Самостійна робота 11

Тема: Найпростіші задачі аналітичної геометрії

.**Мета.** Ознайомити студентів з найпростішими задачами аналітичної геометрії та методами їх розв’язання.

План занять

1. Віддаль між двома точками.
2. Ділення відрізка в заданому відношенні.
3. Площа трикутника.
4. Центр мас системи матеріальних точок

Розглянемо найпростіші задачі, що виникають між точками на площині і в просторі.

Задача 1. Віддаль між двома точками. Нехай задано дві точки *M* і *N*. Знайти віддаль між ними.

Розв’язання. З’єднаємо точки *M* і *N* вектором $\overline{MN}$ (рис.1). Тоді

$$d = \left|\overline{MN}\right| \tag{1.1}$$

Перейдемо до системи координат. Якщо точки задані на площині (в R^2), тобто $M(x_1, y_1)$ і $N(x_2, y_2)$, то $\overline{MN} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$ і (1.1) набуває вигляду

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{1.2}$$

Якщо точки задано в просторі (в R^3), тобто $M(x_1, y_1, z_1)$ і $N(x_2, y_2, z_2)$, то $\overline{MN} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$ і (1.1) набуває вигляду:

$\overline{MN} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$ і (1.1) набуває вигляду:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,. \tag{1.3}$$

Зокрема, якщо знаходиться віддаль між початком координат і $O(0;0)$ і точкою $M(x, y)(M(x, y, z))$, то

$$d = \left|\overline{OM}\right| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \left(d = \left|\overline{OM}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) \tag{1.4}$$

Задача 2. **Ділення відрізка в заданому відношенні.** Нехай задано дві точки *M* і *N*. Знайти точку *C*, яка належить відрізку *MN* і ділить його у заданому відношенні λ (рис.1), тобто $\lambda = \frac{MC}{CN}$ (MC, CN – величини відповідних відрізків)

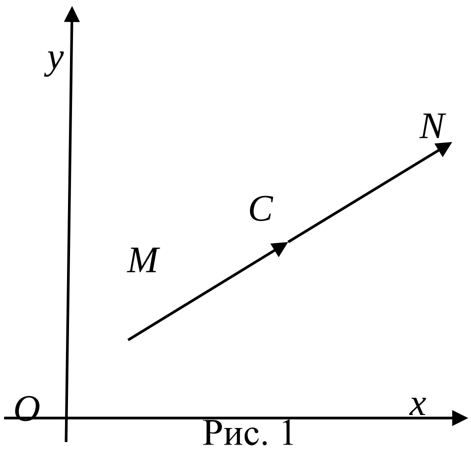

Рис. 1

Розв'язання. Розглянемо вектори $\overline{MC}$ і $\overline{CN}$. Очевидно, що вони колінеарні. Тоді згідно з умовою

$$\overline{MC} = \lambda \overline{CN}. \tag{1.5}$$

Перейдемо тепер до системи координат. Якщо точки задано в R^2, тобто $M(x_1, y_1)$ і $N(x_2, y_2)$ і шукана точка $C(x, y)$, то $\overline{MC} = \{x - x_1; y - y_1\}$, $\overline{CN} = \{x_2 - x; y_2 - y\}$ і рівність (1.5) перейде у такі рівняння:

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x), \qquad y - y_1 = \lambda(y_2 - y),$$

або

$$x + \lambda x = x_1 + \lambda x_2, \qquad y + \lambda y = y_1 + \lambda y_2.$$

Звідки

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \quad (\lambda \neq -1) \tag{1.6}$$

Зокрема, якщо $C(x, y)$ – середина відрізка *MN*, то $\lambda = 1$ і із (1.6) дістанемо

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{2} \tag{1.7}$$

Аналогічно, якщо розглядається задача в R^3 тобто $M(x_1, y_1, z_1)$ і $N(x_2, y_2, z_2)$, то дістанемо

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + z} \quad (\lambda \neq -1) \tag{1.8}$$

і для точки, що є серединою відрізка *MN*, маємо

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{2} \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{2} \tag{1.9}$$

