Лекція №6. Рівняння прямої на площині

Нехай на площині задано декартову систему координат xOy і задано деяку лінію L. Будь-яка лінія — це геометричне місце точок, що мають деяку загальну властивість. Аналітичний вираз цієї властивості, як зв'язок між координатами x,y точок, що лежать на лінії L, представляє рівняння з двома змінними x, y, загальний вигляд якого

$$F(x,y) = 0.$$

Означення. Рівняння $F(x, y) = 0$ називається **рівнянням лінії L** (при заданій системі координат), якщо його задовольняють координати x, y будь-якої точки, що лежить на L, і не задовольняють координати точок, що не лежать на L. Говорять також, що рівняння $F(x, y) = 0$ визначає лінію L.

Будь-яку лінію L на площині можна представити рівнянням $F(x, y) = 0$, що виражає загальну властивість точок тільки цієї лінії і яке задовольняють координати тих і лише тих точок, що належать цій лінії.

Таким чином, виникають дві задачі.

1. По заданому рівнянню $F(x, y) = 0$ визначити вигляд лінії L та її властивості.
2. Скласти рівняння лінії L за заданою загальною властивістю всіх точок цієї лінії.

1. Рівняння прямої з нормальним вектором

Нехай задано точку $M_0(x_0, y_0)$, що належить прямій лінії L, і вектор $n = \{A; B\}$, перпендикулярний до цієї прямої (рис. 1). Скласти рівняння прямої L.

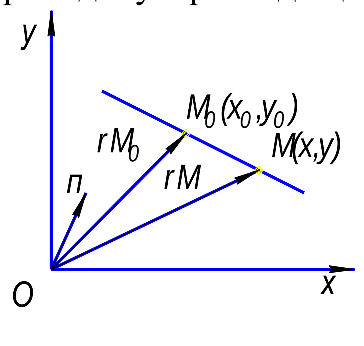


Рис. 1

Вектор n називається **нормальним вектором** прямої.

Візьмемо на L довільну (біжучу) точку $M(x, y)$. Очевидно, що вектори n та M_0M взаємно перпендикулярні ($n \perp M_0M$) тоді і тільки тоді, коли M належить L. Згідно з умовою перпендикулярності векторів, скалярний добуток векторів n і M_0M дорівнює нулеві, тобто $n\ \ M_0M = 0$. Але вектор

$$M_0M = OM\text{-}OM_0 = r_M\text{-}r_{M0}$$

($r_м > r_{м0}$ — радіуси-вектори відповідно точок M і M_0) і дістаємо таке рівняння:

$$(r_M - r_{M0})\ n = 0 \qquad (1)$$

Рівняння (1) називається **векторним рівнянням прямої з нормальним вектором.**

Запишемо рівняння (1) в координатній формі. Оскільки вектори

$r_M - r_{M0} = \{x\text{-}x_0\,;y\text{-}y_0\}$, $n = \{A;B\}$, то (1) набуває вигляду

$$A(x - x_0)+B(y - y_0) = 0. \qquad (2)$$

Рівняння (2) називається **рівнянням прямої, що проходить через задану точку із заданим нормальним вектором.**

Зауважимо, що якщо вектор $n = \{A;\ B\}$ є нормальним вектором прямої, то і будь-який вектор $\{\lambda A;\ \lambda B\}$ ($\lambda \neq 0$ — число) також є нормальним вектором даної прямої.

2. Загальне рівняння прямої

Загальне рівняння першого степеня (лінійне рівняння) з двома змінними x, y має вигляд

$$Ax + By+C=0,$$

де хоча б один із коефіцієнтів A і B не дорівнює нулеві.

Теорема про взаємно однозначну відповідність між прямою на площині і рівнянням $Ax + \mathbf{By} + \mathbf{C} = \mathbf{0}$

1. Будь-яка пряма на площині може бути представлена рівнянням $Ax + By + C = \mathbf{0}$.

2. Рівняння $Ax + By + C = 0$ при будь-яких A, B, C (крім випадку $A = B = 0$) є рівнянням прямої на площині.

Дослідження загального рівняння прямої

Розглянемо рівняння $Ax + By + C = 0$ *і* дослідимо положення прямої в залежності від коефіцієнтів A, B, C.

