Загальні властивості кривих другого порядку. Паралельне перенесення системи координат. Спрощення рівняння другого степеня.

1.Фокальні радіуси

Фокальним радіусом точки *M*кривої другого порядку називається віддаль від цієї точки до фокуса кривої, тобто $r = |MF|$.

Фокальні радіуси точок М еліпса, заданого канонічним рівнянням, мають вигляд

$$r_1 = a + \varepsilon x, \qquad r_1 = a - \varepsilon x,$$

де r_1 — радіус лівого фокуса, r_2 — правого.

Знайдемо фокальні радіуси точок гіперболи, заданої канонічним рівнянням. Фокуси гіперболи — це точки $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$.

Точка *M,* що належить гіперболі, має координати

$$M\left(x, \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\right).$$

Тоді для радіуса r_1 лівого фокуса матимемо

$$|MF_1| = r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a)} =$$

$$= \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}x^2 + 2xc + (c^2 - b^2)} =$$

$$= \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2 + 2xc + a^2} = \sqrt{\left(\frac{c}{a}x + a\right)^2} = |\varepsilon x + a|.$$

Аналогічно для радіуса r_2 правого фокуса матимемо

$$|MF_2| = r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = |\varepsilon x - a|.$$

Звідси видно, що, якщо точка лежить на правій гілці гіперболи, тобто x≥a(ε> 1), то

$$R_1=\varepsilon x + a, \qquad r_2=\varepsilon x-a,$$

а якщо на лівій гілці гіперболи, тобто $x \leq —a,$ то

$r_1=-(\varepsilon x + a), \qquad r_2=-(\varepsilon x-a).$

Парабола має лише один фокус, так що $|MF| = r$ і для канонічного

рівняння параболи фокус — це точка $F\left(\frac{p}{2},0\right)$

Точка *M,* що

належить параболі, має координати $M\left(x\pm\sqrt{2px}\right)$

Тоді

$$|MF|=r=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+2px}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2},$$

$$r=x+\frac{p}{2}.$$

2.Директриси кривих другого порядку

При означенні параболи було введено поняття директриси, і для канонічного рівняння: $y^2 = 2px$ директрисою була пряма $x=-\frac{p}{2}$, віддаль до якої від будь-якої точки *M* параболи позначалась через *d.* Тоді згідно з означенням параболи

$$r = d \quad \text{або} \quad \frac{r}{d}=1=\varepsilon.$$

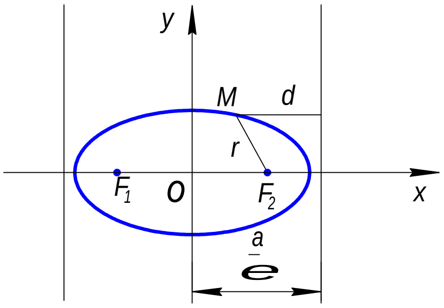
a

Директрисами еліпса називаються дві прямі, перпендикулярні до великої осі еліпса і розташовані симетрично відносно його центра на віддалі $\frac{a}{\varepsilon}$ від нього.

Так, якщо еліпс задано канонічним рівнянням, то його директрисами є прямі

$$x=-\frac{a}{\varepsilon} \ \text{(ліва)}, \qquad x=\frac{a}{\varepsilon} \ \text{(права)}.$$

Для еліпса ε < 1, отже, $\frac{a}{\varepsilon} > a,$ і директриси розташовані зовні еліпса (рис. 1).



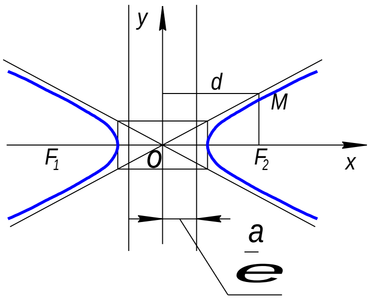


Рис 1 Рис2

Директрисами гіперболи називаються дві прямі, перпендикулярні до дійсної осі гіперболи і розташовані симетрично відносно центра на віддалі $\frac{a}{\varepsilon}$ від нього.

Якщо гіпербола задана канонічним рівнянням, то її директрисами будуть прямі

$$x = -\frac{a}{\varepsilon} \quad \text{(ліва)}, \qquad\qquad x = \frac{a}{\varepsilon} \quad \text{(права)}.$$

Для гіперболи ε > 1, отже, $\frac{a}{\varepsilon} < a,$ і директриси знаходяться між вершинами гіперболи (рис. 2).

