Самостійна робота 13

Тема: Взаємне розміщення прямої і площини у просторі.
Мета: Ознайомити студентів з різними задачами на взаємне розміщення прямої і площини у просторі.

План занять

1. Пряма у просторі, різні форми рівняння прямої у просторі.
2. Пряма і площина, їх взаємне розміщення, точка перетину прямої і площини, кут між прямою і площиною.

Деякі задачі на пряму і площину у просторі

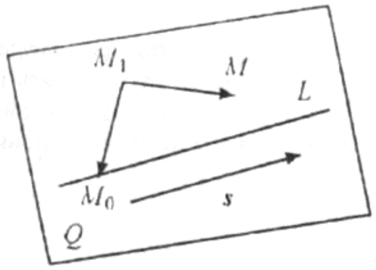
Наведемо ще декілька задач, розв'язки яких легко одержати за допомогою методів векторної алгебри.

Задача 1. Скласти рівняння площини, що містить: а) пряму $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{p}$ (L) і точку $M_1(x_1,y_1,z_1)$, яка не лежить на прямій;

б) дві паралельні прямі $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{p}$ (L_1) і

$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{p}$ (L_2).

Розв'язання. а) Із рівняння прямої L маємо точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ і напрямний вектор $\bar{s}=\{l,m,p\}$. Вибираємо на площині Q біжучу точку $M(x,y,z)$ (рис.22) і проведемо вектори $\overline{M_1M}=\{x-x_1,y-y_1,z-z_1\}$ і $\overline{M_1M_0}=\{x_0-x_1,y_0-y_1,z_0-z_1\}$. Точка $M(x,y,z)$ належатиме площині тоді і тільки тоді, коли вектори $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_0}$ і $\bar{s}$ компланарні. Із умови компланарності векторів маємо:



$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_0-x_1 & y_0-y_1 & z_0-z_1 \\ l & m & p \end{vmatrix}=0 \qquad (4.13)$$

Рівняння (4.13) – це рівняння площини, що містить пряму L і точку $M_1(x_1,y_1,z_1)$.

б)) Із рівняння прямих L_1 і L_2 маємо точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і $M_1(x_1, y_1, z_1)$, які належать різним прямим, і напрямний вектор $\overline{s} = \{l, m, p\}$. Отже, шукане рівняння запишеться формулою (4.13).

Задача 2. Скласти рівняння площини, яка містить

а) дві прямі, що перетинаються: $\dfrac{x-x_0}{l_1} = \dfrac{y-y_0}{m_1} = \dfrac{z-z_0}{p_1}$ (L_1) і

$\dfrac{x-x_1}{l_2} = \dfrac{y-y_1}{m_2} = \dfrac{z-z_1}{p_2}$ (L_2);

б) пряму $\dfrac{x-x_0}{l_1} = \dfrac{y-y_0}{m_1} = \dfrac{z-z_0}{p_1}$ (L_1), яка паралельна прямій

$\dfrac{x-x_1}{l_2} = \dfrac{y-y_1}{m_2} = \dfrac{z-z_1}{p_2}$ (L_2) (прямі L_1 і L_2 не паралельні).

Розв'язання. а)Згідно з умовою нам відомі напрямні вектори $\overline{s_1} = \{l_1, m_1, p_1\}$ і $\overline{s_2} = \{l_2, m_2, p_2\}$ заданих прямих і наприклад, точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, яка лежить на прямій L_1 (чи перетинаються прямі, можна перевірити за формулою (4.8)). У шуканій площині Q виберемо біжучу точку $M(x, y, z)$ і проведемо вектор $\overline{M_0M}$ $= \{x-x_0, y-y_0, z-z_0\}$. Точка $M(x, y, z)$ належить площині Q тоді і тільки тоді, коли вектори $\overline{M_0M}$, $\overline{s_1} = \{l_1, m_1, p_1\}$, $\overline{s_2} = \{l_2, m_2, p_2\}$ будуть компланарними. Із умови компланарності одержуємо

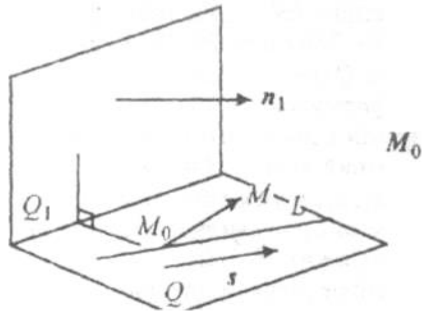
$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & p_1 \\ l_2 & m_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4.14)$$

– рівняння площини, що містить дві прямі, які перетинаються, або рівняння площини з двома напрямними векторами.

б) За умовою пряма L_1 належить площині Q, отже, відома точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і напрямний вектор прямої L_1: $\overline{s_1} = \{l_1, m_1, p_1\}$. Напрямний вектор $\overline{s_2} = \{l_2, m_2, p_2\}$ прямої L_2, як паралельний площині Q, буде компланарний з векторами $\overline{s_1} = \{l_1, m_1, p_1\}$ і $\overline{M_0M}$ $= \{x-x_0, y-y_0, z-z_0\}$ ($M(x, y, z)$ – біжуча точка площини), і рівняння шуканої площини буде зображатись формулою (4.14).

Задача 3. Скласти рівняння площини Q, яка містить пряму $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{p}\,(L)$ і перпендикулярна до площини $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \quad (Q_1)$.

