Самостійна робота 12

Тема: Деякі типові задачі на пряму на площині.

Мета. Ознайомити студентів з різними видами рівнянь прямої, навчити їх методиці розв'язання базових задач.

План занять

1. Рівняння прямої на площині, різні форми задання.
2. Кут між двома прямими, відстань від точки до прямої.
3. Умови паралельності та перпендикулярності прямих.

Деякі типові задачі

Задача 1. Нехай задана пряму $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і точку $M_0(x_0, y_0)$. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку M_0 та

а) паралельна заданій прямій; б) перпендикулярна до заданої прямої.

Розв'язання. Якщо задана пряма, то відомий її нормальний вектор $\overline{n}_1 = \{A_1; B_1\}$, тому використаємо формулу (2.4).

а) Шукана пряма паралельна даній, отже, $\overline{n}_1 \parallel \overline{n}_2$, і можна вважати, що $\overline{n}_2 = \overline{n}_1 = \{A_1; B_1\}$, і тоді із (2.4) маємо

$\boxed{A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) = 0}$ — рівняння прямої, що проходить

через точку M_0 перпендикулярно до заданої прямої.

Задача 2. Задана пряма $2x - 3y + 5 = 0$ і точка $M_0(-2;1)$. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку M_0 під кутом $\theta = \frac{\pi}{4}$ до заданої прямої.

Розв'язання. У цій задачі задано кут між прямими. Для знаходження напряму шуканої прямої краще використати формулу для $\mathrm{tg}\theta = \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4}$,

тобто напрям визначити за допомогою кутового коефіцієнта k_2. Для заданої прямої $2x - 3y + 5 = 0$ маємо $k_1 = \frac{2}{3}$. Далі дістаємо

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1}, \qquad \mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = 1 = \frac{k_2 - \frac{2}{3}}{1 + k_2 \cdot \frac{2}{3}},$$

$$1+\frac{2}{3}k_2=k_2-\frac{2}{3},\qquad \frac{1}{3}k_2=\frac{5}{3}\qquad k_2=5.$$

У формулі для $\mathrm{tg}\theta$ неясно, який з кутових коефіцієнтів k_1 чи k_2 вважати заданим. Тому задача має два розв’язки. Ми одержали $k_2=k^{(1)}=5$. Замінимо місцями шуканий і заданий кутові коефіцієнти і одержимо:

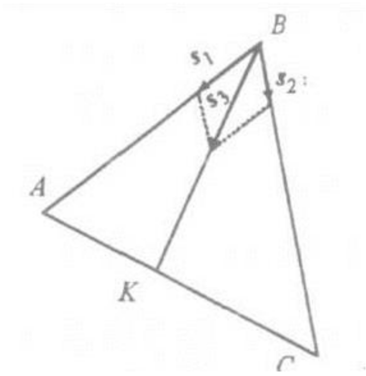
$$1=\frac{\frac{2}{3}-k^{(2)}}{1+\frac{2}{3}k^{(2)}};\qquad 1+\frac{2}{3}k^{(2)}=\frac{2}{3}-k^{(2)}$$

$$\frac{5}{3}k^{(2)}=-\frac{1}{3}\qquad k^{(2)}=-\frac{1}{5}.$$

Для того, щоб записати рівняння шуканої прямої, скористаємось формулу (2.8)

Перше рівняння: $y-1=5(x+2)$, або $5x-y+11=0$

Друге рівняння: $y-1=-\frac{1}{5}(x+2)$, або $x+5y-3=0$



Задача 3. Задано вершини трикутника $A(4;6)$, $B(-4;0)$, $C(-1;-4)$. Скласти рівняння бісектриси внутрішнього кута *B*.

Розв’язання. Зробимо схематичний рисунок (рис.9). Для розв’язання задачі використаємо те, що діагональ ромба є і бісектрисою відповідного кута. Отже, якщо $\bar{s}_1$ і $\bar{s}_2$ – напрямні вектори прямих BA і BC і їх довжина однакова: $|\bar{s}_1|=|\bar{s}_2|$, то $\bar{s}_3=\bar{s}_1+\bar{s}_2$ – напрямний вектор бісектриси кута *B*. За вектори $\bar{s}_1$ і $\bar{s}_2$ можна взяти, наприклад, напрямні орти векторів $\overline{BA}$ і $\overline{BC}$, тобто $\bar{s}_1=\overline{BA}^0$, $\bar{s}_2=\overline{BC}^0$.