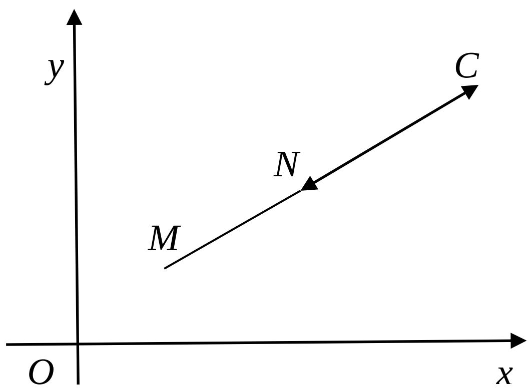

Рис. 2

На рис.2 точка C розташована між точками M і N, тобто вектори $\overline{MC}$ і $\overline{CN}$ спів напрямлені і $\lambda > 0$; точка C ділить відрізок MN внутрішнім чином. Але точка C може знаходитись на тій же прямій, що і $\overline{MN}$, і бути зовні відрізка MN (рис. 2). У цьому випадку вектори $\overline{MC}$ і $\overline{CN}$ протилежно напрямлені і $\lambda < 0$; точка C ділить відрізок MN зовнішнім чином. Звичайно, формули (1.6) і (1.8) зберігаються. Випадок, коли $\lambda = -1$ означає, що $\overline{MC} = -\overline{CN}$, тобто точки M і N співпадають, і задача не має сенсу.

Задача 3. Площа трикутника. Нехай задано три точки *M, N, K,* знайти площу трикутника *MNK*

Розв'язання. Візьмемо два вектори, що співпадають із сторонами трикутника і виходять із однієї (будь-якої) вершини, наприклад, $\overline{MN}$ і $\overline{MK}$. Із векторної алгебри відомо, що

$$S_{\Delta MNK} = \frac{1}{2}\left|\overline{MN} \times \overline{MK}\right| \tag{1.10}$$

Звідси, в R^2 маємо точки $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, $K(x_3, y_3)$ і вектори $\overline{MN} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$, $\overline{MK} = \{x_3 - x_1; y_3 - y_1\}$.

Представимо векторний добуток рівності (1.10) у координатній формі. Дістанемо:

$$S_{\Delta MNK} = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\left|\bar{k}\right|\left\|\begin{matrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{matrix}\right\| =$$

$$= \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{matrix}\right\| \tag{1.11}$$

оскільки $\left|\bar{k}\right| = 1$.

Аналогічно у випадку R^3 маємо

$$S_{\Delta MNK} = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{matrix}\right\| \qquad (1.12)$$

Зокрема, якщо із формул (1.11) і (1.12) дістанемо, що $S_\Delta = 0$, то точки *M, N, (M, N, K)* лежать на одній прямій.

Задача 4. Центр мас системи матеріальних точок. Нехай задано *n* матеріальних точок $M_1, M_2, ...M_n$, в яких зосереджені маси $m_1, m_2, ...m_n$. Знайти центр мас цієї системи.

Розв'язання. При розв'язанні цієї задачі використовуємо такі твердження, відомі з механіки:

1. Центром мас системи із двох точок M_1 і M_2 з масами відповідно m_1 і m_2 є точка *C*, що належить відрізку M_1M_2 і ділить його у відношенні λ, обернено пропорційним масам точок, тобто

$$\lambda = \frac{m_2}{m_1} = \frac{M_1C}{CM_2}.$$

2. Центр мас системи із *n* матеріальних точок $M_1, M_2, ...M_n$ з масами $m_1, m_2, ...m_n$ відповідно співпадає з центром мас системи з двох точок, одна з яких є точка M_n з масою m_n, а друга – центр мас системи з $n-1$ точки $M_1, M_2, ...M_{n-1}$, у якій зосереджена маса $m_1 + m_2 + ... + m_{n-1}$.

