнянь.

Термінологічний словник ключових понять

Головна матриця системи рівнянь — матриця, складена з коефіцієнтів при невідомих.

Розширена матриця — до головної матриці приєднано стовпець вільних членів.

Розв'язувальний елемент — відмінний від нуля коефіцієнт при невідомій, яка виключається згідно з процедурою Жордана—Гаусса.

Навчальні завдання

1. Розв'язати методом Жордана—Гаусса систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \\ 3x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13 \end{cases}$$

- Складемо спочатку відповідну таблицю:

x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	$\sum$	*contr*
3	4	$\boxed{1}$	2	3	13	
6	8	2	5	7	28	
9	12	3	10	13	47	
3	4	1	2	3	13	13
0	0	0	$\boxed{1}$	1	2	2
0	0	0	4	4	8	8
3	4	1	0	1	9	9
0	0	0	1	1	2	2
0	0	0	0	0	0	0

1. Розв'язувальним елементом оберемо коефіцієнт при x_3 в першому рівнянні. Він єдиний дорівнює одиниці (у рамці).
2. Розв'язувальний рядок (перший) і розв'язувальний стовпець відразу записуємо в таблицю.

3. Заповнюємо другий рядок таблиці, використовуючи формулу (1.15). Почнемо з елемента b_{21}. У попередній таблиці знаходимо елементи, що стоять на перетині першого та другого рядків з першим та третім стовпцями і утворюємо з них визначник: $b_{21}=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}=0$. Нагадаємо, що добуток розв'язувального елемента на той, що стоїть на його діагоналі, завжди береться зі знаком «+». Аналогічно для знаходження b_{22} маємо визначник $b_{22}=\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}=0$; для $b_{24}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=1$; $b_2^*=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$.

Далі робимо перевірку. Знаходимо за аналогічним правилом елемент, що має стояти у другому рядку і в стовпці $\sum$. Це буде $\begin{vmatrix} 1 & 13 \\ 2 & 28 \end{vmatrix}=2$. Записуємо це значення у стовпець *contr*. Обчислюємо суму елементів, що стоять у другому рядку до стовпця $\sum$: $0+0+1+1=2$. Здобута сума збігається з відповідним елементом стовпця *contr*, тому коефіцієнти другого рядка таблиці знайдено правильно.

4. Аналогічно попередньому знаходимо елементи третього рядка:

$$b_{31}=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 3 \end{vmatrix}=0, b_{32}=\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 12 & 3 \end{vmatrix}=0, b_{34}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 10 \end{vmatrix}=4, b_3^*=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 13 \end{vmatrix}=4,$$

$$contr \to \begin{vmatrix} 1 & 13 \\ 3 & 47 \end{vmatrix}=8 \quad \sum=0+0+4+4=8.$$

Діставши таким чином коефіцієнти b_{kl}, запишемо їх у таблицю нижче від першої горизонтальної риски. На перетині другого рядка і четвертого стовпця цієї таблиці стоїть 1. Оберемо її за новий розв'язувальний елемент. Виконавши процедуру знаходження b_{kl}, дістанемо остаточну таблицю коефіцієнтів системи рівнянь. У ній усі елементи третього рядка дорівнюють нулю, тому зробити ще один крок процедури Жордана—Гаусса неможливо. Ми зробили два кроки за методом Жордана—Гаусса, тому $rang(A)=2$. На перетині третього рядка і стовпця b_i також стоїть нуль, тому $rang(\overline{A})=2$. Отже, система рівнянь сумісна. З останньої таблиці утворимо систему рівнянь $\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3=1 \\ x_4=1 \end{cases}$, з якої знайдемо загальний розв'язок: $x_3=1-3x_1-4x_2;\quad x_4=1.$

2. Дослідити систему і знайти загальний розв'язок залежно від λ.

$$\begin{cases} 5x_1-3x_2+2x_3+4x_4=3 \\ 4x_1-2x_2+3x_3+7x_4=1 \\ 8x_1-6x_2-x_3-5x_4=9 \\ 7x_1-3x_2+7x_3+17x_4=\lambda. \end{cases}$$

Побудуємо таблицю за методом Жордана—Гаусса:

x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	$\sum$	*contr*
5	–3	2	4	3	11	
4	–2	3	7	1	13	
8	–6	–1	–5	9	5	
7	–3	7	17	λ	28 + λ	
21	–15	0	–6	21	21	21
28	–20	0	–8	28	28	28
–8	6	1	5	–9	–5	–5

63	–45	0	–18	λ + 63	λ + 63	λ + 63
$-\frac{7}{2}$ 0 $\frac{19}{2}$ 0	$\frac{5}{2}$ 0 $-\frac{13}{2}$ 0	0 0 1 0	1 0 0 0	$-\frac{7}{2}$ 0 $\frac{17}{2}$ λ	$-\frac{7}{2}$ 0 $\frac{25}{2}$ λ	$-\frac{7}{2}$ 0 $\frac{25}{2}$ λ

