Самостійна робота № 8.

Тема: Квадратичні форми
Мета: Знаходити матриці лінійного перетворення, що зводять квадратичну форму до діагонального вигляду.

План занять

1. Додатна визначеність квадратичної форми.
2. Ортогоналізація базису.
3. Знаходження матриці лінійного перетворення, що зводить квадратичну форму до діагонального вигляду.

Термінологічний словник ключових понять

Ортонормована система векторів — система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \ \vec{a}_n$, для якої виконується умова $\left(\vec{a}_i \vec{a}_j\right) = 0$, коли $i \neq j$ і $\vec{a}_i \vec{a}_i = 1$.

Квадратичні форми

Означення. Квадратичною формою f *від* n *невідомих* $x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_n$ називається сума, кожний член якої є або квадратом однієї з невідомих, або добутком двох різних невідомих, помножених на деякий коефіцієнт. Для цих коефіцієнтів застосуємо такі позначення: коефіцієнт при x_i^2 позначимо a_{ii}, коефіцієнти при добутку $x_i x_j = x_j x_i$ для $i \neq j$ — як $2a_{ij}$. Тоді маємо $a_{ij} = a_{ji}$, а член $2a_{ij} x_i x_j = a_{ij} x_i x_j + a_{ji} x_j x_i$.

Використовуючи введені позначення, квадратичну форму можна записати у вигляді: $f(x_1, \ \ x_2, \ \ \ldots, \ \ x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$.

З коефіцієнтів a_{ij} можна скласти квадратну матрицю $A = (a_{ij})$ порядку $n \times n$. Ця матриця є симетричною $a_{ij} = a_{ji}$ і називається *матрицею квадратичної форми f,* її ранг називається *рангом квадратичної форми.* Якщо $rang(A) = n$, то квадратична форма називається *невиродженою*, якщо $rang(A) < n$ — *виродженою*.

Означення. Квадратична форма f від n невідомих $x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_n$ з дійсними коефіцієнтами називається *додатно визначеною*, якщо при будь-яких дійсних значеннях цих невідомих, хоча б одне з яких відмінне від нуля, ця форма набуває тільки додатних значень.

Необхідною і достатньою умовою того, що квадратична форма додатно визначена, є строга додатність усіх її головних мінорів

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0 .$$

Квадратична форма має канонічний вигляд, якщо $a_{ij} = 0, \ i \neq j.$

Квадратична форма має нормальний вигляд, якщо $a_{ij}=0,\ i\neq j,$ а $a_{ii}=\pm 1.$

Розглянемо векторний простір V_n. Введемо в цьому просторі ще одну дію над векторами, яка називається *скалярним добутком*.

Якщо в лінійному векторному просторі V_n для векторів $\vec{a}=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n)$ і $\vec{b}=(\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_n)$ ввести скалярний добуток $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i$, що має такі властивості:

1) $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\left(\vec{b}\cdot\vec{a}\right)$; 2) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$;

3) $\left(\alpha\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\alpha\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$, то лінійний векторний простір перетворюється на евклідів векторний простір.

Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються *ортогональними*, якщо $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

Розглянемо систему ортогональних векторів $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_k$. Для неї виконується умова $\left(\vec{a}_i\quad\vec{a}_j\right)=0$, коли $i\neq j$. Тоді справджується твердження:

Будь-яка ортогональна система ненульових векторів лінійно незалежна.

Нехай $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\ldots,\vec{b}_n$ — лінійно незалежна система векторів у евклідовому просторі V_n. Побудуємо для неї систему векторів $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_k$, яка була б ортогональною.

Покладемо $\vec{a}_1=\vec{b}_1$. Далі побудуємо $\vec{a}_2$ за формулою $\vec{a}_2=\alpha_1\vec{a}_1+\vec{b}_2$, де α_1 — деяке невідоме число. Доберемо його так, щоб виконувалась умова ортогональності: $\left(\vec{a}_2\cdot\vec{a}_1\right)=0$. Отже, $\vec{a}_2\cdot\vec{a}_1=\alpha_1(\vec{a}_1\vec{a}_1)+\left(\vec{b}_2\vec{a}_1\right)$. Звідки $\alpha_1=-\dfrac{\left(\vec{b}_2\vec{a}_1\right)}{(\vec{a}_1\vec{a}_1)}$.

