Самостійна робота 14

Тема: Криві другого порядку.
Мета: Ознайомити студентів з рівняннями кривих другого порядку, навчити їх розв’язанню базових задач на коло,еліпс, гіперболу та параболу.

План занять

1. Канонічні рівняння кривих другого порядку.
2. Дослідження загального рівняння кривої другого порядку.

Термінологічний словник ключових понять

Канонічне рівняння — найпростіше рівняння кривої другого порядку.
Ексцентриситет — відношення $\varepsilon = \frac{c}{a}$ для еліпса, гіперболи, у параболи $\varepsilon = 1$.
Загальне рівняння лінії другого порядку:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \qquad (1)$$

де коефіцієнти A, B, C, D, E, F − довільні числа, причому A, B та C не дорівнюють нулю одночасно, тобто $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Канонічне рівняння кола:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \qquad (2)$$

Тут (a, b) — координати центра кола, R — його радіус.

Канонічне рівняння еліпса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (3)$$

де

$$b^2 = a^2 - c^2.$$

Канонічне рівнянням гіперболи з центром в точці $O(0;0)$:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (4)$$

де

$$b^2 = c^2 - a^2$$

Канонічне рівнянням параболи:

$$y^2 = 2px. \qquad (5)$$

Навчальні завдання

1. Дослідити рівняння $x^2+6xy+ay^2+3x+by-4=0$ при різних значеннях параметрів a і b.

• Обчислимо визначники δ і Δ, які визначають тип кривої другого порядку:

$$\delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & a \end{vmatrix}=a-9;$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 3 & \frac{3}{2} \\ 3 & a & \frac{b}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{b}{2} & 4 \end{vmatrix}=\frac{7}{4}a-\frac{1}{4}(b-9)^2-\frac{63}{4}.$$

1) $a > 9$, маємо еліпс, при $7a-(b-9)^2-63>0$ — уявний, при $7a-(b-9)^2-63<0$ — дійсний. Якщо $a=\frac{1}{7}(b-9)^2+9$, то еліпс вироджується в уявні прямі.

2) $a = 9$. Маємо криву параболічного типу $\Delta=-\frac{1}{4}(b-9)^2$. Якщо $b\neq 9$, то ця крива — парабола; при $a = 9$, $b = 9$ рівняння параболи розпадається на пару паралельних прямих: $x+3y+4=0;\quad x+3y-1=0.$

3) $a < 9$. Маємо гіперболу. Якщо $a=\frac{1}{7}(b-9)^2+9$, то гіпербола розпадається на пару прямих.

2. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо відомі його мала піввісь $b=5$ та ексцентриситет $\varepsilon=\frac{12}{13}$. Знайти відстань між фокусами еліпса.

Скористаємося формулою, що зв'язує ексцентриситет і відношення півосей:

$$\varepsilon^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-\frac{b^2}{a^2}.$$

Звідси

$$a^2=\frac{b^2}{1-\varepsilon^2},$$

тому

$$a^2=\frac{5^2}{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=\frac{25}{1-\frac{144}{169}}=\frac{169\cdot 25}{25}=169.$$

Отже, канонічне рівняння еліпса

$$\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1.$$

Оскільки $\varepsilon=\frac{c}{a}$, то $c=a\varepsilon$; $c=13\cdot\frac{12}{13}=12$ і відстань між фокусами $2c=24$.

3. Рівняння асимптот гіперболи $y = \pm\frac{4}{3}x$, а відстань між фокусами $2c = 20$. Скласти канонічне рівняння гіперболи, знаючи, крім того, що її фокуси розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат.

За умовою $2c = 20$, тому $c = 10$. Оскільки для гіперболи $c^2 = a^2 + b^2$, для знаходження її півосей a, b дістанемо систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{4}{3}, \\ a^2 + b^2 = 100. \end{cases}$$

З першого рівняння системи виразимо, наприклад, b: $b = \frac{4a}{3}$ та підставимо в її друге рівняння $a^2 + \frac{16a^2}{9} = 100$. Звідси $25a^2 = 900$, $a^2 = 36$, $a = 6$, $b = \frac{4 \cdot 6}{3} = 8$.

