Лекція №5. Лінійні операції над векторами, заданими координатами. Скалярний, векторний та мішаний добуток векторів.

1. Лінійні операції над векторами

Розглянемо деякі поняття векторної алгебри при аналітичному означенні вектора.

Нуль-вектор 0 є вектор, всі координати якого дорівнюють нулеві, тобто 0 ={0; 0; 0}. Очевидно, |0| = 0, а напрям — будь-який.

Два вектори ***a*** та ***b*** **рівні,** якщо рівні їх координати:

$$a = b \Leftrightarrow a_x=b_x;\ \ a_y = b_y;\ \ \ a_z = b_z. \qquad (1)$$

(згідно з наслідком 2 із властивості 1 проекцій вектора), тобто одна векторна рівність еквівалентна трьом скалярним.

Два вектори ***a*** та ***b*** **колінеарні,** якщо їх відповідні координати пропорційні:

$$a||b \Leftrightarrow a_x/b_x = a_y/b_y = a_z/b_z = \lambda \Leftrightarrow a = \lambda b \qquad (2)$$

Сумою двох векторів ***a*** = $\{a_x,\ a_y,\ a_z\}$ та $b = \{b_x,\ b_y;\ b_z\}$ є вектор $a + b$, координати якого дорівнюють сумі відповідних координат доданків.

Добутком скаляра λ на вектор ***a*** = $\{a_x;\ a_y;\ a_z\}$ є вектор $\lambda\ a$, координати якого дорівнюють добутку λ на відповідні координати вектора a.

Отже,

$$a + b = \{a_x + b_x;\ a_y + b_y;\ a_z + b_z\},$$

$$\lambda\ a = \{\lambda\ a_x;\ \lambda\ a_y;\ \lambda\ a_z\}, \qquad (3)$$

$$\lambda_1 a + \lambda_2 b = \{\lambda_1 a_x + \lambda_2 b_x;\ \ \lambda_1 a_y + \lambda_2 b_y,\ \lambda_1 a_z + \lambda_2 b_z\}$$

Ці формули випливають із властивостей 2 та 3 проекцій векторів (властивості лінійності).

Легко переконатися, що всі закони лінійних операцій мають місце і при означенні цих операцій за формулами (3).

З точки зору фізики суму векторів можна розглядати як рівнодіючу системи сил — доданків векторів. Так, якщо, наприклад, є система двох сил $F_1 = \{F_{lx};\ F_{1y},\ F_{lz}\};\ F_2 = \{F_{2x};\ F_{2y};\ F_{2z}\}$, то рівнодіюча цієї системи — сила R, дорівнює

$$R = F_1 + F_2 = \{F_{1x} + F_{2x};\ F_{1y} + F_{2y};\ F_{1z} + F_{2z}).$$

2. Розклад вектора по координатних ортах

Розглянемо радіус-вектор $r = OM$, де $r = \{OM_x, OM_{y;} OM_z\} = \{x; y; z\}$ (рис. 1). Введемо три одиничні координатні вектори i, j, k, які напрямлені по координатних осях, тобто $i \perp j \perp k$, і мають модулі, що дорівнюють одиниці: $|i| = |j| = |k| = 1$ (рис. 1). Вектори i , j, k називаються **ортами** відповідно осей Ox, Oy, Oz, або **координатними ортами.**

Покажемо, що вектор $r = \{x; y; z\}$ можна представити у вигляді рівності:

$$r = xi + yj + zk, \tag{4}$$

яка називається **розкладом вектора по координатних ортах.**

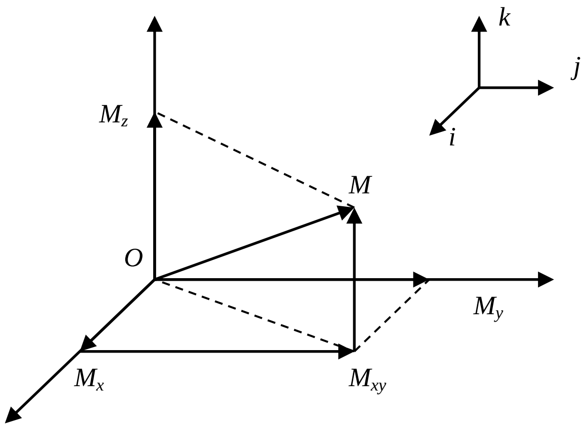


Рис.1

Дійсно, спроектуємо вектор OM на координатні осі. Тоді із рис. 1 видно, що вектор $r = OM$, який з'єднує точку O з точкою M, можна записати у вигляді суми:

$$OM = OM_x + M_xM_{xy} + M_{xy}M = = OM_x + OM_y + OM_z$$

(оскільки $M_xM_{xy} = OM_y$ і $M_{xy}M = = OM_z$). Вектори OM_x, OM_y, OM_z називаються складовими вектора r по координатних осях. Запишемо кожну складову через орти i, j, k. Маємо

$$OM_x = OM_x\, i; \quad OM_y = OM_y\, j; \quad OM_z = OM_z\, k,$$

де OM_x, OM_y, OM_z — це проекції вектора OM на відповідні осі. Множення цих чисел на вектори i, j, k переводить їх у вектори, напрямлені так само, як і $i, j, к$ і не змінює величин напрямлених відрізків. Звідси дістаємо

$$r = OM = OM_x\; i + OM_y\; j + OM_z\, k = xi + yj + zk.$$

Рівність (4) доведена.

Для будь-якого вектора $a = \{a_x, a_y; a_z\}$ рівність (4) набуває вигляду

$$a = a_xi + a_yj + a_zk \tag{5}$$

і називається розкладом вектора по координатних ортах.

Таким чином, ми одержали 3 еквівалентні представлення вектора у просторі:

1) своїми координатами:

$$a = \{a_x;\ a_y;\ a_z\};$$

2) розкладом по координатних ортах:

$$a = a_x i + a_y j + a_z k;$$

3) модулем і напрямними косинусами (напрямом):

$$|a|,\ \cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma.$$

3. Скалярний добуток векторів

Існують два види добутків векторів: скалярний і векторний. Результатом скалярного добутку двох векторів a і b є скаляр, результатом векторного — вектор. Скалярний добуток позначається так: $ab = (ab)$, а векторний: $a \times b = [ab]$.

Означенн. Кутом між двома векторами a та b називається менший із кутів, на який потрібно повернути один із векторів так, щоб його напрям збігся із напрямом другого вектора.

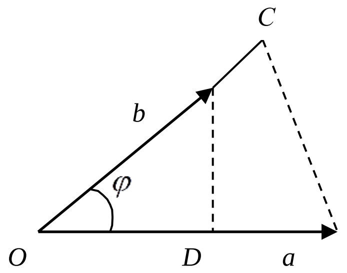


Рис.2

Позначається цей кут так: (a, b), якщо поворот іде від a до b і (b, a), якщо поворот іде від b до a. Очевидно, що $(a, b) = (b, a) = \varphi$ (рис. 2) і $0 < \varphi < 180°$.

Означення. Скалярним добутком двох векторів a та b називається скаляр, що дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними:

$$a\,b = |a|\,|b| \cos(a,b) \qquad (6)$$

Отже, добуток $\alpha\ b$ — це число, яке є додатне, якщо $(a, b) < 90°$ і добуток — від'ємне число, якщо $(a, b) > 90°$.