3. Загальна властивість кривих другого порядку

Для будь-якої точки *M* кривої другого порядку відношення її фокального радіуса *r* до віддалі *d* від точки *M* до відповідної директриси є величина стала, що дорівнює ексцентриситету кривої

$$\frac{r}{d} = \varepsilon$$

(під відповідністю розуміємо, що правому фокусу відповідає права директриса, а лівому — ліва).

Аналогічну формулу дістаємо і для лівого фокуса і лівої директриси.

4. Паралельне перенесення

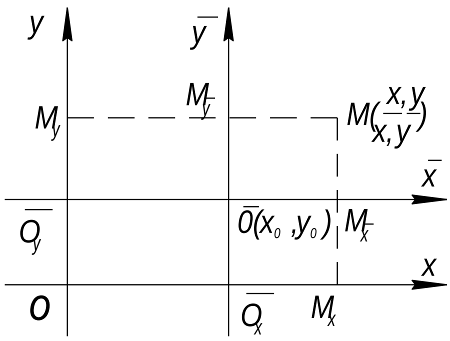


Рис 3

Паралельним перенесенням системи координат називається зсув координатних осей, при якому змінюється положення початку координат, але напрям координатних осей зберігається (рис. 3).

На рис. 3 система *xOy* — задана система (стара), а система $\overline{xOy}$ одержана в результаті паралельного перенесення (нова). Знайдемо співвідношення між координатами будь-якої точки *My* цих системах.

Нехай у системі *xOy* точка М має координати *(x, y)*(старі координати), а точка $\bar{O}$ — початок нової системи координат (x_0, y_0) (координати нового початку координат у старій системі). Координати точки *M* у системі $\overline{xOy}$ позначимо ($\bar{x}, \bar{y}$) (нові координати). Спроектуємо точку *M* на осі *Ox* та $\overline{Ox}$. Дістанемо відповідно точки M_x і $\overline{M}_x$. Проекцію точки *O* на вісь *Ox* позначимо $\overline{O}_x$. Тоді, згідно з основною тотожністю між величинами, дістанемо $OM_x = O\overline{O}_x + \overline{O}_x M_x = O\overline{O}_x + \overline{O}M_{\bar{x}}$ - або $x = x_0 + x$ Аналогічно, якщо спроектувати точку *M* на вісь *Oy* і $\overline{Oy}$, а $\overline{O}$ на вісь $\overline{Oy}$, дістанемо $y = y_0 + \bar{y}$. Отже, формули

$$x = \bar{x} + x_0, \qquad y = \bar{y} + y_0 \qquad (1)$$

є формулами перетворення координат при паралельному перенесенні. Формули (1) виражають старі координати $(\bar{x};\ \bar{y})$ точки *M* через нові $(x;\ y)$. Із (1) маємо

$$\bar{x} = x - x_0, \qquad \bar{y} = y - y_0 \qquad (2)$$

— формули, що виражають нові координати $(\bar{x};\ \bar{y})$ точки *M* через старі (x, y).

У старій системі, згідно з формулами (2), дістанемо

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

рівняння еліпса із центром у точці $C(x_0, y_0)$ і осями, паралельними координатним осям. Аналогічно

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

- рівняння гіперболи із центром у точці $C(x_0, y_0)$ і осями, паралельними координатним осям.

Рівняння парабол, осі яких паралельні координатній осі, а вершина знаходиться у точці $C(x_0, y_0)$, мають вигляд:

$(y - y_0)^2 = \pm 2p(x - x_0)$ — вісь симетрії паралельна осі Ox, вершина знаходиться у точці $C(x_0, y_0)$;

$(x - x_0)^2 = \pm 2p(y - y_0)$ — вісь симетрії паралельна осі Oy, вершина знаходиться у точці $C(x_0, y_0)$.

5. Загальне рівняння другого степеня

Ми установили, що еліпс (коло), гіпербола, парабола є кривими другого порядку. Подальше завдання полягає у тому, щоб показати, по-перше, що не існує інших кривих, які можуть бути зображені рівнянням другого степеня, по-друге, як із цього рівняння визначити вигляд кривої, тобто звести це рівняння до канонічного вигляду однієї із кривих другого порядку.

Розглянемо рівняння

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (3)$$

і дослідимо геометричний образ, зображений цим рівнянням.

Рівняння (3):

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

може бути

а) **параболічного типу,** якщо $AC = 0$ (причому A або C не дорівнює нулеві) і зображає параболу, або дві паралельні прямі, або одну збіжну пряму, або нічого;

б) **еліптичного типу,** якщо $AC > 0$ і зображає еліпс (коло $A = C$), або точку, або нічого;

в) **гіперболічного типу,** якщо $AC < 0$ і зображає гіперболу або дві прямі, що перетинаються.

Повернутися до змісту