Самостійна робота № 7.

Тема: Лінійно залежні і лінійно незалежні вектори. Базис. Власні числа і власні вектори лінійного перетворення.
Мета: Навчитись знаходити матриці лінійного перетворення, власні чисела і власні вектори лінійного перетворення, зводити матриці до діагонального вигляду.

План занять

1. Знаходження матриці лінійного перетворення.
2. Знаходження власних чисел і власних векторів лінійного перетворення.
3. Зведення матриці до діагонального вигляду.

Термінологічний словник ключових понять

Базис векторного простору V_n — система n лінійних незалежних векторів.

Власний вектор лінійного перетворення матриці — вектор, що задовольняє рівняння $\varphi\vec{b} = A\vec{b} = \lambda_0\vec{b}$.

Власне число лінійного перетворення φ, якому відповідає матриця A — корінь рівняння $|A - \lambda E| = 0$.

Лінійно залежні і лінійно незалежні вектори. Базис. Власні числа і власні вектори лінійного перетворення.

Означення. Сукупність упорядкованих систем з n дійсних чисел, для яких визначено дії додавання і множення на число, утворює *n-вимірний векторний простір* V_n.

Елементами заданого таким чином простору будуть впорядковані системи чисел, які називатимемо *n-вимірними векторами* і записуватимемо: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$. Числа a_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ називаються *компонентами вектора* $\vec{a}$. Якщо розглянути ще один елемент простору V_n — вектор $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n)$, то у просторі V_n можна виконувати такі дії.

Додавання двох векторів за правилом:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n).$$

Множення вектора на число α, $\alpha \in R$, за правилом:

$$\alpha\vec{a} = (\alpha\vec{a}_1, \alpha\vec{a}_2, \alpha\vec{a}_3, \ldots, \alpha a_n).$$

Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вважаються *рівними*, якщо виконуються рівності $a_i = b_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Роль нуля відіграє $\vec{0} = (0, 0, \ldots, 0)$. З означень дій додавання і множення вектора на число випливають властивості:

$$\alpha(\vec{a} \pm \vec{b}) = \alpha\vec{a} \pm \alpha\vec{b};\ \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a};\ 1 \cdot \vec{a} = \vec{a};$$
$$(\alpha \pm \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} \pm \beta\vec{a};\ (-1)\vec{a} = -\vec{a};\ \vec{a} + (-\vec{a}) = 0.$$

Означення. Вектор $\vec{b}$ називається *лінійною комбінацією векторів* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_s$, якщо існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, що $\vec{b} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_s\vec{a}_s$.

Система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_r$ називається *лінійно залежною*, якщо існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, хоча б одне з яких відмінне від нуля, що виконується рівність

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_r \vec{a}_r = 0. \qquad (1)$$

Якщо рівність (1.16) можлива лише в разі, коли всі $\alpha_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, r$, то система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_r$ називається *лінійно незалежною*.

Постає запитання: а чи існують взагалі системи лінійно незалежних векторів? Розглянемо систему векторів в *n*-вимірному просторі V_n:

$$\begin{aligned} &\vec{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \\ &\vec{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \\ &\ldots \\ &\vec{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1), \end{aligned}$$

яку далі називатимемо *одиничною* системою векторів. Покажемо, що така система векторів лінійно незалежна. Для цього утворимо лінійну комбінацію: $\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{e}_n = 0$. Ліва частина цієї рівності є вектор $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0$. Звідси випливає, що всі $\alpha_i = 0, \ i = 1, 2, \ldots, n$.

Згодом побачимо, що у просторі V_n існує безліч лінійно незалежних систем векторів.

Сформулюємо таке важливе твердження.

Будь-яка система векторів, що складається з більшої кількості векторів, ніж розмірність простору V_n, буде лінійно залежною.

Лінійно незалежна система *n*-вимірних векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \ldots, \vec{a}_s$ називається *максимальною,* або *повною,* лінійно незалежною системою, якщо в результаті додавання до неї будь-якого відмінного від $\vec{0}$ *n*-вимірного вектора $\vec{b}$ вона стає лінійно залежною.

З розглянутого твердження випливає, що **в *n*-вимірному просторі кожна лінійно незалежна система, яка складається з *n* векторів, буде максимальною, а також будь-яка максимальна, лінійно незалежна система векторів у цьому просторі складається з *n* векторів**.

Означення. Базисом векторного простору V_n називається будь-яка максимальна (повна) лінійно незалежна система векторів цього простору. Так, систему векторів:

$$\begin{aligned} &\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \\ &\vec{e}_2 = (0, 1, 0), \\ &\vec{e}_3 = (0, 0, 1) \end{aligned}$$

можна розглядати як базис простору V_3.