Маємо:

$\overline{BA}=\{8,6\}$, $|\overline{BA}|=\sqrt{64+36}=10$, $\bar{s}_1=\overline{BA}^0$
$=\{8/10,6/10\}=\{4/5,3/5\}$

$\overline{BC} = \{3,-4\}$, $|\overline{BC}| = \sqrt{9+16} = 5$, $\bar{s}_2 = \overline{BC}^0 = \{3/5,-4/5\}$.

Тоді $\bar{s}_3 = \bar{s}_1 + \bar{s}_2 = \{7/5,-1/5\}$, або можна вважати, що $\bar{s}_3 = \{7,-1\}$.

Складемо тепер рівняння прямої , що проходить через точку B у напрямі $\bar{s}_3$, тобто використаємо формулу (2.6): $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m}$. Тоді

$$\frac{x+4}{7} = \frac{y-0}{-1}; \qquad x+4 = -7y, \quad \text{або} \quad x+7y+4=0$$

– рівняння бісектриси BK .

Перетин двох прямих

Нехай задано дві прямі загальними рівняннями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \qquad \text{і} \qquad A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Потрібно знайти точку їх перетину, або впевнитись, що такої немає. Оскільки координати x_0, y_0 точки перетину повинні задовольняти обидва рівняння, то їх потрібно шукати як розв'язок системи:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \qquad \text{і} \qquad A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

При цьому можливі три випадки:

1) Прямі перетинаються, тобто вектори $\bar{n}_1 = \{A_1; B_1\}$, $\bar{n}_2 = \{A_2, B_2\}$ не колінеарні:

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}.$$ Система має єдиний розв'язок.

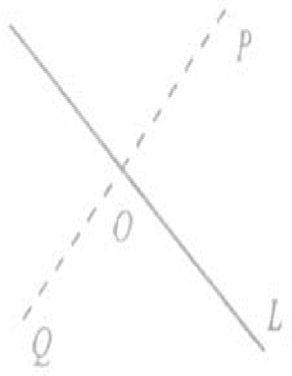
2) Прямі паралельні, так що вектори $\bar{n}_1 = \{A_1; B_1\}$, $\bar{n}_2 = \{A_2, B_2\}$ колінеарні, і

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$, але різні, тому $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ — система не має розв'язку.

3) Прямі співпадають, тобто $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Система має нескінченну множину розв'язків.

Задача 4. Знайти точку $Q(x,y)$, симетричну точці $P(-2,-9)$ відносно прямої $2x+5y-38=0 \quad (L)$



Розв'язання. Зробимо схематичний рисунок (рис.10). Очевидно, що точка Q повинна бути розташована на прямій PQ, перпендикулярній до прямої L, і відстояти від L на такій же віддалі, що і P.

1) Складемо рівняння прямої PQ, перпендикулярної до L, що проходить через точку $P(-2,-9)$. Маємо $\overline{n}_2 = \{2,\ 5\}$. Тоді $\overline{n}_{PQ} = \{5,\ -2\}$ (див. задачу 1), і згідно з формулою (2.4) одержуємо $5(x+2)-2(y+9)=0$, $5x-2y-8=0$ — рівняння прямої PQ.

2) Знаходимо точку перетину прямих L і PQ. Для цього розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x+5y-38=0 \\ 5x-2y-8=0 \end{cases}$$

Одержуємо точку $O(4,6)$.