Нехай таким чином побудовано ортогональну систему з s векторів $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_s$. Згідно з процедурою ортогоналізації наступний вектор буде лінійною комбінацією попередніх векторів у вигляді

$$\vec{a}_{s+1}=\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\ldots+\alpha_s\vec{a}_s+\vec{b}_{s+1}.$$

Вектор $\vec{a}_{s+1}$ буде ортогональним до всіх векторів системи $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \ldots,\vec{a}_s$. Якщо $\alpha_i=-\dfrac{\left(\vec{a}_i\quad b_{s+1}\right)}{\left(\vec{a}_i\quad\vec{a}_i\right)}$. Продовжуючи цей процес, побудуємо ортогональну систему з k векторів $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_k$. Система ортогональних векторів лінійно незалежна, тому для векторного простору V_n будь-яка ортогональна система з n векторів утворює *ортогональний базис* цього простору.

Вектор $\vec{a}^*$ називається *нормованим*, якщо виконується рівність $\left(\vec{a}^*\cdot\vec{a}^*\right)=1$.

Якщо будь-який вектор $\vec{a}\neq 0$, то $(\vec{a}\cdot\vec{a})>0$ і цей вектор можна пронормувати, використовуючи формулу: $\vec{a}^*=\dfrac{1}{\sqrt{(\vec{a}\cdot\vec{a})}}\cdot\vec{a}$. Справді, $\left(\vec{a}^*\cdot\vec{a}^*\right)=$ $\left(\dfrac{\vec{a}}{\sqrt{\vec{a}\vec{a}}}\cdot\dfrac{\vec{a}}{\sqrt{\vec{a}\vec{a}}}\right)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{\vec{a}\vec{a}}}\right)^2(\vec{a}\vec{a})=1$.

Матриця, складена з таких векторів, називається *ортогональною*. Слід зазначити, що лінійне перетворення, яке відповідає ортогональній матриці, називається *ортогональним*. Можна показати, що **ортогональне лінійне перетворення залишає незмінною суму квадратів квадратичної форми**.

Нехай Q — деяка ортогональна матриця, тоді ураховуючи, що матриця квадратичної форми $f=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2$ є одиничною E, з попередньої властивості дістанемо: $Q'EQ=E,$ де Q' — транспонована матриця щодо Q. З останньої рівності випливає $Q'Q=E,$ або $Q'=Q^{-1}$. Тобто для ортогональної матриці її транспонована і обернена збігаються.

Перш ніж переходити до задачі знаходження лінійного перетворення, яке зводить квадратичну форму до канонічного вигляду, сформулюємо кілька тверджень.

1. Усі характеристичні корені симетричної матриці є дійсні числа.
2. Для будь-якої симетричної матриці A можна знайти таку ортогональну матрицю Q лінійного перетворення φ, яке приводить матрицю A до діагонального вигляду, на головній діагоналі якої розміщені її власні числа, узяті з їх кратностями.

Згідно з результатами підрозд. 1.4.4 і твердженнями 1, 2 для відшукання канонічного вигляду квадратичної форми з матрицею A і лінійного перетворення φ, яке приводить квадратичну форму до канонічного вигляду, треба знайти базис, утворений з власних векторів матриці A, й ортонормувати його. Ортогональна матриця, складена з векторів-стовпців цього базису, буде матрицею шуканого лінійного перетворення.

Слід зазначити, що звести дві квадратичні форми до канонічного вигляду в загальному випадку неможливо. Але коли одна з них додатно визначена, то існує таке невироджене лінійне перетворення, яке одночасно зводить додатно визначену квадратичну форму g до нормального вигляду, а форму f — до канонічного вигляду. Справді, виконаємо лінійне перетворення з матрицею T, що зводить додатно визначену форму g до нормального вигляду. Маємо $X = TY$ і $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2$. Форма $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при цьому перейде в $\varphi(y_1, y_2, \dots, y_n)$. Тепер виконаємо ортогональне перетворення невідомих $y_1, y_2, \dots, y_n$, $Y = QZ$, що зводить канонічну форму $\varphi(y_1, y_2, \dots, y_n)$ до вигляду: $\varphi(y_1, y_2, \dots, y_n) = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \dots + \lambda_n z_n^2$. Квадратична форма $g(y_1, y_2, \dots, y_n)$ при цьому не зміниться, оскільки ортогональне перетворення не змінює суми квадратів. Таким чином, лінійне перетворення $X = (TQ)Z$ з матрицею TQ одночасно зводить дві квадратичні форми із зазначеними властивостями до канонічного вигляду.