Властивості скалярного добутку

Властивість 1. Скалярний добуток векторів a та b дорівнює добутку модуля одного із векторів на проекцію другого вектора на напрям першого:

$$a\,b = |a| np_a b = |b| np_b a \qquad (7)$$

Дійсно, спроектуємо, наприклад, вектор b на напрям a (на рис. 2 $np_a b =$ вел. OD). Згідно з властивістю 1 проекцій вектора дістаємо

$$np_a b = |b| \cos\varphi = |b| \cos(a, b),$$

а тоді із формули (6) маємо

$$a\,b = |a|\,|b| \cos, (a, b) = |a|\, np_a b.$$

Аналогічно, якщо спроектувати a на напрям b (на рис. 2 $np_b a$ = вел. OC), дістаємо

$$a\ b = |a|\ |b| \cos(a, b) = |b|\ np_b a.$$

Наслідок 1. Проекцію вектора a (b) на вектор b (a) можна визначити за формулою:

$$np_b a = a\ b / |b|, \quad (np_a b = a\ b / |a|). \tag{8}$$

Це випливає із формули (7).

Наслідок 2. Косинус кута між двома векторами a та b обчислюється за формулою:

$$\cos(a, b) = \cos\varphi = a\ b / (|b||a|). \tag{9}$$

Це випливає із формули (6).

Властивість 2. Для скалярного добутку має місце переставний закон, тобто

$$a\ b = b\ a\ .$$

Це випливає із того, що $\cos(a, b) = \cos(b, a)$ і формули (9).

Властивість 3. Для скалярного добутку має місце розподільний закон відносно суми векторів, тобто

$$(a + b)\ c = a\ c + b\ \ c\ .$$

Дійсно, використовуючи формулу (7) і властивість 2 проекції суми векторів, можна записати:

$$(a + b)\ c = |c|\ np_c(a + b) = |c|(np_c a + np_c b) =$$
$$= |c|\ np_c a + |c| np_c b = a\ c + b\ c.$$

Властивість 4. Для скалярного добутку має місце сполучний закон відносно скаляра, тобто

$$\lambda\ (ab) = \lambda\ ab = a\ \lambda b.$$

Доведення аналогічне доведенню властивості 3. Користуючись формулою (7) і властивістю 3 проекцій вектора, маємо

$$a\ \lambda b = |a|\ np_a\ \lambda\ b = |a|\ \lambda\ np_a b = \lambda\ |a|\ np_a b = \lambda\ (ab).$$

Отже, із властивостей 2,3,4 випливає, що скалярний добуток векторів підпорядковується тим самим основним законам, що і добуток скалярів (чисел).

Властивість 5. **(Умова ортогональності двох векторів)**

Вектори a та b називаються ортогональними, якщо вони розташовані на перпендикулярних прямих, тобто, якщо $(a, b) = 90°$. Те, що a та b ортогональні, позначається так: $a \perp b$.

Вектори a та b ортогональні тоді і тільки тоді, коли їх скалярний добуток дорівнює нулеві:

$$a \perp b \Leftrightarrow a\, b=0. \qquad (10)$$

Дійсно, нехай $a \perp b$, тоді із (6) випливає

$$a\ \ b = |a|\,|b| \cos 90° = 0.$$

Нехай тепер $\alpha\ \ b = 0$. Це можливо (див. (6)) тоді і тільки тоді, коли або cos (a, b) = 0, тобто (a, b) = 90° і $a \perp b$, або коли $|a|$= 0, чи $|b|$= 0, тобто коли один із векторів (або обидва) є нульовим. Тоді кут між ними може бути будь-яким, зокрема 90°. Властивість 5 (формула (10)) доведена.

Властивість 6. Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля, тобто

$$a\, a = a^2 = |a|^2, \text{ або } |a| = \sqrt{a \cdot a} = \sqrt{a^2}\,. \qquad (11)$$

Дійсно, (a, a) = 0° і cos 0° = 1. Звідси і із означення скалярного добутку і випливає (11).