Розглянемо дві системи векторів:

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \ldots, \vec{a}_r, \qquad (2)$$

$$\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \ldots, \vec{b}_s. \qquad (3)$$

Система векторів (3) *лінійно виражається через систему векторів* (2), якщо кожний із них є лінійною комбінацією системи (2), тобто $\vec{b}_i = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij} \vec{a}_j, \ i = 1, 2, \ldots, s$.

Дві системи векторів називаються *еквівалентними*, якщо кожна з них виражається лінійно через іншу.

Кількість векторів, що входять до будь-якої максимальної лінійно незалежної підсистеми даної системи векторів, називається *рангом* цієї системи.

Ранг системи векторів має відповідний зв'язок з рангом матриці. Якщо, наприклад, із компонентів векторів системи (2) утворити матрицю $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} \end{pmatrix}$, то її ранг дорівнюватиме рангу системи векторів і вказуватиме на максимальну кількість лінійно незалежних векторів-рядків (стовпців) цієї матриці. Отже, з рангом можна пов'язати і максимальну кількість лінійно незалежних рівнянь у системі лінійних рівнянь.

Зв'язок між базисами

Простір V_n має базис:

$$\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3,\ \dots,\ \vec{e}_n\,. \tag{4}$$

Якщо взяти довільний вектор $\vec{a}\in V_n$, то з максимальності лінійно незалежної системи векторів (1.19) випливає, що

$$\vec{a}=\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2+\ldots+\alpha_n\vec{e}_n\,, \tag{5}$$

де хоча б одне з α_i відмінне від нуля.

Отже, вектор $\vec{a}$ є лінійною комбінацією векторів базису. Можна показати, що вираз (5) — єдиний для вектора $\vec{a}$.

Нехай у просторі V_n задано два базиси:

$$\boldsymbol{e}:\ \vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\dots,\vec{e}_n, \tag{6}$$

$$\boldsymbol{e}':\ \vec{e}_1',\ \vec{e}_2',\ \vec{e}_3',\ \dots,\ \vec{e}_n'. \tag{7}$$

Кожен вектор *нового базису* (7) однозначно можна аналогічно (5) подати через базис (6) у вигляді

$$\vec{e}_j' = \sum_{i=1}^{n} t_{ij}\vec{e}_i,\ \ j=1,\,2,\,\dots,\,n. \tag{8}$$

Означення. Матрицю $T=\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}$, стовпцями якої є координати векторів нового базису (7) у старому базисі (6), називатимемо *матрицею переходу від базису* ***e*** до базису $\boldsymbol{e}'$.

Якщо розглянути дві матриці ***e*** і $\boldsymbol{e}'$, стовпцями яких є компоненти векторів відповідно старого ***e*** і нового $\boldsymbol{e}'$ базисів, то рівність (8) можна записати в матричному вигляді:

$$e'=eT\,. \tag{9}$$

Водночас, якщо T' — матриця переходу від базису (1.22) до базису (6), маємо рівність:

$$e=e'T'\,. \tag{10}$$

Скориставшись (1.24) і (1.25), запишемо:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{e}'=(\boldsymbol{e}'T')T=\boldsymbol{e}'(T'T)\Rightarrow T'T=E \\ \boldsymbol{e}=(\boldsymbol{e}T)T'=\boldsymbol{e}(TT')\Rightarrow TT'=E \end{aligned}\right\}\Rightarrow T'T=TT'=E\Rightarrow T'=T^{-1}.$$

З останньої рівності випливає, що **матриця переходу від одного базису до іншого завжди є невиродженою матрицею, а кількість базисів у V_n дорівнює кількості невироджених квадратних матриць. Якщо є два базиси, то матриці переходу від одного до іншого взаємно обернені**.

Нехай в V_n задано два базиси (6) і (7) з матрицею переходу $T = (t_{ij})$. Зв'язок між координатами довільного вектора $\vec{x}$ у цих двох базисах подається формулою:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}. \qquad (11)$$

Помноживши рівність (1.26) зліва на матрицю T^{-1}, дістанемо:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad (12)$$

звідки можна визначити координати вектора в новому базисі $\boldsymbol{e}'$.

Лінійні перетворення

Нехай задано векторний простір V_n і вектори $\vec{a}$ і $\vec{a}'$ — деякі елементи цього простору.