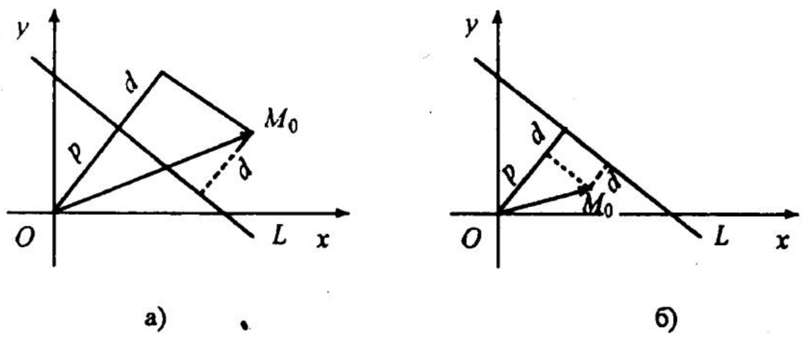
3) Знаходимо точку Q з умови $\overline{PO}=\overline{OQ}$, тобто $4-(-2)=x-4$, . $6-(-9)=y-6$

Звідки $x=10,\quad y=21$.

Отже, точка $Q(10,21)$ — шуканий розв'язок задачі.

Віддаль від точки до прямої

Нехай задана пряма L, що не проходить через початок координат, тобто задане рівняння $Ax+By+C=0$ ($C \neq 0$) і задана точка $M_0(x_0, y_0)$. Знайти віддаль d від точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої L.



а) б)

Згідно з умовою, пряма не проходить через початок координат ($C \neq 0$).

Позначимо через P віддаль від прямої до початку координат (рис.11 а) та в)).

Розглянемо спочатку випадок, коли точка $M_0(x_0, y_0)$ і початок координат $O(0,0)$ лежать по різні сторони від прямої L (рис.11 а). Проведемо радіус-вектор $\overline{OM_0} = \bar{r}_{M_O} = \{x_0; y_0\}$ і спроектуємо його на нормаль $\bar{n} = \{A, B\}$. Тоді, з однієї сторони $np_{\bar{n}}\, \bar{r}_{M_O} = \dfrac{\bar{r}_{M_O} \cdot \bar{n}}{|\bar{n}|}$, з іншої сторони, з іншої сторони , модуль цієї проекції дорівнює $p + d$. Отже,

$$p + d = \frac{|\,\bar{r}_{M_O} \cdot \bar{n}\,|}{|\bar{n}|} = \frac{|\,Ax_0 + By_0\,|}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \text{або} \quad p + d = \frac{Ax_0 + By_0}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}},$$

а звідси

$$d = \frac{Ax_0 + By_0}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} - p.$$

Знайдемо p. Нехай точка $M_0(x_0, y_0)$ лежить на прямій L. Тоді, по-перше, $d = 0$, по-друге, координати точки M_0 задовольняють рівняння прямої, тобто $Ax_0 + By_0 + C = 0$ і $Ax_0 + By_0 = -C$. Враховуючи це, одержуємо:

$$p = \frac{Ax_0 + By_0}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{-C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} > 0 \qquad (2.12)$$

Формула (2.12) визначає віддаль p прямої L від початку координат, якщо знак перед радикалом протилежний знаку *C*. Підставивши (2.12) у вираз для d, знаходимо

$$d = \frac{Ax_0 + By_0}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Нехай тепер точки $M_0(x_0, y_0)$ і $O(0,0)$ лежать по одну сторону прямої L (рис.11б)). У цьому випадку $|np_{\bar{n}}\, \bar{r}_{M_O}| = p - d$. Як і в попередньому випадку , для d, дістанемо

$$-d = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad \text{або} \qquad d = -\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Об'єднавши обидва випадки розташування точки $M_0(x_0, y_0)$, дістанемо

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \right| = \frac{| Ax_0 + By_0 + C |}{\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{2.13}$$

— формулу для обчислення віддалі від точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$.

Отже, щоб знайти віддаль від точки до прямої, потрібно у лівій частині загального рівняння прямої замінити біжучі координати на координати заданої точки і абсолютну величину одержаного числа поділити на

$$|\bar{n}| = \sqrt{A^2 + B^2} .$$

Зокрема, якщо точка $M_0(x_0, y_0)$ належить прямій, то

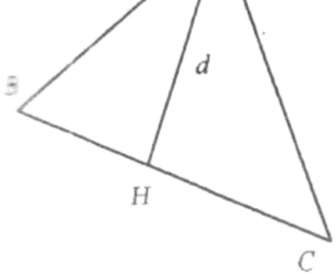
$$Ax_0 + By_0 + C = 0 \qquad \text{і} \qquad d = 0 .$$