Розглянемо задачу в R^2. Із першого твердження для двох точок, M_1 і M_2, користуючись формулами (1.6), дістанемо:

$$x_{c_2} = \frac{x_1 + \frac{m_2}{m_1}x_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} = \frac{x_1m_1 + x_2m_2}{m_1 + m_2},$$

$$y_{c_2} = \frac{y_1 + \frac{m_2}{m_1} y_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2}{m_1 + m_2},$$

(1.13)

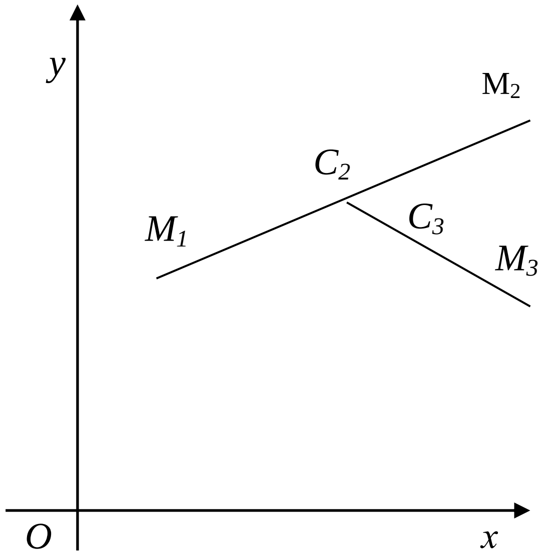

Рис. 3

тобто центр мас знаходиться у точці $C_2(x_2, y_2)$ (рис.). Візьмемо тепер три точки M_1, M_2, M_3 із масами відповідно m_1, m_2, m_3. Згідно із другим твердженням замінимо систему із двох точок M_1 і M_2 точкою $C_2(x_2, y_2)$ із масою $m_1 + m_2$ і розглянемо систему із двох точок C_2 і M_3. Для центра мас $C_3(x_3, y_3)$ цієї системи згідно із формулами (1.13) дістанемо

$$x_{c_3} = \frac{(m_1 + m_2)\frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2} + m_3 x_3}{(m_1 + m_2) + m_3} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

(1.14)

$$y_{c_3} = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + y_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Користуючись методом індукції, для центра мас $C_n(x_{C_n}, y_{C_n})$ системи *n* матеріальних точок, дістаємо

$$x_{C_n} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_n m_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}, \quad y_{C_n} = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + \ldots + y_n m_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}.$$

(1.15)

Якщо точки $M_1, M_2, \ldots M_n$ розташовані в R^3, то до формул (1.15) додається ще одна

$$z_{C_n} = \frac{z_1 m_1 + z_2 m_2 + \ldots + z_n m_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$$

Завдання для перевірки знань

1. Скласти рівняння катетів прямокутного рівнобедреного трикутника, якщо $y = 3x + 5$ — рівняння гіпотенузи, A (4, – 1) — вершина прямого кута.

Відповідь. $y = -2x + 7;\ y = \frac{1}{2}x - 3$.

2. Дано вершини трикутника A (4; 6), B (– 4; 0), C (– 1; – 4). Скласти рівняння: а) трьох його сторін; б) медіани, проведеної з вершини C; в) бісектриси кута B; г) висоти, опущеної з вершини A.

3. Дано трикутник з вершинами в точках $A\left(-\frac{1}{7}; -\frac{3}{28}\right)$, $B(4,\ 3)$, $C(2,\ -1)$. Обчислити довжини його висот.

Відповідь. $h_A = \frac{27\sqrt{5}}{28}$.

4. На осі абсцис знайти точку, яка міститься на відстані a від прямої $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Відповідь. $\left(0;\ b \pm \sqrt{a^2 + b^2}\right)$.

5. З точок перетину прямої $3x + 5y - 15 = 0$ з осями координат встановлено перпендикуляри до цієї прямої. Знайти їх рівняння.

Відповідь. $5x - 3y + 9 = 0;\ 5x - 3y - 25 = 0$.

6. Дано дві вершини трикутника A (– 6; 2), B (2; – 2) і H (1; 2) — точку перетину його висот. Обчислити координати третьої вершини.

Відповідь. C (2; 4).

7. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку (2; – 1) і утворює з віссю Ox удвічі більший кут, ніж кут, що його утворює з тією самою віссю пряма $x - 3y + 4 = 0$.

Відповідь. $3x - 4y - 10 = 0$.

8. Рівняння бічних сторін рівнобедреного трикутника $y = 3$; $x - y + 4 = 0$. Скласти рівняння основи, якщо вона проходить через початок системи координат.

Відповідь. $y = \left(-1 \pm \sqrt{2}\right)x$.

9. Скласти рівняння сторін квадрата, якщо A(2; – 4) — його вершина, M(5; 2) — точка перетину діагоналей.