Означення. Перетворення φ, яке переводить кожен вектор $\vec{a} \in V_n$ у деякий вектор $\vec{a}' \in V_n$, такий що $\vec{a}' = \varphi\vec{a}$, де вектор $\vec{a}'$ є *образом* вектора $\vec{a}$, *називається лінійним*, якщо виконуються властивості:

$$1.\ \varphi\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \varphi\vec{a} + \varphi\vec{b}. \qquad 2.\ \varphi(\alpha\vec{a}) = \alpha(\varphi\vec{a}).$$

З означення випливає:

$$\varphi(\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n) = \alpha_1(\varphi\vec{a}_1) + \alpha_2(\varphi\vec{a}_2) + \ldots + \alpha_n(\varphi\vec{a}_n).$$

Нехай у просторі V_n задано деякий базис:

$$\boldsymbol{e}: \quad \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_n. \qquad (13)$$

Будь-який вектор $\vec{a}_i$ у базисі (13) однозначно задається співвідношенням

$$\vec{a}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\vec{e}_j,\ i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (14)$$

З координат векторів $\vec{a}_i$ у базисі (13) можна побудувати квадратну матрицю $A = a_{ij}$, записавши координати векторів $\vec{a}_i$ як стовпці матриці A, тоді рівність (14) у матричному вигляді запишеться так:

$$(\vec{a}_1,\ \vec{a}_2, \ldots,\ \vec{a}_n) = (\vec{e}_1,\ \vec{e}_2, \ldots,\ \vec{e}_n)A. \qquad (15)$$

Матриця A задає лінійне перетворення φ у базисі (13). Якщо через $\varphi\boldsymbol{e}$ позначимо рядок, складений з векторів бази, то з (14) і (15) випливає матрична рівність між лінійним перетворенням φ і матрицею A в базисі $\boldsymbol{e}$: $\varphi\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}A$. Знаючи матрицю A лінійного перетворення φ в базисі (13), можна за координатами вектора $\vec{a}$ в цьому базисі знайти координати його образу $\vec{a}\varphi$ за формулою $\vec{a}' = \varphi\vec{a} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, якщо $\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i$. Стовпець координат вектора $\vec{a}'$ (образу) дорівнює матриці A лінійного перетворення φ, помноженій справа на стовпець координат вектора $\vec{a}$. Якщо порівняти останню рівність з рівністю (1.26), очевидна повна їх аналогія, причому матриця T була невиродженою.

Нехай маємо базиси $\boldsymbol{e}$ і $\boldsymbol{e}'$ у просторі V_n з матрицею переходу T, тобто

$$\boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e}T\,, \qquad (16)$$

і нехай лінійне перетворення φ задається в цих базисах відповідно матрицями A і A'.

$$\varphi\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}A, \quad \varphi\boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e}'A'\,. \qquad (17)$$

Остання рівність (1.32) з урахуванням (1.31) записується у вигляді $\varphi(\boldsymbol{e}T) = (\boldsymbol{e}T)A' = \boldsymbol{e}(TA')$. А проте $\varphi(\boldsymbol{e}T) = (\varphi\boldsymbol{e})T = (\boldsymbol{e}A)T = \boldsymbol{e}(AT)$. Тому, прирівнюючи праві частини, маємо: $\boldsymbol{e}(TA') = \boldsymbol{e}(AT)$. Звідси на підставі лінійної незалежності базису і єдиності розкладу за базисом випливає: $TA' = AT$. Матриця T невироджена. Отже, існує T^{-1} і остаточно дістанемо співвідношення $A' = T^{-1}AT, \quad A = TA'T^{-1}$.

Зауважимо, що квадратні *матриці* B *і* C називаються *подібними*, якщо вони пов'язані рівністю $C = Q^{-1}BQ$, де Q — деяка невироджена квадратна матриця.

Таким чином, матриці, що задають одне й те саме лінійне перетворення в різних базисах, подібні між собою.

Нехай у просторі V_n задано лінійні перетворення φ і Ψ. Назвемо *сумою* цих перетворень перетворення $\varphi + \Psi$, якщо

$$(\varphi + \psi)\vec{a} = \varphi\vec{a} + \psi\vec{a}\,.$$

Добутком $\varphi\psi$ назвемо перетворення, для якого виконується рівність $(\varphi\psi)\vec{a} = \varphi(\psi\vec{a})$. Нарешті, *добутком лінійного перетворення* φ *на число* $\alpha \in R$ є таке перетворення $\alpha\varphi$, для якого $(\alpha\varphi)\vec{a} = \alpha(\varphi\vec{a})$.

Легко показати, що перетворення $\varphi + \psi,\ \varphi\psi,\ \alpha\varphi$ є лінійними.

Нехай у базисі $\boldsymbol{e}$: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ перетворення φ і Ψ задаються відповідно матрицями $A = (a_{ij}),\ B = (в_{ij})$, тобто $\varphi e = eA;\ \psi e = eB$.

