Самостійна робота № 9.

Тема: Застосування мішаного добутку векторів.
Мета: Навчитись застосовувати мішаний добуток векторів в задачах геометрії.

Термінологічний словник ключових понять

Вектор — напрямлений відрізок.

Модуль вектора — довжина вектора.

Напрямні косинуси — косинуси кутів, що утворює вектор з осями координат.

1. ***Скалярним добутком векторів*** називається число, яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними. Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначають символом $\vec{a}\,\vec{b}$. Якщо кут між векторами позначити через (φ), то їх скалярний добуток обчислюється за формулою:

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi).$$

2. **Векторним добутком векторів** $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який задовольняє умови:

- вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;
- довжина вектор $\vec{a}$ дорівнює добутку довжини кожного з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ на синус кута між ними;
- вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють праву трійку векторів, тобто з кінця вектора $\vec{c}$ найменший поворот вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ видно проти годинникової стрілки.

Позначають векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ так: $\bar{a} \times \bar{b}$.

3. **Мішаним добутком векторів** $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ називається число, яке дорівнює скалярному добутку вектора $\vec{a}$ на векторний добуток векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$, тобто

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Навчальні завдання

1. У просторі задано чотири точки A (1, 1, 1), B (4, 4, 4), C (3, 5, 5), D (2, 4, 7). Знайти об’єм піраміди $ABCD$.

● З елементарної математики відомо, що об'єм піраміди $ABCD$ дорівнює одній шостій об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ і $\vec{AD}$, а останній, у свою чергу, дорівнює модулю мішаного добутку. Отже, маємо:

$$\vec{AB} = (3,\ 3,\ 3),\ \ \vec{AC} = (2,\ 4,\ 4),\ \ \vec{AD} = (1,\ 3,\ 6);$$

$$V_{\text{пр}} = \frac{1}{6}\left|\ \vec{AB}\left(\vec{AC}\cdot\vec{AD}\right)\right| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 3 \text{ куб. од.}$$

2. Дано трикутник A (4, 1), B (7, 5), C (– 4, 7). Знайти площу трикутника, вершини якого містяться в точках перетину бісектрис трикутника зі сторонами (рис. 2.13).

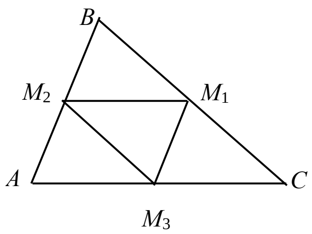

Рис. 2.13

● Бісектриса трикутника поділяє протилежну сторону на відрізки, пропорційні прилеглим сторонам. Знайдемо довжину відрізків AB, BC і AC за формулами (2.10).

$$AB = \sqrt{(4-7)^2 + (1-5)^2} = 5,\ \ BC = \sqrt{(7+4)^2 + (5+7)^2} = 15,$$

$$AC = \sqrt{(4+4)^2 + (1-7)^2} = 10.$$

Знайдемо відношення, в яких основи бісектрис точки M_1, M_2, M_3 (рис. 2.13) поділяють відповідні відрізки:

$$\frac{|BM_1|}{|M_1C|} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2};\quad \frac{|AM_2|}{|M_2B|} = \frac{AC}{BC} = \frac{2}{3};\quad \frac{|AM_3|}{|M_3C|} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{3}.$$

Скориставшись формулами (2.11) і (2.12), знайдемо відповідно координати точок M_1 (x_1, y_1), M_2 (x_2, y_2), M_3 (x_3, y_3).

$$x_1 = \frac{7 - 4\cdot\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{10}{3};\quad y_1 = \frac{5 + 7\cdot\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{17}{3};\quad M_1\left(\frac{10}{3};\ \frac{17}{3}\right);$$

$$x_2 = \frac{4 + 7\cdot\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}} = \frac{26}{5};\quad y_2 = \frac{1 + 5\cdot\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}} = \frac{13}{5};\quad M_2\left(\frac{26}{5};\ \frac{13}{5}\right);$$

$$x_3 = \frac{4 - 4\cdot\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = 2;\quad y_3 = \frac{1 + 7\cdot\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{5}{2};\quad M_3\left(2;\ \frac{5}{2}\right).$$

Площу трикутника $M_1\,M_2\,M_3$ обчислимо за формулою:

$$S = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \frac{26}{5}-\frac{10}{3} & 2-\frac{10}{3} \\ \frac{13}{2}-\frac{17}{3} & \frac{5}{2}-\frac{17}{3} \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \frac{28}{15}-\frac{4}{3} \\ -\frac{46}{15}-\frac{19}{6} \end{matrix}\right\| = 50 \text{ кв. од.}$$

Завдання для перевірки знань

1. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k};\ \vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k};\ \vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

2. Обчислити висоту паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}-5\vec{k}$; $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{i}=\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$, якщо його основа побудована на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Відповідь. $\frac{49}{\sqrt{232}}$.

3. Дано вершини трикутника A (3, 2); B (–1, –1); C (11, –6). Знайти довжини його сторін і точку перетину медіан.

4. Знайти вершини трикутника, знаючи середини його сторін $M(3;-2)$, $N(1;6)$, $P(-4;2)$.

Відповідь. $A(-2;-6)$, $B(8;2)$, $C(-6;10)$.

5. Дано три вершини паралелограма $A(4;2)$, $B(5;7)$, $C(-3;4)$. Знайти четверту вершину D, яка протилежна вершині B.

6. Відрізок між точками A (3; 2); B (15; 6) поділити на п’ять рівних частин. Знайти координати точок ділення.

7. Обчислити периметр і площу трикутника, якщо A (–2; 1); B (2, – 2); C (8, 6).

8. Дано трикутник A (4; 1), B (7, 5), C (– 4, 7). Знайти точку перетину бісектриси кута A з протилежною стороною BC.