Відповідь. $3x + y = 2;\ x - 3y = 14;\ x - 3y = -16;\ 3x + y = 32$.

10. Скласти рівняння сторін трикутника, якщо A(3; 5), B(6; 1) — його вершини, M(4; 0) — точка перетину медіан.

Відповідь. $4x + 3y = 27,\ x = 3,\ 7x - 3y = 39$.

11. Скласти рівняння прямої, що поділяє відрізок AB, A(– 3; 2), B(5; – 2) навпіл і утворює з відрізком AB кут, удвічі більший, ніж із віссю Ox.

Відповідь. $x - 2y - 1 = 0$.

12. Через точку A(5; 2) провести пряму, що відтинає рівні відрізки на осях системи координат.

Відповідь. $x + y = 7$.

13. Знайти дотичні до кола $x^2 + y^2 = 29$, що проходить через точку $A(7; –3)$.
Відповідь. $5x + 2y = 29$, $2x - 5y = 29$.

14. У трикутнику $A(1; 2)$, $B(3; 7)$, $C(5; – 13)$ обчислити довжину перпендикуляра, опущеного з вершини B на медіану, проведену з вершини A.
Відповідь. $\frac{25}{\sqrt{34}}$.

15. Знайти рівняння прямої, паралельної прямій $12x + 5y – – 52 = 0$, що міститься від неї на відстані 2 лін. од.
Відповідь. $12x + 5y - 26 = 0$, $12x + 5y - 78 = 0$.

16. Скласти рівняння прямої, що проходить посередині між прямими $4x - 6y = 3$, $2x - 3y = -7$.
Відповідь. $8x - 12y + 11 = 0$.

17. Знайти точку, симетричну точці $A(– 2; – 9)$ відносно прямої $2x + 5y = 38$.
Відповідь. (10; 21).

18. Дано рівняння двох суміжних сторін паралелограма $x – y = 1$, $x – 2y = 0$, $M(3; – 1)$ — точка перетину діагоналей. Записати рівняння двох інших сторін паралелограма.
Відповідь. $x – y = 7$, $x – 2y = 10$.

19. Відоме рівняння $3x + 2y + 6 = 0$ однієї сторони кута і $x – 3y + 5 = 0$ — рівняння його бісектриси. Скласти рівняння другої сторони кута.
Відповідь. $6x + 17y = 15$.

20. У трикутнику ABC відомі AB: $4x + y - 12 = 0$, висота BH: $5x - 4y = 15$, висота AK: $2x + 2y - 9 = 0$. Записати рівняння сторін AC; BC.
Відповідь. $4x + 5y = 20$; $x - y = 3$.

21. Скласти рівняння сторін трикутника, якщо $A(– 4; 2)$ — одна з його вершин і $3x - 2y + 2 = 0$ і $3x + 5y - 12 = 0$ — рівняння двох його медіан.
Відповідь. $2x + y = 8$; $x - 3y = -10$, $x + 4y = 4$.

22. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи одну з його вершин $A(3; – 4)$ і рівняння висот: $7x - 2y = 1$, $2x - 7y = 6$.
Відповідь. $2x + 7y + 22 = 0$, $7x + 2y - 13 = 0$, $x - y + 2 = 0$.

Навчальні завдання

1. Пряму задано рівнянням $3x - 5y + 15 = 0$. Перевірити, які з точок $A\ (-2, 3)$, $B\ (0, 3)$, $C\ (5, 6)$, належать заданій прямій, знайти її рівняння з кутовим коефіцієнтом і у відрізках на осях.

● Для перевірки того, чи лежать точки A, B, C на прямій, підставимо їхні координати в рівняння прямої:

$$A\colon\ 3(-2) - 5 \cdot 3 + 15 \neq 0,\quad B\colon\ 3 \cdot 0 - 3 \cdot 5 + 15 = 0,$$
$$C\colon\ 3 \cdot 5 - 5 \cdot 6 + 15 = 0.$$

Таким чином, точка A не лежить на прямій, а точки B і C лежать на прямій.

Поділимо рівняння прямої почленно на коефіцієнт при y: $\frac{3}{5}x - y + 3 = 0$, а далі запишемо його у вигляді $y = \frac{3}{5}x + 3$ — рівняння з кутовим коефіцієнтом.