Тоді для векторів базису маємо:

$$(\varphi + \psi)\vec{e}_i = \varphi\vec{e}_i + \psi\vec{e}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\vec{e}_j + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\vec{e}_j = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + b_{ij})\,\vec{e}_j = e(A + B).$$

$$(\varphi\,\psi)\tilde{e}_i = \varphi(\psi\vec{e}_i) = \varphi\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\vec{e}_j = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\left(\varphi \cdot \vec{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\vec{e}_k\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right)\vec{e}_k = e(AB).$$

Отже, можна стверджувати, що **матриця суми і добутку лінійних перетворень дорівнює відповідно сумі і добутку матриць цих перетворень в одному й тому самому базисі**. А операції з лінійними перетвореннями мають ті самі властивості, що й операції з матрицями.

Власні числа і власні вектори матриці

Нехай $A = (a_{ij})$ — деяка квадратна матриця розміру $n \times n$ з дійсними елементами, λ — деяке невідоме число. Тоді матриця $A - \lambda E$, де E — одинична матриця, називається *характеристичною матрицею для матриці A:*

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}.$$

Поліном n-го степеня $|A-\lambda E|$ називається *характеристичним поліномом матриці A*, а його корені — *власними числами матриці A*.

Можна стверджувати, що подібні матриці мають однакові характеристичні поліноми і, як наслідок, однакові власні числа.

***Наслідок*. Лінійне перетворення φ в різних базисах має різні матриці, але всі вони мають однакові власні числа. Тому можна стверджувати, що лінійне перетворення φ характеризується набором власних чисел**, які далі називатимемо *спектром лінійного перетворення* φ, або *спектром матриці A*.

Розглянемо лінійне перетворення φ у просторі V_n, таке що переводить відмінний від нуля вектор $\vec{b}$ у вектор, пропорційний до самого вектора $\vec{b}$:

$$\varphi\vec{b}=\lambda_0\vec{b}. \qquad (18)$$

Такий вектор $\vec{b}$ називатимемо *власним вектором перетворення* φ, а λ_0 — *власним числом*, що відповідає цьому власному вектору.

Розглянемо тепер задачу відшукання такого базису для лінійного перетворення φ, в якому б його матриця мала найпростіший діагональний вигляд.

Вважатимемо, що лінійне перетворення φ має такий характеристичний поліном, що всі його корені дійсні і різні. Тобто, розв’язавши рівняння n-го порядку $|A-\lambda E|=0$, знайдемо n різних дійсних коренів $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Якщо виконується така умова, то лінійне перетворення φ дійсного лінійного простору V_n має простий спектр.

Кожному власному числу λ_i відповідає певний власний вектор. Власних векторів у цьому разі буде також n. Вони утворюють лінійно незалежну систему векторів. Їх можна розглядати як базис V_n, в якому матриця лінійного перетворення A набирає найпростішого діагонального вигляду.

Навчальні завдання

1. Нехай у просторі V_3 задано базис $\boldsymbol{e}$: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ Вектори

$$\vec{e}_1{}' = 5\vec{e}_1-\vec{e}_2-2\vec{e}_3,$$
$$\vec{e}_2{}' = 2\vec{e}_1+3\vec{e}_2,$$
$$\vec{e}_3{}' = -2\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3$$

утворюють новий базис $\boldsymbol{e}'$. Знайти координати вектора $\vec{a}=\vec{e}_1+4\vec{e}_2-\vec{e}_3$ в новому базисі $\boldsymbol{e}'$.

- Побудуємо матрицю переходу від $\boldsymbol{e}$ до $\boldsymbol{e}'$:

$$T=\begin{pmatrix}5 & 2 & -2\\ -1 & 3 & 1\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix},\ \ \Delta(T)=1.$$

Для того щоб використати формулу (1.27), треба побудувати матрицю, обернену до *T*. За відомим правилом (див. підрозд. 1.2.3) будуємо $T^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -2 & 8\\ -1 & 1 & -3\\ 6 & -4 & 17\end{pmatrix}$ і, застосовуючи рівність (1.27), дістаємо

$$\begin{pmatrix}x_1'\\ x_2'\\ x_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -2 & 8\\ -1 & 1 & -3\\ 6 & -4 & 17\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 4\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-13\\ 6\\ -27\end{pmatrix}.$$

Отже, $\vec{a}=-13\vec{e}_1'+6\vec{e}_2'-27\vec{e}_3'$.