Властивість 7. Скалярний добуток векторів, заданих координатами, дорівнює сумі добутків їх відповідних координат, тобто, якщо $a = \{a_x;\ a_y,\ a_z\}$ і $b= \{b_x;\ b_y,\ b_z\}$, то

$$a\ \ b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \qquad (12)$$

Дійсно, нехай a та b задано координатами. Тоді можна записати їх розклад (формула (5)) по координатних ортах:

$$a = a_x i + a_y j + a_z\, k \quad \text{та} \quad b = b_x\, i + b_y j + b_z k$$

$$a\, b = (a_x i + a_y j + a_z k)(b_x i + b_y j + b_z k).$$

В останній рівності виконаємо множення, тобто розкриємо дужки, використовуючи властивості 2 — 4 скалярного добутку векторів. Дістанемо

$$a\ \ b = a_x b_x i^2 + a_x b_y i\, j + a_x b_z i\, k + a_y b_x j\, i + \alpha_y b_y j^2 +$$
$$+ a_y b_z j\, k + a_z b_x k\, i + a_z b_y k\, j + a_z b_z k^2. \qquad (*)$$

Але вектори i, j, k взаємно ортогональні $I \perp j \perp k$ і тому із (10) маємо: $i\, j = j\, i = i\, k = k\, i = j\, k = \kappa\, j = 0$. Далі, оскільки i, j, k — одиничні вектори, то , враховуючи (11), дістанемо $i^2 = |i|^2 = 1$; $j^2 = |j|^2 = 1$; $k^2 = = |k|^2 = 1$. Підставляючи все це в (*), одержимо (12):

$$a\, b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Наслідок. (Умова ортогональності векторів заданих своїми координатами). Вектори a та b ортогональні тоді і тільки тоді, коли сума добутків їх відповідних координат дорівнює нулеві:

$$A \perp b <=> a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

Це випливає із формул (10) і (12).

Фізичною інтерпретацією скалярного добутку може бути **робота** *A* сили *F* при переміщенні точки її прикладення із початку вектора *S* в його кінець, тобто

$$A = F\,S = |S|\,np_s F = |F|\,|S|\cos(F, S).$$

Приклад. Знайти внутрішній кут трикутника *ABC*, вершини якого знаходяться в точках *A* (1;—1; 1), *B* (2;—1 ;2), C(2;1;3) (рис.3).

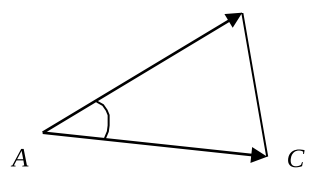


Рис.3

Розв'язання. Кут *A* трикутника *ABC* утворюється векторами *AB* і *AC,* отже, його можна визначити за формулою (9)

$$\cos A = \cos(AB, AC) =$$
$$= AB\,AC / (|AB||AC|).$$

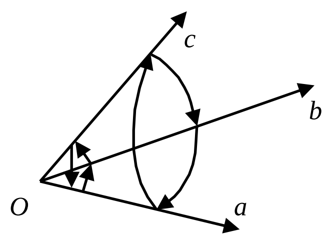
Для векторів *AB* і *AC* відомі координати точок, які визначають ці вектори. Тоді маємо:

$$AB = \{2 - 1;\ -1 - (-1);\ 2 - 1\} = \{1; 0; 1\},$$
$$AC = \{2 - 1;\ 1 - (-1);\ 3 - 1\} = \{1; 2; 2\}.$$

За формулами (12) і (11) знаходимо:

$$AB\,AC = 1\cdot1 + 0\cdot2 + 1\cdot2 = 3,\quad |AB| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$
$$|AC| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3 \text{ і } \cos A = 3/\left(3\sqrt{2}\right) = 1/\sqrt{2};\ A = 45°.$$

4. Векторний добуток векторів



Три вектори *a*, *b*, *c* називаються **трійкою,** якщо вони взяті у строгому порядку їх запису. Наприклад, *a*, *b*, *c* та *b*, *a*, *c*—різні трійки векторів.