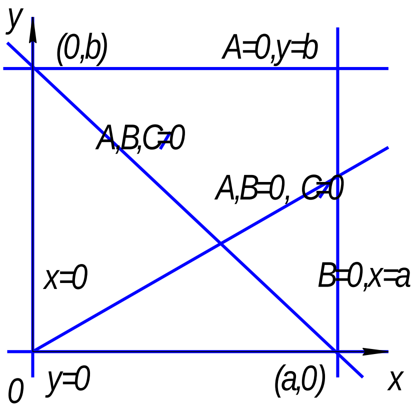


Рис. 2

1) $A, B, C \neq 0$ — пряма загального положення і перетинає обидві координатні осі. При $y = 0$, $x = -\frac{C}{A} = a$, тобто (a, 0) — точка перетину з віссю Ox; при $x = 0$, $y = -\frac{C}{A} = b$, тобто $(0, b)$ — точка перетину з віссю Oy (рис. 5);

2) $C = 0$; $A, B \neq 0$; $Ax + By = 0$ — пряма проходить через початок координат ($A\,0 + B\,0 = 0$) (рис. 5);

3) $B = 0$; $A, C \neq 0$; $Ax + C = 0$ і нормальний вектор $n = \{A; 0\}$, перпендикулярний до осі Oy, а пряма паралельна осі Oy. Рівняння цієї прямої $x = -\frac{C}{A}$, або $x = a$. Аналогічно, якщо $A = 0$, $B, C \neq 0$; $By + C = 0$ або $y = -\frac{C}{B} = b$— пряма паралельна осі Ox (рис. 2);

4) $B = C = 0$; $A \neq 0$; $Ax = 0$, або $x = 0$ — рівняння осі Oy;
$A = C = 0$; $B \neq 0$; $By = 0$, або $y = 0$ — рівняння осі Ox.

3. Канонічне рівняння прямої. Параметричні рівняння прямої

Нехай задано точку $M_0 (x_0\ y_0)$, яка належить прямій L, і вектор $s = \{l; m\}$, паралельний даній прямій. Записати рівняння L.

Вектор $s = \{l; m\}$ називається **напрямним вектором прямої.**

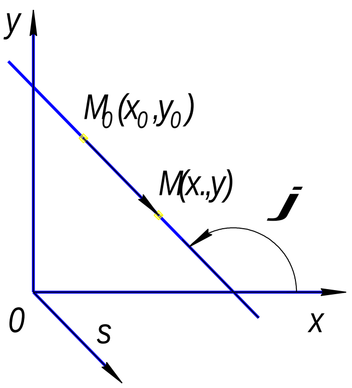


Рис. 3

Візьмемо на прямій *L* довільну точку $M(x, y)$ і вектор M_0M. Вектори $M_0M = \{x-x_o; y-y_o\}$ і $s = \{l; m\}$ будуть колінеарними ($M_0M \parallel s$) тоді і тільки тоді, коли точка $M(x, y)$ належить прямій. Тоді із умови колінеарності векторів випливає, що відповідні координати векторів пропорційні, тобто

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \qquad (3)$$

Рівняння (3) називається **канонічним рівнянням прямої,** або рівнянням прямої, що проходить через задану точку з напрямним вектором $s = \{l; m\}$.

Рівнянням (3) може бути задана будь-яка пряма. Зокрема, якщо, наприклад, вектор *s* і пряма перпендикулярні осі *Ox,* то $s = \{0; m\}$ і рівняння (3) набуває вигляду

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{m}$$

що означає: $x - x_0 = 0$, або $x = x_0$.

Зауваження. Якщо вектор $s = \{l; m\}$ є напрямним для прямої *L,* то і будь-який вектор $\{\lambda l; \lambda m\}$ $(\lambda \neq 0)$ також є напрямним вектором цієї прямої.

У формулі (3) прирівнюємо рівні відношення **параметрові *t*.**

Дістаємо систему $\dfrac{x - x_0}{l} = t$, $\dfrac{y - y_0}{m} = t$

або

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases} \qquad -\infty < t < +\infty \qquad (4)$$

Рівняння (4) називаються **параметричними рівняннями прямої.** При зміні параметра *t* точка $M(x, y)$ переміщується по прямій *L*.

4. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Кутом φ нахилу прямої називається кут між прямою і віссю *Ox*. Причому кут φ відраховується від додатного напряму осі *Ox* до прямої проти годинникової стрілки, так що $0 < \varphi \leq \pi$ (рис. 3).

Кутовим коефіцієнтом *k* прямої називається тангенс кута нахилу, тобто $k = \mathrm{tg}\,\varphi$. Скласти рівняння прямої.