2. Довести, що кожна з двох систем векторів $\boldsymbol{e}$ і $\boldsymbol{e}'$ є базисом, знайти зв'язок координат одного і того самого вектора в цих базисах.

$$\boldsymbol{e}:\ \ \vec{e}_1=(1,\ 2,\ 1),\qquad \boldsymbol{e}':\ \ \vec{e}_1=(3,\ 1,\ 4),$$
$$\vec{e}_2=(2,\ 3,\ 3),\qquad \vec{e}_2=(5,\ 2,\ 1),$$
$$\vec{e}_3=(3,\ 7,\ 1);\qquad \vec{e}_3=(1,\ 1,\ -6).$$

● Аби перевірити, що кожна із систем векторів утворює базис, треба знайти їхні ранги. Для простору V_3 ранг кожної з систем векторів має дорівнювати 3.

$$\boldsymbol{e}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 7\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix};\ rang(\boldsymbol{e})=3,\ \ \Delta(\boldsymbol{e})=1.$$

$$\boldsymbol{e}'=\begin{pmatrix}3 & 5 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 4 & 1 & -6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & -7 & -10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}\ \ rang(\boldsymbol{e}')=3,\ \ \Delta(\boldsymbol{e}')=4.$$

Нехай вектор $\vec{x}$ у базисі $\boldsymbol{e}$ має координати (x_1,x_2,x_3), а в базисі $\boldsymbol{e}'$ — координати $(x_1',\ x_2',\ x_3')$. Тоді зв'язок задається формулою (1.26), тобто $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}x_1'\\ x_2'\\ x_3'\end{pmatrix}$. Знайдемо матрицю *T* переходу від базису $\boldsymbol{e}$ до $\boldsymbol{e}'$. Згідно з рівністю (1.24) маємо матричне рівняння $\begin{pmatrix}3 & 5 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 4 & 1 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 7\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}T$, для розв'язання якого побудуємо матрицю $\boldsymbol{e}^{-1}=\begin{pmatrix}-18 & 7 & 5\\ 5 & -2 & -1\\ 3 & -1 & -1\end{pmatrix}$. Далі маємо:

$$T=\boldsymbol{e}^{-1}\boldsymbol{e}'=\begin{pmatrix}-18 & 7 & 5\\ 5 & -2 & -1\\ 3 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 5 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 4 & 1 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-27 & -71 & -41\\ 9 & 20 & 9\\ 4 & 12 & 8\end{pmatrix}.$$

Отже, $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-27 & -71 & -41\\ 9 & 20 & 9\\ 4 & 12 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1'\\ x_2'\\ x_3'\end{pmatrix}$.

Остаточно: $x_1=-27x_1'-71x_2'-41x_3',\ \ x_2=9x_1'+20x_2'+9x_3',\ \ x_3=4x_1'+\ +12x_2'+8x_3'$.

3. Нехай у базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ простору V_3 лінійне перетворення φ задається матрицею $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, вектор $\vec{a} = 5\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$.

● Знайти образ $a' = \varphi\, \vec{a}$.

Згідно з відповідною формулою маємо

$$\varphi\vec{a} = A\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Отже, } a' = \varphi\vec{a} = -9\vec{e}_1 + 16\vec{e}_2 .$$

4. Лінійне перетворення в базисі $\boldsymbol{e}: \vec{e}_1 = (8, -6, 7)$, $\vec{e}_2 = (-16, 7, -13)$, $\vec{e}_3 = (9, \ -3, \ 7)$ має матрицю $A = \begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}$. Знайти його матрицю в базисі $\boldsymbol{e}': e_1' = (1, -2, 1)$, $\boldsymbol{e}_1' = (3, \ -1, \ 2)$, $\boldsymbol{e}_3' = (2, \ 1, \ 2)$.

● Знайдемо спочатку матрицю переходу від базису $\boldsymbol{e}$ до $\boldsymbol{e}'$ з матричного рівняння: $\boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e}T \Rightarrow T = \boldsymbol{e}^{-1}\boldsymbol{e}'$.

$e^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 10 & -5 & -15 \\ 21 & -7 & -30 \\ 29 & -8 & -40 \end{pmatrix}$, тоді

$$T = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 10 & -5 & -15 \\ 21 & -7 & -30 \\ 29 & -8 & -40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Побудуємо $T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. За формулою $A' = T^{-1}AT$ знайдемо матрицю лінійного перетворення в новому базисі $\boldsymbol{e}'$:

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

З прикладу випливає, що **вигляд матриці суттєво залежить від вибраного базису**.

5. Знайти базис, в якому матриця лінійного перетворення набирає діагонального вигляду $A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$.