Навчальні завдання

1. Ортогоналізувати систему векторів: $\vec{b}_1 = (1,\ 1,\ 0,\ 0)$, $\vec{b}_2 = (1,\ 0,\ 1,\ 0)$, $\vec{b}_3 = (-1,\ 0,\ 0,\ 1)$, $\vec{b}_4 = (0,\ 1,\ 1,\ 1)$.

● Система векторів лінійно незалежна. Згідно з процедурою, описаною раніше, маємо: $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 = (1,\ 1,\ 0,\ 0)$; $\vec{a}_2 = \alpha_1 \vec{a}_1 + \vec{b}_2$ $\alpha_1 = \; = -\dfrac{\vec{a}_1 \vec{b}_2}{(\vec{a}_1 \vec{a}_1)} = -\dfrac{1}{2}$, $\vec{a}_2 = -\dfrac{1}{2}\vec{a}_1 + \vec{b}_2 = \left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2},\ 1,\ 0\right)$. $\vec{a}_3 = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \vec{b}_3$; $\alpha_1 = -\dfrac{(\vec{a}_1 \vec{b}_3)}{(\vec{a}_1 \vec{a}_1)} = \dfrac{1}{2}$, $\alpha_2 = -\dfrac{(\vec{a}_2 \vec{b}_3)}{(\vec{a}_2 \vec{a}_2)} = \dfrac{1}{3}$, $\vec{a}_3 = \dfrac{1}{2}\vec{a}_1 + \dfrac{1}{3}\vec{a}_2 + \vec{b}_3 = \left(-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3},\ 1\right)$. $\vec{a}_4 = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3 + \vec{b}_4$; $\alpha_1 = -\dfrac{(\vec{a}_1 \vec{b}_4)}{(\vec{a}_1 \vec{a}_1)} = -\dfrac{1}{2}$, $\alpha_2 = -\dfrac{(\vec{a}_2 \vec{b}_4)}{(\vec{a}_2 \vec{a}_2)} = -\dfrac{1}{3}$, $\alpha_3 = -\dfrac{(\vec{a}_3 \vec{b}_4)}{(\vec{a}_3 \vec{a}_3)} = -\dfrac{5}{4}$, $\vec{a}_4 = -\dfrac{1}{2}\vec{a}_1 - \dfrac{1}{3}\vec{a}_2 - \dfrac{5}{4}\vec{a}_3 + b_4 = \left(-\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{4},\ -\dfrac{1}{4}\right)$. Отже, система векторів: $\vec{a}_1 = (1,\ 1,\ 0,\ 0)$; $\vec{a}_2 = \left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2},\ 1,\ 0\right)$; $\vec{a}_3 = \left(-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3},\ 1\right)$; $\vec{a}_4 = \left(-\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{4},\ -\dfrac{1}{4}\right)$ — ортогональна.

2. Звести до канонічного вигляду квадратичну форму: $f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ і знайти лінійне перетворення, що зводить її до канонічного вигляду.

● Запишемо матрицю квадратичної форми $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, її характеристичне рівняння $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$, або $\lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0$. Корені характеристичного рівняння $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$; $\lambda_3 = 2$. Після цього відразу можна записати канонічний вигляд квадратичної форми: $f = -y_1^2 - y_2^2 + 2y_3^2$. Для знаходження лінійного перетворення побудуємо його матрицю. Знайдемо власні вектори матриці *A*.

1) $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. У системі рівнянь для координат власного вектора $\vec{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$ залишається одне рівняння $b_1 + b_2 + b_3 = 0$ або $b_1 = -b_2 - b_3$. Надамо вільним невідомим b_2, b_3 значень елементів визначника $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ (див. підрозд. 1.3.2) і дістанемо два власні вектори $\vec{b}_1 = (1,\ -1,\ 0)$; $\vec{b}_2 = (1,\ 0,\ -1)$.

2) $\lambda_3 = 2$. Аналогічно до попереднього дістанемо систему $\begin{cases} b_1 + b_2 - 2b_3 = 0 \\ b_2 - b_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = b_3 \\ b_2 = b_3 \end{cases}$ і власний вектор $\vec{b}_3$ набирає вигляду: $\vec{b}_3 = (1,\ 1,\ 1)$.