Рис. 4

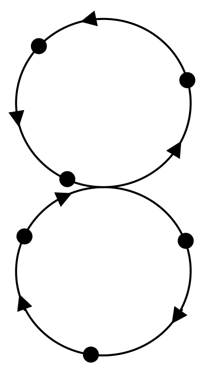


Рис.4

Означення. **Трійка** некомпланарних векторів *a, b, c,* що приведені до загального початку, називається **правою (лівою),** якщо спостерігачеві, що дивиться із кінця вектора c, найменший поворот від *a* до *b* видно проти (за) годинникової стрілки.

На рис. 4, наприклад, трійка *a, b, c* — права, а трійка *b, a, c* — ліва. Зауважимо, що права (ліва) трійка векторів розміщена як великий, вказівний і піднятий вгору середній пальці правої (лівої) руки.

Із трьох векторів можна, взагалі кажучи, утворити шість трійок. При цьому, якщо дві трійки або обидві праві, або обидві ліві, то говорять, що вони однієї орієнтації. Для зручності запису трійок наведемо просте правило (рис. 2) — правило «циклічної перестановки». Трійки, що утворюються при переході по колу від одного елемента до другого за одним напрямом (проти годинникової стрілки), є трійками однієї орієнтації, а за протилежним (за годинниковою стрілкою) — іншої. Так *a, b, c; b, c, a; c, a, b* мають одну орієнтацію, а *a, c, b; c, b, a; b, a, c* — іншу.

Означення. **Векторним добутком** векторів *a* та *b* називається вектор, $c = a \times b$ який

1). має модуль, що дорівнює добутку модулів цих векторів на синус кута між ними

$$|c| = |a \times b| = |a|\ |b| \sin (a, b);$$

2). перпендикулярний до площини, в якій лежать *a* та *b,* тобто

$$c \perp a, c \perp b;$$

3) утворює з *a* та *b* праву трійку (рис. 5).

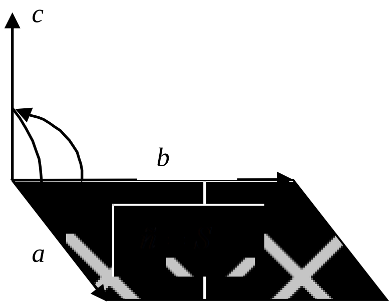


Рис5

Властивості векторного добутку

Властивість 1. **Модуль** векторного добутку векторів *a* та *b* дорівнює площі паралелограма, побудованого на *a* та *b* як на сторонах (рис. 5):

$$|a\times b| = S_{\square}=|a||b|\, sin\,(a,b) \qquad (13)$$

Відповідна формула для обчислення площі паралелограма відома із середньої школи.

Звідси випливає, що площа трикутника, дві сторони якого збігаються із векторами *a* та *b*, дорівнює

$$S_{\Delta} = S_{\lhd\rhd}/2=\left|a\times b\right|/2 \qquad (14)$$

Властивість 2. Для векторного добутку має місце антипереставний закон, тобто

$$a \times b = -(b \times a).$$

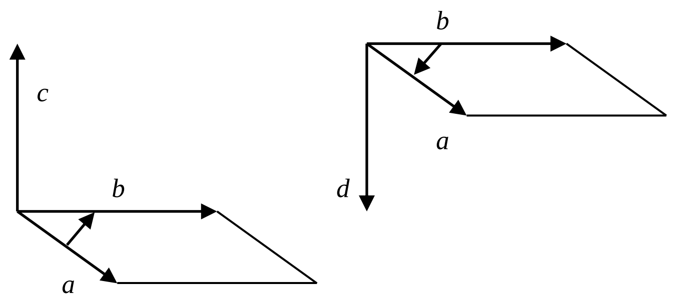


Рис.6

Дійсно, позначимо $a \times b = c$ і $b \times a= d$. Із означення векторного добутку очевидно, що $|c| = |d|$ (формула (1)) і $c \,||\, d$ (тому, що вектори *c* і *d* перпендикулярні площині, в якій лежать *a* та *b*). Отже, або $c = d$, або $c = -d$. Але орієнтації трійок *a, b, c* і *b, a, c* протилежні (рис. 6) і звідси $c = -d$, тобто властивість 2 доведена.