Зауваження. У формулі (2.13) звичайно несуттєво, який знак залишити перед радикалом під модулем. Але вираз під модулем

$$\delta = \frac{Ax_0 + By_0}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} , \tag{2.14}$$

який називається відхиленням точки M_0 від прямої L, має самостійний зміст, і його знак уже суттєвий. А саме, при обчисленні δ знак перед радикалом потрібно взяти протилежним знаку *C* (див.(2.12)). Тоді:

при $\delta > 0$ точки $M_0(x_0, y_0)$ і $O(0,0)$ знаходяться **по різні сторони** від прямої L (рис. 11 а));
при $\delta > 0$ **по одну сторону** прямої L (рис. 11 б)).



Задача 5. Задано вершини трикутника *ABC*: $A(4;6)$, $B(-4;0)$, $C(-1;-4)$. Знайти довжину висоти, опущеної із вершини *A* на сторону *BC*.

Розв'язання. Зробимо схематичний рисунок (рис.12). Задача зводиться до знаходження віддалі від точки *A* до прямої *BC*, яку можна знайти за формулою (2.13). Складемо рівняння прямої *BC* як прямої, що проходить через дві задані точки *B* і *C*. Згідно з формулою (2.10), маємо:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}; \qquad \frac{x+4}{-1+4}=\frac{y-0}{-4-0} \qquad \frac{x+4}{3}=\frac{y}{-4};$$

$x+7y+4=0$ — рівняння прямої *BC*.

Знаходимо $\left|\bar{n}\right|=\sqrt{4^2+3^2}=5$. Підставляємо у ліву частину одержаного рівняння прямої *BC* координати точки *A* і згідно з (2.13) маємо;

$$d=\frac{\left|4\cdot 4+3\cdot 6+16\right|}{5}=10.$$

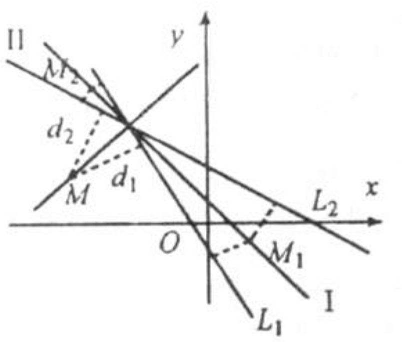
Це і є шукана висота *AH*.

Задача 6. Задано дві прямі $3x+4y-9=0 \quad (L_1)$ і

$8x+6y+7=0 \quad (L_2)$

Скласти рівняння бісектриси гострого кута, утвореного при перетині цих прямих.

Розв'язання. Переконаємось спочатку, що прямі перетинаються. Дійсно, вектори



$\bar{n}_1=\{3;4\}$ $\bar{n}_2=\{8,6\}$ не колінеарні $\left(\frac{3}{8}\neq\frac{4}{6}\right)$ і прямі не перетинаються. Прямі, що перетинаються, утворюють два різні кути і, отже, існують дві бісектриси (на рис.13 дві прямі I і II). Рівняння бісектриси у цій задачі знайдемо, виходячи із її властивості: бісектриса – це геометричне місце точок, рівновіддалених від сторін кута. Нехай $M(x,y)$ – будь-яка точка, що належить бісектрисі, якщо позначити d_1 і d_2 віддаль від $M(x,y)$ до заданих прямих, то

$$d_1=d_2.$$

Знайдемо d_1 і d_2 за формулою (2.13) із урахуванням знаків перед радикалами (див. зауваження):

$$d_1 = \left|\frac{3x+4y-9}{5}\right| \qquad\qquad d_2 = \left|\frac{8x+6y+7}{-10}\right|.$$

Тоді рівняння бісектрис має вигляд

$$\left|\frac{3x+4y-9}{5}\right| = \left|\frac{8x+6y+7}{-10}\right|.$$

Звідки ми дістаємо два рівняння

$$\left|\frac{3x+4y-9}{5}\right| = \left|\frac{8x+6y+7}{-10}\right|; \qquad \frac{3x+4y-9}{5} = -\frac{8x+6y+7}{-10},$$

