Самостійна робота 16

Тема: Способи задання функцій. Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень.

Мета: Нагадати основні способи задання функцій. Навчитись будувати графіки функцій за допомогою геометричних перетворень.

План занять

1. Способи задання функцій.
2. Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень.

Термінологічний словник ключових понять

Функція — це така відповідність між множинами D та E, при якій кожному значенню змінної $x \in D$ відповідає одне й тільки одне значення $y \in E$.

Область визначення функції — це множина всіх значень аргументу, для яких можна обчислити значення функції.

Розглянемо функції однієї змінної. Для задання відображення лінійної множини ***X*** на лінійну множину ***Y*** існують різні способи, зокрема такі.

Аналітичний. Наприклад,

$$y = \sin\frac{x}{2}, \quad y = \begin{cases} 1 - x, x < 0; \\ 1 + 2x^2, x \geq 0. \end{cases}$$

У загальному випадку записують $y = f(x)$, або $x \to f(x)$.

Графічний (відомий з аналітичної геометрії). Цим способом можна задавати функції лише однієї та двох змінних. Проте не всяку функцію навіть однієї змінної можна задати графічно. Так, графічно не можна задати *функцію Діріхле*

$$y = \sin\frac{x}{2}, \quad y = \begin{cases} 1, \text{якщо } x \text{ раціональн е;} \\ 0, \text{якщо } x \text{ ірраціонал ьне.} \end{cases}$$

Табличний. Наприклад,

x	x_1	x_2	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_n

Алгоритмічний. Так задають функцію для роботи з нею на ЕОМ.

Описовий або вербальний. Наприклад, функція "десяткові наближення числа π" – це функція, що набуває значень 3; 3,1; 3,14; … . тобто функція задається словесним переліком її значень.

Приклад 1. Функцію sign x (знак числа x), спершу задано описово , можна задати як аналітично

$$f(x)=\begin{cases}-1, x<0;\\ 0, x=0;\\ 1, x>0.\end{cases}$$

так і графічно (рис. 1).

Приклад 2. Функцію $f(x)=E(x)$ - ціла частина числа *x*, яка не перевищує *x*, можна задати графічно (рис. 2). Стрілка вказує точку, яка вилучається з графіка.

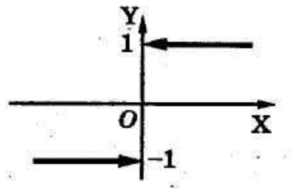


Рис.1

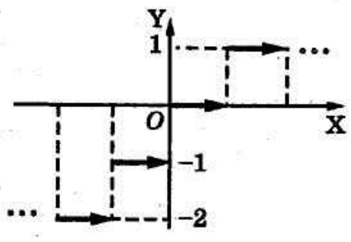


Рис.2

Основними елементарними функціями є такі функції:

1) степенева функція $y=x^{\alpha}$, де α – дійсне число;

2) показникова функція $y=a^{x}$, де a – додатне число, відмінне від одиниці;

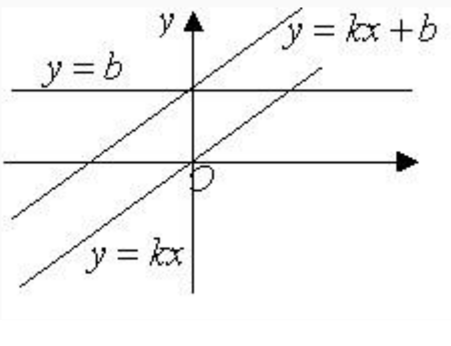
3) логарифмічна функція $y=\log_a x$, де a – додатне число, відмінне від одиниці;

4) тригонометричні функції: $y=\sin x,\ y=\cos x,$ $y=\mathrm{tg}\,x$, $y=\mathrm{ctg}\,x$, $y=\sec x,\ y=\mathrm{cosec}\,x$;

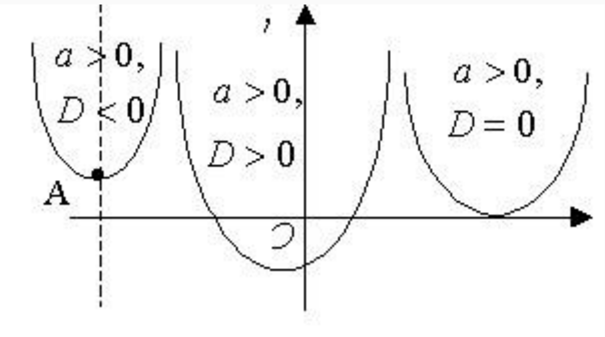
5) обернені тригонометричні функції: $y=\arcsin\ x,$ $y=\arccos x,\ y=\mathrm{arctg}\ x$, $y=\mathrm{arcctg}\ x$.