Поділивши рівняння почленно на вільний член:

$$\frac{3x}{15} - \frac{5y}{15} + 1 = 0, \text{ або } \frac{x}{-5} + \frac{y}{3} = 1,$$

дістанемо шукане рівняння у відрізках на осях.

2. Дано дві вершини трикутника $A\ (2, -3)$, $B\ (5, 1)$, рівняння сторони BC: $x + 2y - 7 = 0$ і медіани AM: $5x - y - 13 = 0$. Скласти рівняння висоти, опущеної з вершини C, обчислити її довжину, знайти кут трикутника при вершині A.

● Нехай вершина трикутника $C\ (x_1,\ y_1)$. Тоді точка з координатами $x_2 = \frac{5 + x_1}{2}; y_2 = \frac{1 + y_1}{2}$ лежить на медіані, тобто виконується рівність $5\left(\frac{5 + x_1}{2}\right) - \frac{1 + y_1}{2} - 13 = 0$. Крім того, точка C лежить на прямій BC. Отже, маємо систему рівнянь для знаходження координат (x_1, y_1):

$$\begin{cases} 5x_1 - y_1 - 2 = 0 \\ x_1 + 2y_1 - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 3. \end{cases}$$

Знайдемо рівняння прямих AB і AC, використовуючи рівняння прямої (2.16), маємо:

$$AB\colon\ \frac{y+3}{1+3} = \frac{x-2}{5-2} \Rightarrow y = \frac{4}{3}x - \frac{17}{3};\quad AC\colon\ \frac{y+3}{3+3} = \frac{x-2}{1-2} \Rightarrow y = -6x + 9.$$

Висота проходить через точку C перпендикулярно до прямої AB. Використаємо умову перпендикулярності двох прямих і знайдемо кутовий коефіцієнт висоти $k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{3}{4}$. Використаємо рівняння (2.15) і знайдемо рівняння висоти:

$$y - 3 = -\frac{3}{4}(x - 1) \Rightarrow 3x + 4y - 15 = 0.$$

Довжину висоти знайдемо як відстань від точки $C(1, 3)$ до прямої AB.

$$h = \frac{|4 \cdot 1 - 3 \cdot 3 - 17|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{22}{5} = 4{,}4.$$

Щоб обчислити кут A, скористаємось формулою для знаходження кута між двома прямими (2.18):

$$\mathrm{tg}\hat{A}=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}=\frac{-6-\frac{4}{3}}{1-6\cdot\frac{4}{3}}=\frac{22}{21};\ \hat{A}=\mathrm{arctg}\frac{22}{21}.$$

3. Паралельні прямі проходять відповідно через точки $O(0,\ 0)$ і $M(1,\ 3)$. Знайти їх рівняння, коли відомо, що відстань між ними дорівнює $\sqrt{5}$.

● Якщо прямі паралельні, то їх кутові коефіцієнти рівні між собою, тому згідно з (2.15) рівняння шуканих прямих можна записати у вигляді $y=kx,\ y-3=k(x-1).$ Візьмемо довільну точку, що лежить на першій прямій, наприклад $(1,k)$. Тоді згідно з формулою для відстані точки до прямої запишемо:

$\sqrt{5}=\frac{|k-k-k+3|}{\sqrt{1+k^2}}$, звідки знайдемо $k_1=-2,\ k_2=\frac{1}{2}.$ Рівняння прямих: $y=-2x;\ 2x+y-5=0$ або $y=\frac{1}{2}x;\ x-2y+5=0.$

4. Записати рівняння бісектрис кутів, утворених прямими $x+7y-6=0$ і $5x-5y+1=0.$

● Використаємо відому властивість бісектриси кута про те, що на ній лежить множина точок, рівновіддалених від сторін кута. Нехай $M(x,\ y)$ — точка, яка належить цій множині. Тоді за формулою відстані від точки до прямої записуємо:

$\frac{|x+7y-6|}{\sqrt{1+49}}=\frac{|5x-5y+1|}{\sqrt{25+25}}$. Звідси маємо два рівняння бісектрис: $x+7y-6=5x-5y+1$ і $x+7y-6=-5x+5y+1,$ або, після перетворень: $4x-12y+7=0,\ 6x+2y-5=0.$

5. Обчислити площу ромба, знаючи одну з його вершин $A(0,\ -1)$, точку перетину діагоналей $M(4,\ 4)$ і точку $N(2,\ 0)$ на стороні AB.