Геометрично властивість 2 проілюстрована на рис. 6.

Властивість 3. Для векторного добутку має місце **сполучний закон відносно скаляра,** тобто

$$\lambda(a \times b)= \lambda\, a \times b = a \times \lambda\, b.$$

Геометрично властивість 3 проілюстрована на рис. 7.

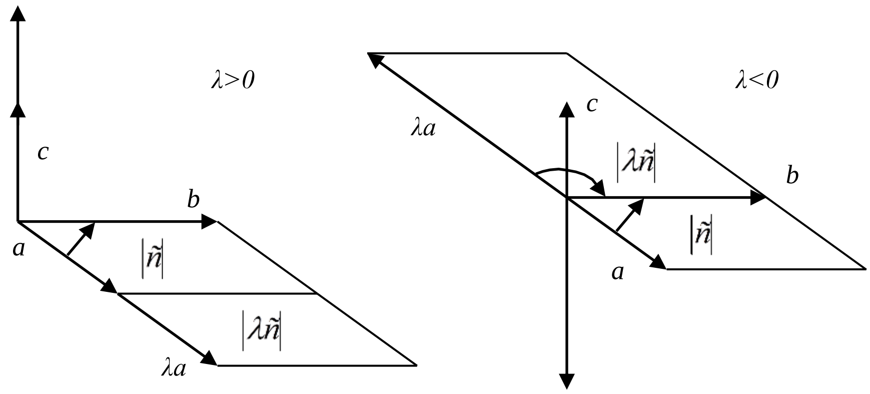


Рис.7

Властивість 4. Для векторного добутку має місце **розподільний закон відносно суми векторів,** тобто

$$(a+b) \times c = a \times c + b \times c.$$

Зауважимо, що при використанні властивостей 3, 4 потрібно у правій частині дотримувати той самий порядок векторів, що і у лівій, тобто враховувати антипереставний закон (властивість 2), а саме змінювати знак при зміні порядку векторів-співмножників.

Властивість 5 **(Умова колінеарності двох векторів).** Вектори a та b колінеарні тоді і тільки тоді, коли їх векторний добуток є нульовий вектор, тобто

$$a||b \Leftrightarrow a \times b = 0 \qquad (15)$$

Наслідок. Векторний квадрат є нуль-вектор, тобто

$$a \times a = 0.$$

Це випливає із того, що $a \,||\, a$.

Властивість 6. Векторний добуток векторів, заданих координатами, можна представити у вигляді визначника третього порядку:

$$c = a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \qquad (16)$$

де $a = \{a_x;\ a_y;\ a_z\}; b = \{b_x;\ b_y;\ b_z\}$.

Наслідок (Умова колінеарності векторів, заданих у координатній формі). Вектори колінеарні тоді і тільки тоді, коли їх відповідні координати пропорційні:

$$a \,||\, b \Leftrightarrow a_x/b_x = a_y/b_y = a_z/b_z$$

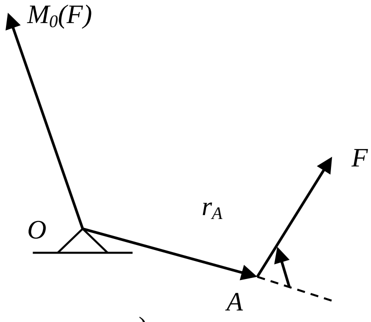
Фізичною інтерпретацією векторного добутку може слугувати:

а) **Момент сили *F*,** прикладеної в точці *A,* відносно довільної точки *O* (рис. 8 (а))

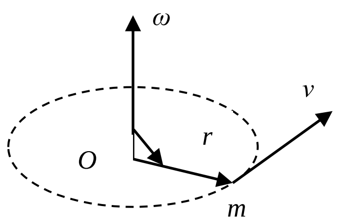
$$M_0(F) = r_A \times F,$$

де $r_A = OA$ — радіус-вектор точки *A* (вектор — плече сили ***F***).