Розв'язання. Із рівняння прямої L маємо точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ і напрямний вектор $\bar{s}=\{l,m,p\}$. Із рівняння площини Q_1– нормальний вектор $\bar{n}_1=\{A_1,B_1,C_1\}$ Оскільки площина Q_1 перпендикулярна до площини Q, то вектор $\bar{n}_1=\{A_1,B_1,C_1\}$ паралельний площині Q. Виберемо на площині Q біжучу точку $M(x,y,z)$ (рис 23), яка належить площині Q тоді і тільки тоді, коли вектори $\overline{M_0M}$, $\bar{s}=\{l,m,p\}$ і $\bar{n}_1=\{A_1,B_1,C_1\}$ компланарні. Із умови компланарності векторів одержуємо



$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l & m & p \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{vmatrix}=0$$

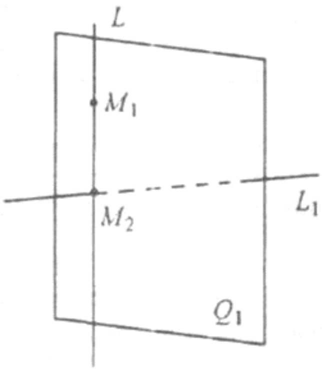
рівняння площини, яка містить задану пряму L і перпендикулярна до заданої площини Q_1.

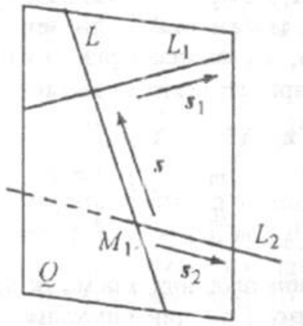
Задача 4. Скласти рівняння перпендикуляра L, опущеного з точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ на пряму $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{p} \qquad (L_1)$

Розв'язання. Складемо рівняння площини Q_1, яка містить точку $M_1(x_1,y_1,z_1)$ і перпендикулярна до прямої L_1 (див. задачу 2 п.4.1, рис.24). Далі знаходимо точку $M_2(x_2,y_2,z_2)$ перетину прямої L_1 з площиною Q_1. Далі складемо рівняння прямої, що проходить через дві точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ і $M_2(x_2,y_2,z_2)$ (згідно з формулою (3.10)), яке і буде шуканим перпендикуляром L.

Задача 5. Скласти рівняння загального перпендикуляра L до двох схресних прямих $\dfrac{x-x_0}{l_1}=\dfrac{y-y_0}{m_1}=\dfrac{z-z_0}{p_1}\;(L_1)$ і

$$\frac{x-x_0'}{l_2}=\frac{y-y_0'}{m_2}=\frac{z-z_0'}{p_2}\quad (L_2).$$





Розв'язання. Напрямний вектор $\bar{s}=\{l,m,p\}$ шуканої прямої L має бути перпендикулярним до заданих напрямних векторів $\overline{s_1}=\{l_1,m_1,p_1\}$ і $\overline{s_2}=\{l_2,m_2,p_2\}$ ($\bar{s}\perp\overline{s_1}$, $\bar{s}\perp\overline{s_2}$) прямих L_1 і L_2. Тому можна вважати що $\bar{s}=\overline{s_1}\times\overline{s_2}$. Далі шукана пряма має перетинатися із заданими прямими L_1 і L_2. Тому складемо рівняння площини Q (рис.25), що містить L_1 і L за формулою (4.14) (для цього у прямої L достатньо знайти напрямний вектор $\bar{s}=\overline{s_1}\times\overline{s_2}$). Точка $M_1(x_1,y_1,z_1)$ перетину площини Q з прямою L_2 очевидно і буде точкою, що належить L. Нарешті, складаємо канонічні рівняння прямої L, що проходить через точку $M_1(x_1,y_1,z_1)$ з напрямним вектором $\bar{s}$, згідно з формулою (3.8). Це і буде шукане рівняння загального перпендикуляра L до двох схресних прямих.

Завдання для перевірки знань

1. Чи лежить пряма $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+2}{5}$ на площині $4x+3y-z+8=0$.

2. Знайти проекцію прямої $\frac{x}{4}=\frac{y-4}{3}=\frac{z+1}{-3}$ на площину $x-y+3z+8=0$.

Відповідь. $\frac{x+9}{7}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{-1}$.

3. На прямій $\frac{x}{1}=\frac{y+7}{2}=\frac{z-3}{-1}$ знайти точку, найближчу до точки (3, 2, 6).

Відповідь. (3; – 1; 0).

4. Знайти найкоротшу відстань між двома прямими, що не перетинаються $\frac{x-9}{4}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z}{1}$ і $\frac{x}{-2}=\frac{y+7}{9}=\frac{z-2}{2}$.

Відповідь. $d=7$.

5. Записати рівняння площини, що проходить через точку $A(3;\ 1;\ -2)$ і через пряму $\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$.

Відповідь. $8x-9y-22z-59=0$.

6. Провести площину, що проходить через перпендикуляри, опущені з точки $A(-3;\ 2;\ 5)$ на площини $4x+y-3z+13=0$ та $x-2y+z-11=0$.

Відповідь. $4x+5y-2z=0$.

7. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $A(4;\ -3;\ 1)$ і паралельна прямим:

$\frac{x}{6}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-3}$ і $\frac{x+1}{5}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{2}$.

Відповідь. $16x-27y+14z-159=0$.

8. Через точку $A(1;\ 0;\ 7)$ паралельно площині $2x-y+2z=15$ провести пряму так, щоб вона перетинала пряму $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z}{1}$.

Відповідь. $\frac{x-1}{68}=\frac{y}{70}=\frac{z-7}{-67}$.

9. Знайти точку, симетричну точці $A(4;\ 3;\ 10)$ відносно прямої $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}$.

Відповідь. (2; 9; 6).