Зроблено два кроки перетворень за методом Жордана—Гаусса. Це означає, що $rang(A)=2$. Розглянемо останній рядок таблиці перетворень. Якщо $\lambda \neq 0$, то $rang(\overline{A}) \neq 2$ і система рівнянь несумісна. При $\lambda = 0$, $rang(\overline{A})=2$ система сумісна. За таблицею дістаємо систему рівнянь: $\begin{cases} -\frac{7}{2}x_1 + \frac{5}{2}x_2 + x_4 = -\frac{7}{2} \\ \frac{19}{2}x_1 - \frac{13}{2}x_2 + x_3 = \frac{17}{2} \end{cases}$. Невідомі x_3, x_4 — головні, а отже, маємо загальний розв'язок: $x_3 = \frac{17}{2} - \frac{19}{2}x_1 + \frac{13}{2}x_2$; $x_4 = -\frac{7}{2} + \frac{7}{2}x_1 - \frac{5}{2}x_2$.

Завдання для перевірки знань

1. Розв'язати методом Жордана—Гаусса:

а) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1 \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 6 \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ -9x_1 + 7x_2 - 2x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$

ґ) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \\ 6x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$ д) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 11 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 6 \end{cases}$

Відповідь. а) $x_1 = \frac{1}{11}(x_3 - 9x_4 - 2)$; $x_2 = \frac{1}{11}(-5x_1 + x_4 + 10)$;

б) $x_3 = 22x_1 - 33x_2 - 11$; $x_4 = -16x_1 + 24x_2 + 8$;

в) $x_1 = \frac{1}{2}(-3 - 2x_2 + 3x_5)$, $x_3 = \frac{1}{2}(3 - 3x_5)$, $x_4 = 1$;

г) $x_1 = \frac{31}{4}$, $x_2 = \frac{103}{4}$, $x_3 = \frac{215}{4}$, $x_4 = 0$;

ґ) $x_3 = -1 - 8x_1 + 4x_2$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1 + 2x_1 - x_2$;

д) $x_3 = -\frac{9}{2} - x_1 - 2x_2$, $x_4 = -\frac{25}{2} - 2x_1 - 4x_2$, $x_5 = -\frac{15}{2} - 2x_1 - 4x_2$.

2. Дослідити на сумісність системи залежно від λ. У разі сумісності знайти розв'язок:

а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 5 \\ x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 20x_4 = -11 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + \lambda x_4 = 2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9 \\ \lambda x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11 \end{cases}$

в) $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1 \end{cases}$ г) $\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda^2 \end{cases}$

Відповідь. а) При $\lambda = 0$ система несумісна; при $\lambda \neq 0$ $x_1 = \frac{4-\lambda}{5\lambda} - \frac{3}{5}$, $x_2 = \frac{9\lambda - 16}{5\lambda} - \frac{8}{5}x_3$; б) система сумісна при будь-якому λ; при $\lambda = 8$, $x_2 = 4 + 2x_1 - 2x_4, x_3 = 3 - 2x_4$; при $\lambda \neq 8$, $x_1 = 0, x_2 = 4 - 2x_4, x_3 = 3 - 2x_4$; в) при $(\lambda-1)(\lambda+2) \neq 0$ система має єдиний розв'язок $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{\lambda+3}$; при $\lambda = 1, x_1 = 1 - x_2 - x_3$; при $\lambda = -2$ система несумісна; г) при $\lambda(\lambda+3) \neq 0$ система має єдиний розв'язок $x_1 = \frac{2-\lambda^2}{\lambda(\lambda+3)}, x_2 = \frac{2\lambda-1}{\lambda(\lambda+3)}, x_3 = \frac{\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 1}{\lambda(\lambda+3)}$; при $\lambda = 0$ і $\lambda = -3$ система несумісна.

3. Знайти фундаментальну систему розв'язків:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0 \\ 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 0 \\ 6x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$

Відповідь. а) $x_1 = 8x_3 - 7x_4$; $x_2 = -6x_3 + 5x_4$;

x_1	x_2	x_3	x_4
8	–6	1	0
–7	5	0	1

б) $x_4 = \frac{1}{11}(-9x_1 + 3x_2 - 10x_3)$; $x_5 = \frac{1}{11}(-3x_1 + x_2 + 4x_3)$;

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	0	0	$-\frac{9}{11}$	$-\frac{3}{11}$
0	1	0	$\frac{3}{11}$	$\frac{1}{11}$
0	0	1	$-\frac{10}{11}$	$\frac{4}{11}$

в) $x_1 = x_4 - x_5$; $x_2 = x_4 - x_6$; $x_3 = x_4$;

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	1	1	1	0	0
–1	0	0	0	1	0
0	–1	0	0	0	1