б) **Лінійна швидкість** *v* точки *m,* яка обертається навкруги деякої осі з кутовою швидкістю ω, (рис. 8 (б)) $v = \omega \times r$, де *r* — вектор, що з'єднує вісь обертання з точкою *m* і |*r*|— це віддаль від осі обертання о точки *m*



а)



б)

Рис.6

Приклад. Знайти площу трикутника *ABC,* якщо A(1;2;3), B(;3;2), C(1;-2;4).
Розв'язання. Із означення векторного добутку і формули (14) маємо

$$S_\Delta = |a \times b|/2,$$

де *a* та *b* — це вектори, що збігаються із сторонами трикутника. Покладемо *a =AB, b =AC* і знайдемо ці вектори. Дістанемо *AB ={1;1;—1},AC= {0,—4,1}* — вектори задано своїми координатами. Отже, використовуючи (3), маємо

$$AB\times AC=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix}=-3i-j-4k$$

Тоді

$$S_\Delta=\left|AB\times AC\right|/2=\sqrt{(-3)^2+(-1)^2+(-4)^2/2}=\sqrt{26}/2 \quad \left(од^2\right)$$

5. *Мішаний добуток векторів*

Розглянемо тепер три вектори *a, b, c* і зрозуміємо як можна їх перемножити. Чи можна їх перемножити скалярно, тобто, чи має сенс добуток *abc* ? Очевидно, ні, тому що результатом скалярного множення *ab* є число, яке не можливо скалярно помножити на вектор *c.*

Далі, чи можна ці вектори перемножити векторно, тобто, чи має сенс добуток $a \times b \times c$? Так. Такий добуток називається **подвійним** векторним добутком. Але він нічого принципово нового, у порівнянні із векторним добутком двох векторів, не представляє.

Інтерес представляє так званий **мішаний** добуток трьох векторів:

$$(a \times b)c,$$

тобто спочатку два вектори перемножуються векторно, а потім результат множиться на третій вектор скалярно. Результатом мішаного добутку є скаляр.

Властивості мішаного добутку

Властивість 1. Мішаний добуток некомпланарних векторів *a, b, c* може бути представлений у вигляді

$$(a \times b)\, c = |a \times b| \cdot np_{a\times b}\, c\ .$$

***Властивість 2* (Геометричний зміст мішаного добутку).**

Модуль мішаного добутку трьох не-компланарних векторів *a, b, c* дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на *a, b, c* як на ребрах (рис. 7):

$$|(a\times b)\ c| = V \qquad (17)$$

Дійсно, маємо

$$|(a \times b)\, c| = ||a \times b|\, np_{a\times b}c|=S_\square\, |np_{a\times b}c|,$$

де $S_\square$— площа паралелограма (див. (14)), побудованого на векторах *a* та *b,* тобто площа основи паралелепіпеда. Далі вектор $a \times b$ перпендикулярний до площини векторів *a* та *b,* тобто напрямлений по висоті паралелепіпеда і $|np_{a\times b}\, c| = h$ — довжина висоти паралелепіпеда (рис. 7). Отже, одержано, що

$$|(a \times b)c| = S_\square h=V.$$

Наслідок. Об'єм трикутної піраміди (тетраедру), ребра якої некомпланарні вектори *a, b, c,* дорівнює

$$V_{тетр.} = |(a \times b)\ c|/b.$$

Це випливає із того, що площина, яка проходить через кінці векторів *a, b, c* (рис. 7), відсікає від паралелепіпеда піраміду, об'єм якої дорівнює 1/6 об’єму паралелепіпеда.