або

$$14x+14y-11=0; \qquad 2x-2y+25=0.$$

Ми одержали рівняння двох бісектрис. При цьому перше рівняння одержано при збіжності знаків відхилень δ_1 і δ_2 точок бісектрис відповідно від прямих L_1 і L_2, тобто $\delta_1 = \delta_2$, а для другого рівняння $\delta_1 = -\delta_2$. Для того, щоб виділити рівняння бісектриси гострого кута, можна зробити рисунок в системі координат (рис.13), тобто побудувати задані прямі L_1 і L_2 за їх рівняннями. Шукана пряма буде M_1M_2. Для будь-якої її точки буде $\delta_1 = \delta_2$. Дійсно, точки прямої M_1M_2 розташовані у правому вертикальному куті (наприклад, точка M_1 (рис.13) , і початок координат *O* лежить по одну сторону як від прямої L_1 $(\delta_1 < 0)$, так і від L_2 $(\delta_2 > 0)$ і $\delta_1 = \delta_2$, а точки прямої M_1M_2 розташовані у лівому вертикальному куті (наприклад, точка M_2 (рис.13)), і початок координат *O* лежить по різні сторони від кожної з прямих L_1 і L_2, так що $\delta_1 > 0$ та $\delta_2 > 0$, і $\delta_1 = \delta_2$. Отже, шукане рівняння бісектриси: $14x+14y-11=0$.

Зауважимо, що цю задачу можна було розв’язати за допомогою напрямних векторів $\bar{s}_1^{\,0}$ і $\bar{s}_2^{\,0}$ заданих прямих (див задачу 3 із п.2.10). При цьому кут між прямими L_1 і L_2 буде гострим, якщо $\bar{s}_1^{\,0} \cdot \bar{s}_2^{\,0} > 0$, у протилежному випадку ($\bar{s}_1^{\,0}\cdot\bar{s}_2^{\,0}<0$) потрібно один з цих векторів замінити на протилежний , наприклад, $\bar{s}_2^{\,0}$ на $-\bar{s}_2^{\,0}$.

Завдання для перевірки знань

1. Скласти рівняння сторін трикутника, якщо $A(3;\ 5)$, $B(6;\ 1)$ — його вершини, $M(4;\ 0)$ — точка перетину медіан.
Відповідь. $4x+3y=27,\ x=3,\ 7x-3y=39.$

2. Скласти рівняння прямої, що поділяє відрізок AB, $A(-3;\ 2)$, $B(5;\ -2)$ навпіл і утворює з відрізком AB кут, удвічі більший, ніж із віссю Ox.
Відповідь. $x-2y-1=0.$

3. Через точку $A(5;\ 2)$ провести пряму, що відтинає рівні відрізки на осях системи координат.
Відповідь. $x+y=7.$

4. Знайти дотичні до кола $x^2+y^2=29$, що проходить через точку $A(7;\ -3)$.
Відповідь. $5x+2y=29,\ 2x-5y=29.$

5. У трикутнику $A(1;\ 2)$, $B(3;\ 7)$, $C(5;\ -13)$ обчислити довжину перпендикуляра, опущеного з вершини B на медіану, проведену з вершини A.
Відповідь. $\dfrac{25}{\sqrt{34}}.$

6. Знайти рівняння прямої, паралельної прямій $12x+5y-52=0$, що міститься від неї на відстані 2 лін. од.
Відповідь. $12x+5y-26=0,\ 12x+5y-78=0.$

7. Скласти рівняння прямої, що проходить посередині між прямими $4x-6y=3,\ 2x-3y=-7.$
Відповідь. $8x-12y+11=0.$

8. Знайти точку, симетричну точці $A(-2;\ -9)$ відносно прямої $2x+5y=38.$
Відповідь. (10; 21).

9. Дано рівняння двох суміжних сторін паралелограма $x-y=1$, $x-2y=0$, $M(3;\ -1)$ — точка перетину діагоналей. Записати рівняння двох інших сторін паралелограма.
Відповідь. $x-y=7$, $x-2y=10$.

10. Відоме рівняння $3x+2y+6=0$ однієї сторони кута і $x-3y+5=0$ — рівняння його бісектриси. Скласти рівняння другої сторони кута.
Відповідь. $6x+17y=15$.