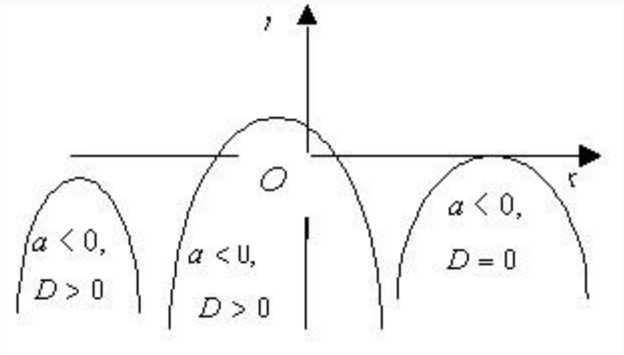
Наведемо графіки основних елементарних функцій.

1. лінійна функція $y=kx+b$:



2. квадратична функція $y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$:





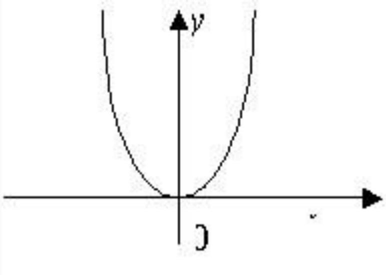
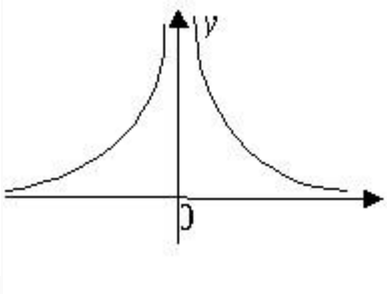
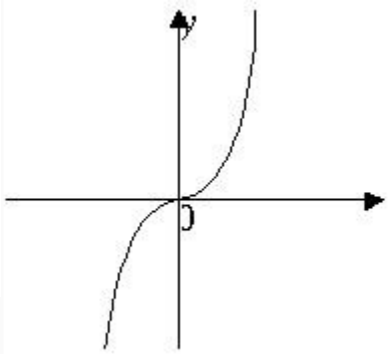
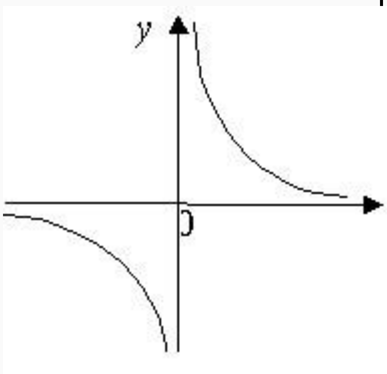
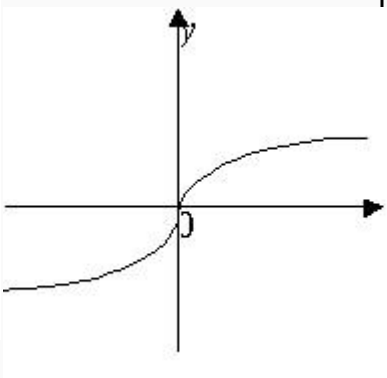
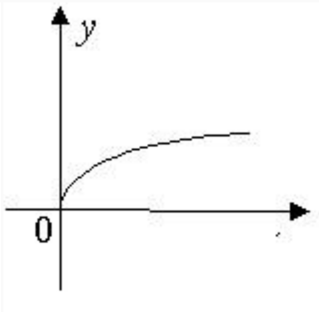
Точка $A\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a}\right)$ – вершина параболи;

$x = -\frac{b}{2a}$ – рівняння осі симетрії параболи.

