Самостійна робота № 9.

Тема: Застосування скалярного та векторного добутку векторів.
Мета: Навчитись застосовувати скалярний та векторного добутки векторів в задачах геометрії та фізики.

Термінологічний словник ключових понять

1. ***Скалярним добутком векторів*** називається число, яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними. Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначають символом $\vec{a}\,\vec{b}$. Якщо кут між векторами позначити через (φ), то їх скалярний добуток обчислюється за формулою:

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi).$$

2. **Векторним добутком векторів** $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який задовольняє умови:

- вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;
- довжина вектор $\vec{a}$ дорівнює добутку довжини кожного з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ на синус кута між ними;
- вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють праву трійку векторів, тобто з кінця вектора $\vec{c}$ найменший поворот вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ видно проти годинникової стрілки.

Позначають векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ так: $\bar{a}\times\bar{b}$.

Навчальні завдання

1. Дано три точки A (1, 1, 1), B (2, 2, 1) і C (2, 1, 2). Знайти кут φ = ∠ BAC.

● Знайдемо вектори $\vec{AB}$= (1, 1, 0), $\vec{AC}$= (1, 0, 1). Згідно з формулою (2.5) маємо:

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot1+1\cdot0+0\cdot1}{\sqrt{1^2+1^2+0}\cdot\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \frac{1}{2}, \text{ отже, } \varphi = 60°.$$

2. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ = (5, 2, 7), $\vec{b}$ = (1, 2, 4) як на сторонах.

● Знайдемо векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 5 & 2 & 7\\ 1 & 2 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 7\\ 2 & 4\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}5 & 7\\ 1 & 4\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}5 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}\vec{k}=-6\vec{i}-14\vec{j}+8\vec{k}\,.$$

Знайдемо $|\vec{c}|=\sqrt{6^2+14^2+8^2}=2\sqrt{74}$ кв. од.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ

1. Обчислити довжину діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=5\vec{p}+2\vec{g};\quad \vec{b}=\vec{p}-3\vec{g}$, коли відомо, що $|\vec{p}|=2\sqrt{2}$, $|\vec{g}|=3$, $(\widehat{p\,g})=-\frac{\pi}{4}$.

Відповідь. 15 і $\sqrt{593}$.

2. Обчислити довжину вектора $\vec{a}=6\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$ і кути, які він утворює з осями.

Відповідь. 7; $\arccos\frac{6}{7}$; $\arccos\left(-\frac{2}{7}\right)$; $\arccos\frac{3}{7}$.

3. Знайти $3\vec{m}^2-2(\vec{m}\vec{n})+4\vec{n}^2$, якщо $|m|=\frac{1}{3}$; $|\vec{n}|=b; \angle(m\,n)=\frac{\pi}{3}$.

Відповідь. 143.

4. Знайти $|\vec{a}\,|$, якщо $\vec{a}=2\vec{m}-4\vec{n}$; $|\vec{m}|=|\vec{n}|=1\ (\widehat{m\,n})=\frac{\pi}{2}$.

Відповідь. 5.

5. Який кут утворюють одиничні вектори $\vec{s},\ \vec{g}$, якщо $\vec{a}=\vec{s}+3\vec{g}$; $\vec{b}=5\vec{s}-4\vec{g}$ — взаємно перпендикулярні.

Відповідь. 60°.

6. Знайти проекцію вектора $\vec{a}=10\vec{m}-2\vec{n}$ на напрям вектора $b=5\vec{m}-12\vec{n}$, де $\vec{m}$ і $\vec{n}$ одиничні орти.

Відповідь. 2.

7. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=\vec{m}+2\vec{n}$; $\vec{в}=\vec{m}-3\vec{n}$, якщо $|\vec{m}|=5$; $|n|=1$ і $(\widehat{m\,n})=30^\circ$.

Відповідь. 125 кв. од.

8. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k};\ b=\vec{j}+\vec{k}$.

Відповідь. $\sqrt{35}$ кв. од.

9. Обчисліть проекцію вектора $\vec{a}=3\vec{i}-12\vec{j}+4\vec{k}$ на вектор $\vec{b}=\left(\vec{i}-2\vec{k}\right)\times\left(\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}\right)$.

Відповідь. $\frac{6}{7}$.