● Використовуючи (2.16), запишемо рівняння сторони AB:

$\frac{y+1}{1}=\frac{x}{2}$, або $x-2y-2=0.$ Знайдемо координати точки $C(x,\ y)$, яка за властивістю точки перетину діагоналей ромба симетрична точці A відносно точки M. Отже, $4=\frac{0+x}{2};\ 4=\frac{-1+y}{2}$, звідки $C(8,\ 9)$. Висоту ромба знайдемо як відстань від точки C до прямої AB:

$$h=\frac{|8-18-2|}{\sqrt{5}}=\frac{12}{\sqrt{5}}.$$

Знайдемо кутовий коефіцієнт діагоналі ромба AC: $k=\frac{9+1}{8-0}=\frac{5}{4}.$ Кутовий коефіцієнт другої діагоналі дорівнює $-\frac{4}{5}$, а її рівняння $4x+5y-36=0.$ Розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases}x-2y=2\\4x+5y=36\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{82}{13}\\[4pt]y=\frac{28}{13}\end{cases},$$

знаходимо координати точки $B\left(\frac{82}{13};\frac{28}{13}\right)$. Довжина сторони ромба $|AB|=\sqrt{\left(\frac{82}{13}\right)^2+\left(\frac{28}{13}\right)^2}=\frac{41}{13}\sqrt{5}.$

Отже, площа ромба $s=|AB|\cdot h=\frac{41}{13}\sqrt{5}\cdot\frac{12}{\sqrt{5}}=37\frac{11}{13}$.

6. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи одну з його вершин A(2, –4) і рівняння бісектрис двох його кутів: $x+y-2=0;\ \ x-3y-6=0.$

● Підставлянням координати точки A в рівняння бісектрис пересвідчимось, що бісектриси не проходять через цю точку. Нехай для визначеності вершина B і вершина C належать відповідно першій і другій бісектрисам. Знайдемо координати точки A', симетричної точці A відносно бісектриси $x+y-2=0$. Ця точка буде лежати на прямій BC. Для цього запишемо рівняння перпендикуляра до цієї бісектриси, що проходить через точку A. Маємо: $y+4=x-2$, або $x-y-6=0.$ Знайдемо точку перетину бісектриси і перпендикуляра, розв'язуючи систему $\begin{cases}x+y=2\\x-y=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4\\y=-2\end{cases}$; координати точки $A'(x,\ y)$ знайдемо з виразів $4=\frac{2+x}{2};\ \ -2=\frac{-4+y}{2};\ \ A'(6,0).$ Аналогічно знайдемо координати точки A'', симетричної точці A, відносно бісектриси $x-3y-6=0.\ A''\left(\frac{2}{5};\ \frac{4}{5}\right).$ Рівняння прямої BC знайдемо з (2.16): $\frac{y}{\frac{4}{5}}=\frac{x-6}{-\frac{28}{5}}\Rightarrow x+7y-6=0.$ Обчислимо координати вершин B і C як координати точок перетину відповідних бісектрис з прямою BC: $x+7y-6=0.$ Дістаємо: $B\left(\frac{4}{3};\frac{2}{3}\right);\ \ C(6;0)$. З (2.16) маємо рівняння сторін відповідно AB і AC: $7x+y-10=0$; $x-y-6=0.$

Завдання для перевірки знань

1. Скласти рівняння катетів прямокутного рівнобедреного трикутника, якщо $y = 3x + 5$ — рівняння гіпотенузи, A (4, – 1) — вершина прямого кута.

Відповідь. $y=-2x+7;\ \ y=\frac{1}{2}x-3$.

2. Дано вершини трикутника A (4; 6), B (– 4; 0), C (– 1; – 4). Скласти рівняння: а) трьох його сторін; б) медіани, проведеної з вершини C; в) бісектриси кута B; г) висоти, опущеної з вершини A.

3. Дано трикутник з вершинами в точках $A\left(-\frac{1}{7};-\frac{3}{28}\right),\ \ B(4,\ 3),\ \ C(2,\ -1)$. Обчислити довжини його висот.

Відповідь. $h_A=\frac{27\sqrt{5}}{28}$.