Тому канонічне рівняння гіперболи матиме вигляд

$$\frac{x^2}{6^2} - \frac{y^2}{8^2} = 1$$

або

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1.$$

4. Парабола з вершиною в початку координат проходить через точку $A(4;-8)$ симетрично осі Oy. Записати її рівняння.

Оскільки парабола проходить через точку $A(4;-8)$ з від’ємною ординатою, а її віссю симетрії слугує вісь Oy, рівняння параболи будемо шукати у вигляді $x^2 = -2py$. Підставляючи в це рівняння координати точки A, дістанемо

$$4^2 = -2p \cdot (-8),\ 16 = 16p,\ p = 1.$$

Отже, шукане рівняння $x^2 = -2y$, фокус параболи $F\left(0;-\frac{1}{2}\right)$, директриса $y = \frac{1}{2}$.

5. Параболу задано рівнянням $x^2 - 6x - 4y + 29 = 0$. Знайти координати її вершини, величину параметра та напрям осі.

У даному рівнянні згрупуємо доданки, що містять змінну x

$$(x^2 - 6x) - 4y + 29 = 0$$

та доповнимо їх до повного квадрату

$$(x^2 - 6x + 9 - 9) - 4y + 29 = 0,\ (x^2 - 6x + 9) - 4y + 20 = 0,\ (x - 3)^2 = 4(y - 5).$$

Дістали рівняння параболи вигляду $(x-x_0)^2 = 2p\ (y-y_0)$з вершиною в точці $O_1(x_0;y_0)$. Для нашого випадку $O_1(3;5)$, параметр $p=2$, вісь симетрії паралельна осі Oy.

6. Знайти рівняння кола, описаного навколо трикутника з вершинами *A*(7; 7), *B*(0; 8), *C*(– 2; 4).
Відповідь. $(x-3)^2+(y-4)^2=25.$

7. Записати рівняння кола з центром у точці (6; 7), що дотикається до прямої $5x-12y=24.$
Відповідь. $(x-6)^2+(y-7)^2=36.$

8. В еліпс $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$ вписано правильний трикутник так, що одна з його вершин збігається з правим кінцем великої осі. Знайти координати двох інших вершин.
Відповідь. $\left(\frac{6}{7};\frac{12\sqrt{3}}{7}\right),\left(\frac{6}{7};\frac{-12\sqrt{3}}{7}\right).$

9. Записати рівняння прямої, що дотикається до еліпса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ у точці (2; – 3).
Відповідь. $x-2y=8.$

10. Знайти рівняння тих дотичних до еліпса $3x^2+8y^2=45,$ відстань яких від центра еліпса дорівнює 3.
Відповідь. $\pm 3x\pm 4y+15=0.$

11. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо задані:

а) точки $M_1(6;-1)$ та $M_2\left(-8;2\sqrt{2}\right)$ гіперболи;

б) точка $M_1(-5;3)$ гіперболи та ексцентриситет $\varepsilon=\sqrt{2}$;

в) точка $M_1(9/2;-1)$ гіперболи та рівняння асимптот $y=\pm\frac{2}{3}x$.

12. Скласти рівняння параболи, вершина якої знаходиться в початку координат, знаючи, що:

а) парабола розташована симетрично осі Ox і проходить через точку $A(9;6)$;

б) парабола розташована симетрично осі Ox і проходить через точку $B(-1;3)$;

в) парабола розташована симетрично осі Oy і проходить через точку $C(1;1)$;

г) парабола розташована симетрично осі Oy і проходить через точку $D(4;-8)$.

13. Знайти найкоротшу відстань параболи $y^2=64x$ до прямої $4x+3y+46=0.$
Відповідь. 2.