● Згідно з розглянутим раніше таким базисом буде базис із власних векторів лінійного перетворення. Для їх знаходження використаємо співвідношення (1.33). Нехай $\vec{b} = (x_1, \ x_2, \ x_3)$ — один із власних векторів. Тобто $A\vec{b} = \lambda\vec{b}$, або

$$\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 15x_1 - 11x_2 + 5x_3 = \lambda x_1 \\ 20x_1 - 15x_2 + 8x_3 = \lambda x_2 \\ 8x_1 - 7x_2 + 6x_3 = \lambda x_3 \end{cases},$$

або остаточно $\begin{cases}(15-\lambda)x_1 - 11x_2 + 5x_3 = 0\\ 20x_1 - (15+\lambda)x_2 + 8x_3 = 0\\ 8x_1 - 7x_2 + (6-\lambda)x_3 = 0\end{cases}$. Здобута однорідна система рівнянь для знаходження вектора $\vec{b}$ повинна мати нетривіальний розв’язок, оскільки власний вектор відмінний від нульового. Згідно з підрозд. 1.3.2 умовою існування нетривіального розв’язку буде рівність нулю головного визначника системи. Прирівнюючи його до нуля, маємо характеристичне рівняння: $\begin{vmatrix}15-\lambda & -11 & 5\\ 20 & -15-\lambda & 8\\ 8 & -7 & 6-\lambda\end{vmatrix} = 0$. Знаходимо визначник і маємо: $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$. Корені цього рівняння $\lambda_1 = 1,\ \ \lambda_2 = 2,\ \ \lambda_3 = 3.$ Знайдемо власний вектор для кожного з коренів

1) $\lambda = 1$, $\begin{cases}14x_1 - 11x_2 + 5x_3 = 0\\ 20x_1 - 16x_2 + 8x_3 = 0\\ 8x_1 - x_2 + 5x_3 = 0\ ,\end{cases}$

оскільки $\Delta = 0$, запишемо в системі перші два рівняння і переведемо x_3 в розряд вільних невідомих: $\begin{cases}14x_1 - 11x_2 = -5x_3\\ 5x_1 - 4x_2 = -2x_3\end{cases}$, $\Delta = \begin{vmatrix}14 & -11\\ 5 & -4\end{vmatrix} = -1,$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix}-5x_3 & -11\\ -2x_3 & -4\end{vmatrix} = -2x_3,\qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix}14 & -5x_3\\ 5 & -2x_3\end{vmatrix} = -3x_3\ x_1 = \qquad = -2x_3, x_2 = -3x_3.$ Отже, перший власний вектор $\vec{b}_1 = (2,\ \ 3,\ \ 1)$.

2) $\lambda = 2,$ $\begin{cases}13x_1 - 11x_2 + 5x_3 = 0\\ 20x_1 - 17x_2 + 8x_3 = 0\\ 8x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 0\end{cases}$.

Аналогічно запишемо в системі два рівняння, наприклад друге і третє: $\begin{cases}20x_1 - 17x_2 = -8x_3\\ 8x_1 - 7x_2 = -4x_3\end{cases}$, $\Delta = \begin{vmatrix}20 & -17\\ 8 & -7\end{vmatrix} = -4$ $\qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix}-8x_3 & -17\\ -4x_3 & -7\end{vmatrix} = -12x_3,$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix}20 & -8x_3\\ 8 & -4x_3\end{vmatrix} = -16x_3,\ \ x_1 = 3x_3,\ \ x_2 = 4x_3,\ \ \vec{b}_2 = (3,\ \ 4,\ \ 1).$

3) $\lambda = 3,$ $\begin{cases}12x_1 - 11x_2 + 5x_3 = 0\\ 20x_1 - 18x_2 + 8x_3 = 0\\ 8x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 0\end{cases}$.

Запишемо перші два рівняння: $\begin{cases}-11x_2 + 5x_3 = -12x_1\\ -18x_2 + 8x_3 = -20x_1\end{cases}$,

$\Delta_1 = \begin{vmatrix}-11 & 5\\ -18 & 8\end{vmatrix} = 2;\quad \Delta_1 = \begin{vmatrix}-12x_1 & 5\\ -20x_1 & 8\end{vmatrix} = 4x_1;\ \ \Delta_2 = \begin{vmatrix}-11 & -12x_1\\ -18 & -20x_1\end{vmatrix} = 4x_1;\quad x_2 = 2x_1,\quad x_3 = 2x_1;\quad \vec{b}_3 = (1,\ \ 2,\ \ 2).$
Отже, маємо новий базис із векторів $\vec{b}_1,\ \vec{b}_2,\ \vec{b}_3$. Побудуємо матрицю переходу до цього базису T. $T = \begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 3 & 4 & 2\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$. Побудуємо $T^{-1} = \begin{pmatrix}-6 & 5 & -2\\ 4 & -3 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$. За формулою $A' = T^{-1}AT$ знайдемо матрицю лінійного перетворення φ в новому базисі $\vec{b}_1,\ \vec{b}_2,\ \vec{b}_3$, складеному з власних векторів: $A' = \begin{pmatrix}-6 & 5 & -2\\ 4 & -3 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}15 & -1 & 5\\ 20 & -15 & 8\\ 8 & -7 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 3 & 4 & 2\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$. Як і слід було очікувати, у базисі з власних векторів матриця лінійного перетворення має діагональний вигляд, причому на головній діагоналі розміщені власні числа матриці.