Ортонормуємо систему векторів $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ $\vec{a}_1 = \vec{b}_1$; $\vec{a}_2 = \alpha_1\vec{a}_1 + \vec{b}_2$, $\alpha_1 = -\frac{(\vec{a}_1\vec{b}_2)}{(\vec{a}_1\vec{a}_1)} = -\frac{1}{2}$, $\vec{a}_2 = \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -1\right)$; $\vec{a}_3 = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \vec{b}_3$; $\alpha_1 = -\frac{(\vec{a}_1\vec{b}_3)}{(\vec{a}_1\vec{a}_1)} = 0$, $\alpha_2 = -\frac{(\vec{a}_2\vec{b}_3)}{(\vec{a}_2\vec{a}_2)} = 0$, $\vec{a}_3 = (1,\ 1,\ 1)$. Система векторів $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ — ортогональна. Нормуючи її, дістаємо систему векторів.

$$\vec{a}_1^* = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right);\ \vec{a}_2^* = \left(\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}},\ -\frac{2}{\sqrt{6}}\right);\ \vec{a}_3^* = \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Отже, матриця лінійного перетворення набирає вигляду:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

а лінійне перетворення

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_3,\quad x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_3,$$
$$x_3 = -\frac{2}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_3.$$

Зауважимо, що вибір власних векторів, які відповідають кратному кореню характеристичного рівняння, неоднозначний, і тому існує багато ортогональних перетворень, що зводять до канонічного вигляду квадратичну форму *f*. Ми знайшли одне з таких перетворень.

Звести, якщо це можливо, квадратичні форми $f(x_1, x_2) = -4x_1x_2$ і $g(x_1x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2$ до найпростішого вигляду.

Розглянемо квадратичну форму $g(x_1x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 3x_2^2 = \ = (x_1 - x_2)^2 + 3x_2^2$. Очевидно, що вона додатно визначена і лінійне перетворення $y_1 = x_1 - x_2, y_2 = \sqrt{3}x_2$ зводить її до нормального вигляду $g(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2$. Це саме перетворення зводить форму $\varphi(x_1\ x_2)$ до вигляду $\varphi(y_1, y_2) = -\frac{4}{\sqrt{3}}y_1y_2 - \frac{4}{3}y_2^2$. Матриця перетворення $T=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$. Зведемо тепер ортогональне перетворення квадратичної форми $\varphi(y_1, y_2)$ до канонічного вигляду.

Матриця квадратичної форми $A=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$, характеристичне рівняння $(A-E\lambda)=\begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{4}{3}-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2+\frac{4}{3}\alpha-\frac{4}{3}=0.$ Характеристичні корені $\lambda_1=-2, \lambda_2=\frac{2}{3}.$ Для власного числа $\lambda=-2$ маємо власний вектор $\vec{b}_1=\left(1;\sqrt{3}\right).$ Для власного числа $\lambda=\frac{2}{3}-\vec{b}_2=\left(-\sqrt{3};1\right).$ Легко переконатися, що вектори $\vec{b}_1$ і $\vec{b}_2$ ортогональні. Справді, пронормувавши їх, дістанемо:

$$\vec{b}_1^0=\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right);\ \vec{b}_2^0=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right).$$

Матриця ортогонального лінійного перетворення $Q=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}. \end{pmatrix}$. Знайдемо матрицю лінійного перетворення, що одночасно зводить дві квадратичні форми до простішого вигляду

$$B=T\cdot Q=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix}.$$

Таким чином, виконавши лінійне перетворення $x_1=z_1-\frac{\sqrt{3}}{3}z_2;\quad x_2=\frac{1}{2}z_1+\frac{\sqrt{3}}{6}z_2$, дістанемо $g(z_1,z_2)=z_1^2+z_2^2;\quad f(z_1,z_2)=-2z_1^2+\frac{2}{3}z_2^2.$

Завдання для перевірки знань

1. Ортогоналізувати базис:

а) $\vec{e}_1=(1,\ 1,\ 1)$, $\vec{e}_2=(1,\ 1,\ 2)$, $\vec{e}_3=(1,\ 2,\ 3)$

б) $\vec{e}_1=(1,\ 1,\ 1,\ 1)$, $\vec{e}_2=(1,\ 2,\ 1,\ 1)$, $\vec{e}_3=(1,\ 1,\ 2,\ 1)$, $\vec{e}_4=(1,\ 3,\ 2,\ 3)$

2. За яких значень параметра λ квадратичні форми додатно визначені?
а) $5x_1^2+x_2^2+\lambda x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$;
б) $2x_1^2+x_2^2+3x_3^2+2\lambda x_1x_2+2x_1x_3$.

Відповідь. а) $\lambda>2$; б) $|\lambda|<\frac{1}{3}\sqrt{15}$.

3. Знайти нормальний вигляд квадратичних форм:

а) $x_1^2+x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$;

б) $x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2x_3$.