Для цього скористаємося рівнянням (3), у якому числа *l* і *m* — проекції напрямного вектора *s* (рис. 3). Тому

$$l = np_x s = |s| cos(Ox, s) = |s| cos\varphi,$$

$$m = np_y s = |s| \cos(Oy, s) = |s| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = |s| \sin\varphi.$$

Отже,

$$\frac{m}{l} = \frac{|s| \sin\varphi}{|s| \cos\varphi} = tg\varphi = k \qquad (l \neq 0).$$

Тоді із (3) дістаємо $y - y_0 = \frac{m}{l}(x - x_0)$ або

$$y - y_0 = k(x - x_0). \qquad (5)$$

Рівняння (5) називається **рівнянням прямої, що проходить через задану точку з кутовим коефіцієнтом.** Зауважимо, що не будь-яка пряма має кутовий коефіцієнт. Так, якщо пряма перпендикулярна

осі Ox ($l = 0$), то кут $\varphi = \frac{\pi}{2}$ і $k = tg\frac{\pi}{2}$ не існує.

Перетворимо рівняння (5) так:

$$y = y_0 + kx - kx_0, \qquad y = kx + (y_0 - kx_0).$$

Позначимо $b = y_0 - kx_0$; дістанемо

$$y = kx + b. \qquad (6)$$

Рівняння (6) є рівнянням лінійної функції. Якщо в (6) прийняти $x = 0$, то $y = b$. Отже, пряма перетинає вісь Oy в точці $(0, b)$ і число b є величиною відрізка, який відсікає пряма на осі Oy. При $b = 0$ дістаємо

$$y = kx.$$

Це т— рівняння прямої, що проходить через початок координат.

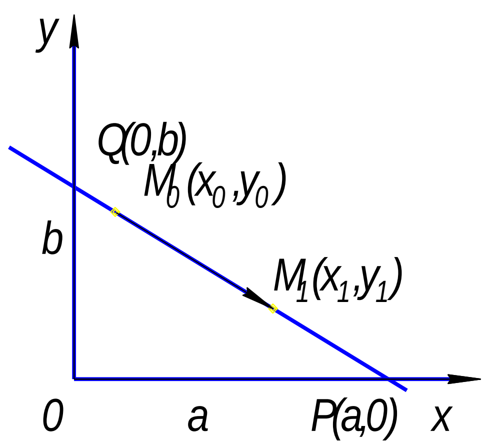


Рис. 4

5. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

Нехай задано точки M_0 (x_0, y_0), M_1 (x_1,y_1), які належать прямій L. Скласти рівняння цієї прямої (рис. 4).

Вектор M_0M_1 лежить на прямій L і, отже, можна вважати, що M_0M_1 — напрямний вектор прямої L. Тому використовуємо формулу (3). Маємо $s = M_0M_1 =\{x_1 — x_0; y_1 - y_0\}$, так що $l=x_1 —x_0$, $m = y_1 —y_0$ і підставляючи в (3), дістаємо

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}. \qquad (7)$$

Рівняння (7) — рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.

6. Рівняння прямої у відрізках на осях

Нехай пряма L перетинає обидві координатні осі, відсікаючи на них відрізки, величини яких відповідно дорівнюють $a \neq 0$ і $b \neq 0$ (рис. 4). Скласти рівняння прямої L.

За умовою нам відомі дві точки, що лежать на L: P $(a, 0)$ і Q $(0, b)$ (рис. 4). Тому використовуємо формулу (13)

$$\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0}, \quad \frac{x-a}{-a}=\frac{y}{b}, \quad -\frac{x}{a}+1=\frac{y}{b}$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \quad (a\neq 0, b\neq 0). \qquad (8)$$

Рівняння (8) називається **рівнянням прямої у відрізках на осях.**

7. Умови паралельності і перпендикулярності двох прямих. Кут між двома прямими

Ми одержали різні вигляди рівняння прямої, що проходить через задану точку, при різних способах завдання напряму цієї прямої: нормальним вектором $\boldsymbol{n} = \{A; B\}$, напрямним вектором $s = \{l;m\}$, кутовим коефіцієнтом $k =$ = tg φ.

Для багатьох задач потрібно знати напрям прямої, заданої загальним рівнянням $Ax + By + C =$ O, тобто потрібно визначити координати векторів $\boldsymbol{n}$ або s, або кутовий коефіцієнт k цієї прямої.

Нехай задано рівняння: $Ax + By + C = 0.$

Тоді очевидні координати нормального вектора $\boldsymbol{n} = \{A; B\}$. Для знаходження напрямного вектора $\boldsymbol{s}$ зауважимо, що за $\boldsymbol{s}$ можна вибрати будь-який вектор, перпендикулярний вектору $\boldsymbol{n}$, наприклад, $\boldsymbol{s} = \{B;-A\}$

(дійсно, $ns = A\,B + B(-A) = 0$).
Для знаходження k зобразимо це рівняння у вигляді,

$$y = \frac{A}{B}x - \frac{C}{B},\ (B \neq 0)$$

Знаходимо, що $k = -\frac{A}{B}$. Отже,

якщо задано рівняння $Ax + By + C = 0$, то	
$n = \{A; B\}$	- нормальний вектор прямої;
$s = \{B; -A\}$	- напрямний вектор прямої;
$k = tg\,\varphi = -\frac{A}{B}\ (B \neq 0)$	- кутовий коефіцієнт прямої.