Завдання для перевірки знань

1. Знайти лінійно незалежні системи векторів:

а) $\vec{a}_1 = (1,\ 2,\ 3,\ 4),$
$\vec{a}_2 = (2,\ 3,\ 4,\ 5),$
$\vec{a}_3 = (3,\ 4,\ 5,\ 6),$
$\vec{a}_4 = (4,\ 5,\ 6,\ 7);$

б) $\vec{a}_1 = (1,\ 2,\ 3),$
$\vec{a}_2 = (2,\ 3,\ 4),$
$\vec{a}_3 = (3,\ 2,\ 3),$
$\vec{a}_4 = (4,\ 3,\ 4),$
$\vec{a}_5 = (1,\ 1,\ 1);$

в) $\vec{a}_1 = (5,\ 2,\ -3,\ 1),$
$\vec{a}_2 = (4,\ 1,\ -2,\ 3),$
$\vec{a}_3 = (1,\ 1,\ -1,\ -2),$
$\vec{a}_4 = (3,\ 4,\ -1,\ 2);$

г) $\vec{a}_1 = (2,\ 1,\ -3,\ 1),$
$\vec{a}_2 = (4,\ 2,\ -6,\ 2),$
$\vec{a}_3 = (6,\ 3,\ -9,\ 3),$
$\vec{a}_4 = (1,\ 1,\ 1,\ 1).$

Відповідь. а) Будь-які вектори; б) будь-які три вектори, крім $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2, \vec{a}_5$ і $\vec{a}_3,\ \vec{a}_4,\ \vec{a}_5$; в) $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4$, тому що $\vec{a}_3 = \vec{a}_1 - \vec{a}_2$; г) 1) $\vec{a}_1$, $\vec{a}_1$; 2) $\vec{a}_2, \vec{a}_4$; 3) $\vec{a}_3, \vec{a}_4$.

2. Знайти всі значення λ, при яких вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$.

а) $\vec{a}_1 = (3, 4, 2),\ \vec{a}_2 = (6, 8, 7),\ \vec{b} = (9, 12, \lambda).$

б) $\vec{a}_1 = (4, 4, 3),\ \vec{a}_2 = (7, 2, 1),\ \vec{a}_3 = (4, 1, 6),\ \vec{b} = (5, 9, \lambda).$

в) $\vec{a}_1 = (3, 2, 5),\ \vec{a}_2 = (2, 4, 7),\ \vec{a}_3 = (5, 6, \lambda),\ \vec{b} = (1, 3, 5).$

Відповідь. а) λ — будь-яке; б) λ — будь-яке; в) $\lambda \neq 12$.

3. За яких умов система векторів має єдиний базис?

4. Скільки базисів має система з $k+1$ вектора рангу k, до якої входять пропорційні вектори, відмінні від 0.

5. Знайти лінійно незалежну підсистему системи векторів і всі вектори системи, що не входять до підсистеми, виразити через вектори підсистеми.

а) $\vec{a}_1 = (5,\ 2,\ -3,\ 1)$
$\vec{a}_2 = (4,\ 1,\ -2,\ 3)$
$\vec{a}_3 = (1,\ 1,\ -1,\ -2)$
$\vec{a}_4 = (3,\ 4,\ -1,\ 2)$

б) $\vec{a}_1 = (2,\ -1,\ 3,\ 5)$
$\vec{a}_2 = (4,\ -3,\ 1,\ 3)$
$\vec{a}_3 = (3,\ -2,\ 3,\ 4)$
$\vec{a}_4 = (4,\ -1,\ 15,\ 17)$
$\vec{a}_5 = (7,\ -6,\ -7,\ 0).$

Відповідь. а) Наприклад: $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4$; $\vec{a}_3 = \vec{a}_1 - \vec{a}_2$; б) наприклад: $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$; $\vec{a}_4 = 2\vec{a}_1 - 3\vec{a}_2 + 4\vec{a}_3$.

6. Знайти: а) $\vec{x} = (7,\ 14,\ -1,\ 2)$ в базисі $\vec{e}_1 = (1,\ 2,\ -1,\ -2)$, $\vec{e}_2 = (2,\ 3,\ 0,\ -1)$, $\vec{e}_3 = (1,\ 2,\ 1,\ 4)$, $\vec{e}_4 = (1,\ 3,\ -1,\ 0)$;

б) $\vec{x} = (6,\ 2,\ -7)$ у базисі $\vec{e}_1 = (2,\ 1,\ -3),\ \vec{e}_2 = (3,\ 2,\ -5),\ \vec{e}_3 = (1,\ -1,\ 1).$

Відповідь. а) $(0,\ 2,\ 1,\ 2)$; б) $(1,\ 1,\ 1,\ 1)$.