Відповідь. а) $y_1^2+y_2^2-y_3^2$, б) $y_1^2-y_2^2-y_3^2$.

4. Звести до канонічного вигляду та знайти вираз нових невідомих через старі:

а) $2x_1^2+3x_2^2+4x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3-3x_2x_3$;

б) $3x_1^2-2x_2^2+2x_3^2+4x_1x_2-3x_1x_3-x_2x_3$.

Відповідь.

а) $2y_1^2+10y_2^2+190y_3^2$; $y_1=x_1-\frac{1}{2}x_2+x_3$, $y_2=\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{10}x_3$, $y_3=\frac{1}{10}x_3$.

б) $3y_1^2-30y_2^2+530y_3^2$; $y_1=x_1+\frac{2}{3}x_2-\frac{1}{2}x_3$, $y_2=\frac{1}{3}x_2-\frac{1}{20}x_3$, $y_3=\frac{1}{20}x_3$.

5. Знайти ортогональне перетворення, що зводить квадратичну форму до канонічного вигляду:

а) $f=6x_1^2+5x_2^2+7x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3$;

б) $f=x_1^2+x_2^2+5x_3^2-6x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3$;

в) $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$.

Відповідь.

а) $f=3y_1^2+6y_2^2+9y_3^2$; $x_1=\frac{2}{3}y_1-\frac{1}{3}y_2+\frac{2}{3}y_3$, $x_2=\frac{2}{3}y_1+\frac{2}{3}y_2-\frac{1}{3}y_3$, $x_3=-\frac{1}{3}y_1+\frac{2}{3}y_2+\frac{2}{3}y_3$.

б) $3y_1^2+6y_2^2-2y_3^2$; $x_1=\frac{1}{\sqrt{3}}y_1+\frac{1}{\sqrt{6}}y_2+\frac{1}{\sqrt{2}}y_3$, $x_2=-\frac{1}{\sqrt{3}}y_1-\frac{1}{\sqrt{6}}y_2+ +\frac{1}{\sqrt{2}}y_3$, $x_3=\frac{1}{\sqrt{3}}y_1-\frac{2}{\sqrt{6}}y_2$.

в) $5y_1^2-y_2^2-y_3^2$; $x_1=\frac{1}{\sqrt{3}}y_1+\frac{1}{\sqrt{6}}y_2+\frac{1}{\sqrt{2}}y_3$; $x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}y_1+\frac{1}{\sqrt{6}}y_2- -\frac{1}{2}y_3$; $x_3=\frac{1}{\sqrt{3}}y_1-\frac{2}{\sqrt{6}}y_2$.

6. Чи зводяться одночасно дві квадратичні форми до найпростішого вигляду? У разі ствердної відповіді знайти невироджене лінійне перетворення, що зводить їх до найпростішого вигляду

а) $f(x_1,x_2)=x_1^2+10x_1x_2+26x_2^2$; $g(x_1,x_2)=x_1^2+56x_2^2+16x_1x_2$.

б) $f(x_1,x_2,x_3)=8x_1^2-28x_2^2+14x_3^2+16x_1x_2+14x_1x_3+32x_2x_3$;
$g(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2+2x_1x_3$.

в) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_4^2+x_1x_2+x_1x_3-2x_2x_3+2x_2x_4$;
$g(x_1,x_2,x_3,x_4)=\frac{1}{4}x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_4^2+2x_2x_4$.

Відповідь.

а) $f_1=y_1^2+y_2^2$; $g_1=4y_1^2-2y_2^2$; $x_1=-2\sqrt{2}y_1+3\sqrt{2}y_2$, $x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}y_1+\frac{\sqrt{2}}{2}y_2$;

б) $f_1=9y_1^2+9y_2^2-9y_3^2$; $g_1=y_1^2+y_2^2+y_3^2$; $x_1=\sqrt{2}y_2$, $x_2=\frac{1}{6}y_1-\frac{\sqrt{2}}{3}y_3$, $x_3=\frac{2}{3}y_1-\frac{\sqrt{2}}{2}y_2+\frac{\sqrt{2}}{6}y_3$.

в) $f_1=y_1^2+y_2^2-y_3^2-y_4^2$; $g_1=y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2$; $x_1=y_1+y_2+y_3+y_4$, $x_2=y_2-y_4$, $x_3=\frac{1}{2}y_1-\frac{1}{2}y_2+\frac{1}{2}y_3-\frac{1}{2}y_4$, $x_4=\frac{1}{2}y_1-\frac{1}{2}y_2-\frac{1}{2}y_3+\frac{1}{2}y_4$.