4. На осі абсцис знайти точку, яка міститься на відстані a від прямої $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

Відповідь. $\left(0;\ b\pm\sqrt{a^2+b^2}\right).$

5. З точок перетину прямої $3x+5y-15=0$ з осями координат встановлено перпендикуляри до цієї прямої. Знайти їх рівняння.

Відповідь. $5x-3y+9=0;\ 5x-3y-25=0.$

6. Дано дві вершини трикутника A (– 6; 2), B (2; – 2) і H (1; 2) — точку перетину його висот. Обчислити координати третьої вершини.

Відповідь. C (2; 4).

7. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку (2; – 1) і утворює з віссю Ox удвічі більший кут, ніж кут, що його утворює з тією самою віссю пряма $x-3y+4=0.$

Відповідь. $3x-4y-10=0.$

8. Рівняння бічних сторін рівнобедреного трикутника y = 3; x – y + 4 = 0. Скласти рівняння основи, якщо вона проходить через початок системи координат.

Відповідь. $y=\left(-1\pm\sqrt{2}\right)x.$

9. Скласти рівняння сторін квадрата, якщо A(2; – 4) — його вершина, M(5; 2) — точка перетину діагоналей.

Відповідь. $3x+y=2;\ x-3y=14;\ x-3y=-16;\ 3x+y=32.$

10. Скласти рівняння сторін трикутника, якщо A(3; 5), B(6; 1) — його вершини, M(4; 0) — точка перетину медіан.

Відповідь. $4x+3y=27,\ x=3,\ 7x-3y=39.$

11. Скласти рівняння прямої, що поділяє відрізок AB, A(– 3; 2), B(5; – 2) навпіл і утворює з відрізком AB кут, удвічі більший, ніж із віссю Ox.

Відповідь. $x-2y-1=0.$

12. Через точку A(5; 2) провести пряму, що відтинає рівні відрізки на осях системи координат.

Відповідь. $x+y=7.$

13. Знайти дотичні до кола $x^2+y^2=29,$ що проходить через точку A(7; –3).

Відповідь. $5x+2y=29,\ 2x-5y=29.$

14. У трикутнику A(1; 2), B(3; 7), C(5; – 13) обчислити довжину перпендикуляра, опущеного з вершини B на медіану, проведену з вершини A.

Відповідь. $\dfrac{25}{\sqrt{34}}.$

15. Знайти рівняння прямої, паралельної прямій 12x + 5y – – 52 = 0, що міститься від неї на відстані 2 лін. од.

Відповідь. $12x+5y-26=0,\ 12x+5y-78=0.$

16. Скласти рівняння прямої, що проходить посередині між прямими $4x-6y=3,\ 2x-3y=-7.$

Відповідь. $8x-12y+11=0.$

17. Знайти точку, симетричну точці A(– 2; – 9) відносно прямої $2x+5y=38.$

Відповідь. (10; 21).

18. Дано рівняння двох суміжних сторін паралелограма $x - y = 1$, $x - 2y = 0$, $M(3; - 1)$ — точка перетину діагоналей. Записати рівняння двох інших сторін паралелограма.

Відповідь. $x - y = 7$, $x - 2y = 10$.

19. Відоме рівняння $3x + 2y + 6 = 0$ однієї сторони кута і $x - 3y + 5 = 0$ — рівняння його бісектриси. Скласти рівняння другої сторони кута.

Відповідь. $6x + 17y = 15$.

20. У трикутнику ABC відомі AB: $4x + y - 12 = 0$, висота BH: $5x - 4y = 15$, висота AK: $2x + 2y - 9 = 0$. Записати рівняння сторін AC; BC.

Відповідь. $4x + 5y = 20$; $x - y = 3$.

21. Скласти рівняння сторін трикутника, якщо $A(- 4; 2)$ — одна з його вершин і $3x - 2y + 2 = 0$ і $3x + 5y - 12 = 0$ — рівняння двох його медіан.

Відповідь. $2x + y = 8$; $x - 3y = -10$, $x + 4y = 4$.

22. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи одну з його вершин $A(3; -4)$ і рівняння висот: $7x - 2y = 1$, $2x - 7y = 6$.

Відповідь. $2x + 7y + 22 = 0$, $7x + 2y - 13 = 0$, $x - y + 2 = 0$.