Властивість 3. Мішаний добуток векторів *a, b, c* не зміниться, якщо вектори *a, b, c* поміняти місцями, не порушуючи орієнтацію трійки, і змінить знак на протилежний, якщо поміняти орієнтацію трійки, тобто

$$(a \times b)\ c = (b \times c)\ a = (c \times a)\ b = -(a\ x\ c)\ b = -(c \times b)\ a = -(b \times a)c$$

(див. рис. 2).

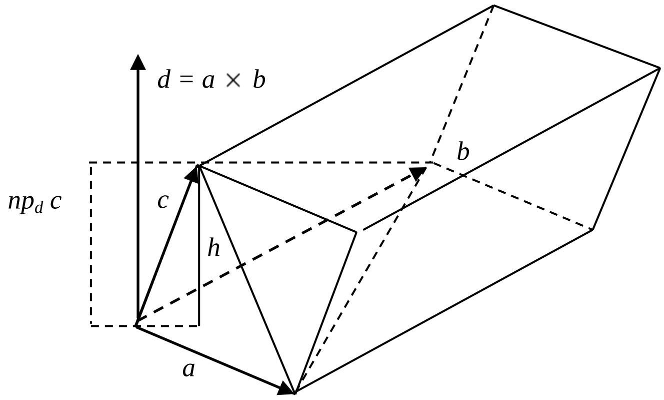


Рис.7

***Властивість 4* (Умова компланарності векторів).** Мішаний добуток векторів *a, b, c* дорівнює нулеві тоді і тільки тоді, коли ці вектори компланарні:

$$a, b, c \text{ — компланарні} \Leftrightarrow (a \times b)\ c = 0$$

Дійсно, нехай *a, b, c*— компланарні, тобто вектори лежать в одній площині і із властивості 2 випливає $(a \times b)\ c = 0$.

Нехай тепер $(a \times b)\ c = 0$. Це означає, що або $a \times b = 0$, тобто $a \| b$ і *a, b, c* компланарні; або $c = 0$, *c* — нульовий вектор, який можна вважати компланарним з *a* та *b*, або $(a \times b,\ c) = 90°$, тобто $c \perp (a \times b)$, отже, розташований в одній площині з *a* та *b*. Умова компланарності доведена.

Властивість 5. Мішаний добуток векторів, заданих координатами, можна представити як визначник третього порядку, що складений із координат цих векторів, тобто

$$(a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \qquad (18)$$

де $a = \{a_x;\ a_y;\ a_z\}; b = \{b_x;\ b_y;\ b_z\}; c = \{c_x;\ c_y;\ c_z\}$.

Наслідок (Умова компланарності векторів, заданих координатами).
Вектори *a, b, c* компланарні тоді і тільки тоді, коли визначник, складений із координат цих векторів, дорівнює нулеві, тобто

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0 \qquad (19)$$

Це випливає із властивості 16 і формули (17).
Приклад. Знайти висоту паралелепіпеда, побудованого на векторах $a = \{1;\ 2;\ 3\}$, $b = \{-2;\ 1;\ 4\}$, $c = \{0;\ 2;\ -1\}$, якщо за основу взято паралелограм, сторонами якого є вектори *a* та *b*.
Розв'язання. Із одного боку, згідно з формулою (4), маємо

$$V = |(a \times b)\, c|,$$

а з другого боку, $V = S_{\square} h$. Отже, $h = V/S_{\square}$, де $S_{\square}$— площа паралелограма, побудованого на векторах *a* та *b*, тобто $S_{\square} = |(a \times b)|$ (див. (13)). Тоді

$$h = |(a \times b)c| / |(a \times b)|.$$

Вектори задано координатами, тому для знаходження мішаного і векторного добутків використаємо формули (17) і (15):

$$(a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -25, \quad V = |(a \times b) \cdot c| = 25\ (од^3)$$

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 5i - 10j + 5k = 5(i - 2j + k);$$

$$|a \times b| = 5\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = 5\sqrt{6} \quad \text{і} \quad h = 25/5\sqrt{6} = 5\sqrt{6}/6.$$