7. Знайти зв'язок між координатами одного і того самого вектора в різних базисах.

$\boldsymbol{e}$: $\vec{e}_1 = (1,\ 1,\ 1,\ 1)$
$\vec{e}_2 = (1,\ 2,\ 1,\ 1)$
$\vec{e}_3 = (1,\ 1,\ 2,\ 1)$
$\vec{e}_4 = (1,\ 3,\ 2,\ 3)$

$\boldsymbol{e}'$: $\vec{e}_1 = (1,\ 0,\ 3,\ 3)$
$\vec{e}_2 = (-2,\ -3,\ -5,\ -4)$
$\vec{e}_3 = (2,\ 2,\ 5,\ 4)$
$\vec{e}_4 = (-2,\ -3,\ -4,\ -4).$

Відповідь. $x_1 = 2x_1' + x_3' - x_4'$; $x_2 = -3x_1' + x_2' - 2x_3' + x_4'$; $x_3 = x_1' + 2x_2' + 2x_3' - x_4'$; $x_4 = x_1' - x_2' + x_3' - x_4'$.

8. Як зміниться матриця переходу від одного базису до другого якщо:
а) поміняти місцями два вектори першого базису?
б) поміняти місцями два вектори другого базису?
в) записати вектори обох базисів у зворотному порядку?

9. Знайти матрицю лінійного перетворення векторів $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ на вектори $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$:

а) $\begin{matrix} \vec{a}_1 = (2, \ 3, \ 5), \ \vec{b}_1 = (1, \ 1, \ 1), \\ \vec{a}_2 = (0, \ 1, \ 2), \ \vec{b}_2 = (1, \ 1, \ -1), . \\ \vec{a}_3 = (1, \ 0, \ 0), \ \vec{b}_3 = (2, \ 1, \ 2); \end{matrix}$

б) $\begin{matrix} \vec{a}_1 = (2, \ 0, \ 3), \ \vec{b}_1 = (1, \ 2, \ -1), \\ \vec{a}_2 = (4, \ 1, \ 5), \ \vec{b}_2 = (4, \ 5, \ -2), \\ \vec{a}_3 = (3, \ 1, \ 2), \ \vec{b}_3 = (1, \ -1, \ 1). \end{matrix}$

Відповідь. а) $\begin{pmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -6 & 11 & 5 \\ -12 & 13 & 10 \\ 6 & -5 & -5 \end{pmatrix}$.

10. Лінійне перетворення φ в базисі ***e***: $\vec{e}_1$; $\vec{e}_2$; $\vec{e}_3$ має матрицю $\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$. Знайти його матрицю в базисі e': $\vec{e}'_1 = (2, \ 3, \ 1)$; $\vec{e}'_2 = (3, \ 4, \ 1)$; $\vec{e}'_3 = (1, \ 2, \ 2)$.

Відповідь. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

11. Лінійне перетворення в базисі $\vec{e}_1, \ \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ має матрицю $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
Знайти матрицю цього перетворення в базисі:
а) $\vec{e}_1, \ \vec{e}_3, \vec{e}_2, \vec{e}_4$;
б) $\vec{e}_1, \ \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4$.

Відповідь. а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

12. Знайти власні числа і власні вектори матриць.

а) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

Відповідь. а) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \alpha(1, \ 2, \ 0) + \beta(0, \ 0, \ 1)$, де α і β не дорівнюють нулю одночасно; б) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$, $\vec{b}_1 = (1, \ 1, \ 1)$, $\vec{b}_2 = (1, \ 1, \ 0)$, $\vec{b}_3 = (1, \ 0, \ -3)$, в) $\lambda_1 = 5, \ \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 9$; $\vec{b}_1 = (1, \ 0, \ -1)$, $\vec{b}_2 = (1, \ -1, \ 1)$, $\vec{b}_3 = (1, \ 2, \ 1)$.

13. Знайти базис, в якому матриця лінійного перетворення набирає діагонального вигляду, і записати цю матрицю:

а) $A=\begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Відповідь. а) $\vec{b}_1=(2,\ 2,\ 1)$; $\vec{b}_2=(2,\ -1,\ -2)$; $\vec{b}_3=(1,\ -2,\ 2)$. б) $\vec{b}_1=(1,\ 1,\ 0,\ 0)$, $\vec{b}_2=(1,\ 0,\ 1,\ 0)$, $\vec{b}_3=(1,\ 0,\ 0,\ 1)$, $\vec{b}_4=(1,-1,-1,-1)$. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.