

Самостійна робота 15

Тема: Загальні властивості кривих другого порядку. Спрощення рівняння другого степеня.

Мета: Ознайомити студентів із загальними властивостями кривих другого порядку, навчити їх спрощувати рівняння другого степеня.

План занять

1. Загальні властивості кривих другого порядку.
2. Спрощення рівняння другого степеня.

Термінологічний словник ключових понять

Канонічне рівняння — найпростіше рівняння кривої другого порядку.

Ексцентриситет — відношення $\varepsilon = \frac{c}{a}$ для еліпса, гіперболи, у параболі $\varepsilon = 1$.

Загальне рівняння лінії другого порядку:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \quad (1)$$

де коефіцієнти A, B, C, D, E, F — довільні числа, причому A, B та C не дорівнюють нулю одночасно, тобто $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Канонічне рівняння кола:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \quad (2)$$

Тут (a, b) — координати центра кола, R — його радіус.

Канонічне рівняння еліпса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3)$$

де

$$b^2 = a^2 - c^2.$$

Канонічне рівняння гіперболи з центром в точці $O(0;0)$:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (4)$$

де

$$b^2 = c^2 - a^2$$

Канонічне рівняння параболі:

$$y^2 = 2px. \quad (5)$$

Навчальні завдання

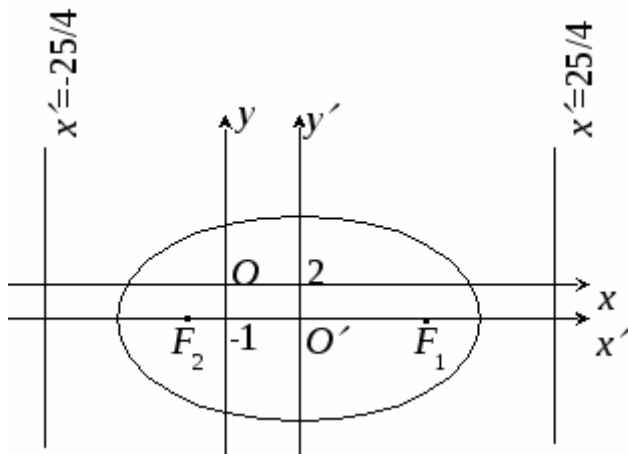
Приклад 1. Звести до канонічного вигляду рівняння

$9x^2 + 25y^2 - 36x + 50y = 164$. Визначити тип кривої, зробити креслення.

Розв'язання. Виділимо в рівнянні лінії повні квадрати:

$$9(x^2 - 4x + 4) - 36 + 25(y^2 + 2y + 1) - 25 = 164, \quad 9(x-2)^2 + 25(y+1)^2 = 225, \quad \frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1,$$
$$\frac{x'^2}{5^2} + \frac{y'^2}{3^2} = 1, \quad \text{де} \begin{cases} x' = x - 2, \\ y' = y + 1. \end{cases}$$

В системі координат $x'O'y'$ отримане канонічне рівняння еліпса. Центр еліпса має координати $O'(2; -1)$. Півосі еліпса $a=5, b=3, c=\sqrt{a^2-b^2}=4, \varepsilon=c/a=4/5$.



Завдання для перевірки знань

1. Визначити типи таких кривих:

- а) $x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y - 1 = 0$,
- б) $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$,
- в) $x^2 + 4xy + 3y^2 + 2x - 2y = 0$,
- г) $x^2 + 4xy + 4y^2 + 2x - 2y - 1 = 0$,
- д) $9x^2 - 6xy + y^2 - 6x + 2y = 0$.

Відповідь. а) гіпербола; б) еліпс; в) пара прямих, що перетинаються; г) парабола; д) пара паралельних прямих.

2. Задано рівняння кривої другого порядку. Виконайте такі дії: а) визначить по рівнянню вид кривої; б) у випадку еліпса знайдіть величину півосей, координати фокусів, ексцентриситет, складіть рівняння директрис; в) у випадку гіперболи визначте величину півосей, координати фокусів, ексцентриситет, складіть рівняння директрис та асимптот; г) у випадку параболи знайдіть значення параметра, координати фокуса, складіть рівняння директриси; д) виконайте креслення кривої з поданням фокусів, директрис, асимптот (при наявності).

а) $x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y - 1 = 0$,

б) $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$,

в) $x^2 + 4xy + 3y^2 + 2x - 2y = 0$,

г) $x^2 + 4xy + 4y^2 + 2x - 2y - 1 = 0$,

д) $9x^2 - 6xy + y^2 - 6x + 2y = 0$.