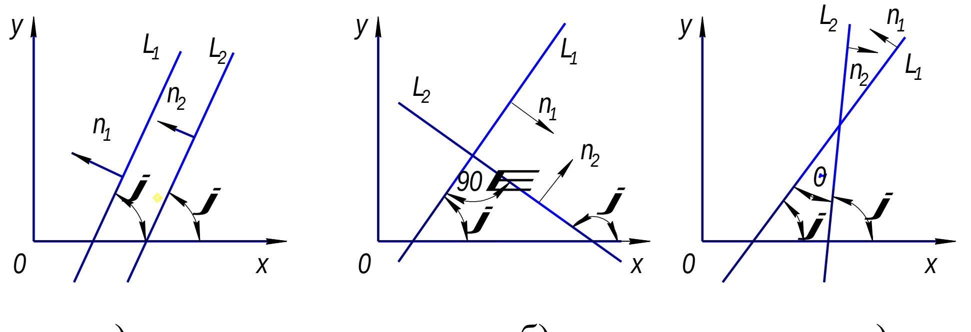
Нехай задано дві прямі $A_1x + B_1y + C_1 = 0\ (L_1)$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0\ (L_2)$. Запишемо їх нормальні вектори $n_1 = \{A_1; B_1\}, n_2 = \{A_2; B_2\}$.

Умова паралельності прямих:

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}}$$

Дійсно, оскільки $L_1 || L_2$ (рис 5 (а)), то вектори n_1 і n_2 колінеарні $n_1 || n_2$, отже, їх одноіменні координати пропорційні.

Умова перпендикулярності прямих: $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.
Дійсно, оскільки $L_1 \perp L_2$ (рис. 5 (б)), то вектори $\boldsymbol{n_1}$ і $\boldsymbol{n_2}$ перпендикулярні $n_1 \perp n_2$. Отже, їх скалярний добуток дорівнює нулеві $\boldsymbol{n_1}\ \boldsymbol{n_2} = 0$.



а) б) в)

Рис. 5

Кут між прямими. Нехай **Θ** — кут між прямими L_1 і L_2 (рис. 1, в)), тоді кут між векторами n_1 і n_2 буде $\mathbf{\Theta} = (n_1, n_2)$ або 180° — $\mathbf{\Theta} = (\boldsymbol{n_1}\,\boldsymbol{n_2})$ і

$$\boxed{\cos\Theta = \pm\frac{n_1 \cdot n_2}{|\,n_1\,| \cdot |\,n_2\,|} = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^{\ 2} + A_2^{\ 2}} \cdot \sqrt{B_1^{\ 2} + B_2^{\ 2}}}}$$

Аналогічні умови дістаємо, якщо використовуємо напрямні вектори s_1 і s_2 прямих L_1 і L_2.

2) Знайдемо кутові коефіцієнти k_1 і k_2 прямих L_l і L_2.

Умова паралельності прямих:

$$\boxed{k_1 = k_2}$$

Дійсно, оскільки прямі L_1 і L_2 паралельні (рис. 5 (а)), то кути φ_1 і φ_2 їх нахилу рівні, тобто $\varphi_1 = \varphi_2$, отже, $tg\ \varphi_1 = tg.\ \varphi_2$

Умова перпендикулярності прямих

$$\boxed{\text{або} \quad k_2 k_1 = -1}$$

Дійсно, оскільки прямі L_1 і L_2 перпендикулярні (рис. 5 (б)), то кут між ними дорівнює 90°, і для кутів їх нахилу φ_1 і < φ_2 дістаємо < $\varphi_2 = 90° + \varphi_1$.

Звідки $tg\varphi_2 = tg(90^\circ + \varphi_1) = ctg\varphi_1 = -\dfrac{1}{tg\varphi_1}$.

Кут між прямими. Нехай Θ — кут між прямими L_1 і L_2 (рис. 5, в), тоді одержуємо, що $\Theta = \varphi_2 - \varphi_1$. Звідки $tg\ \Theta = tg\ (\varphi_2 - \varphi_1)$,

або $tg\ \Theta = \dfrac{tg\varphi_2 - tg\varphi_1}{1 + tg\varphi_2 \cdot tg\varphi_1}$.

$$\boxed{tg\Theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}}$$

Повернутися до змісту