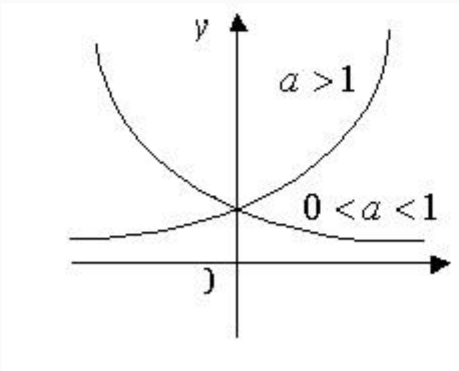
Якщо $c = 0$, то графік квадратичної функції проходить через початок координат.

Якщо $b = 0$, то вершина параболи знаходиться на осі Oy.

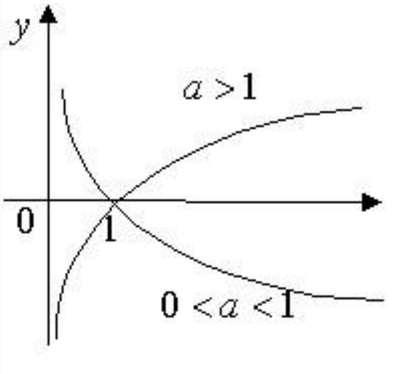
3. степенева функція $y = x^{\alpha}$:

$\alpha = 2n, n \in N$ 	$\alpha = -2n, n \in N$ 	$\alpha = 2n+1, n \in N$ 
$\alpha = -(2n-1)$ $n \in N$ 	$\alpha = \frac{1}{2n}$ $n \in N$ 	$\alpha = \frac{1}{2n+1}$ $n \in N$ 

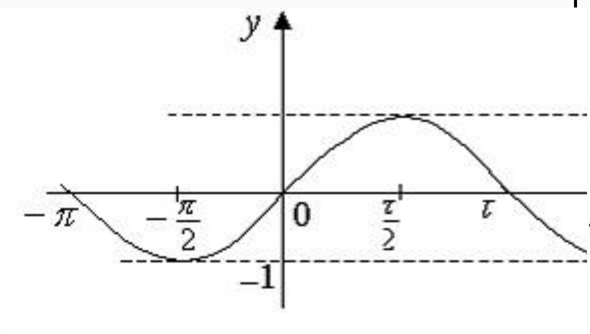
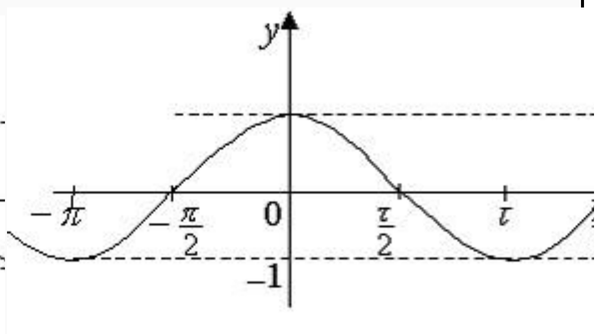
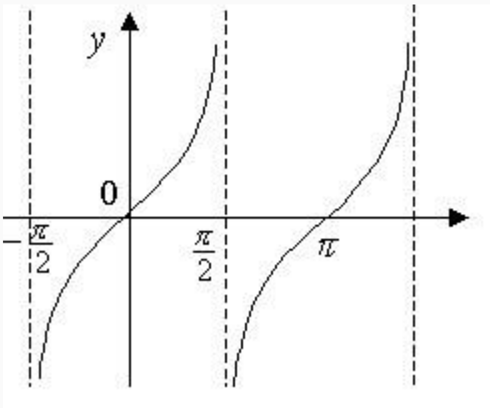
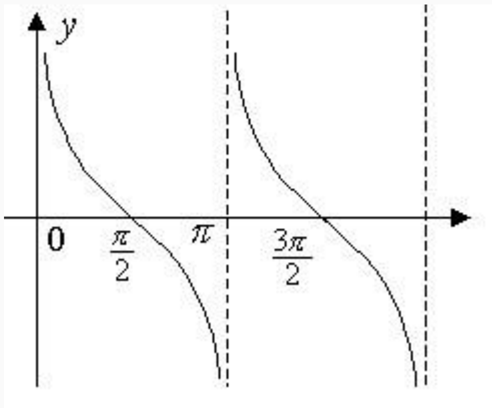
4. показникова функція $y = a^x$:

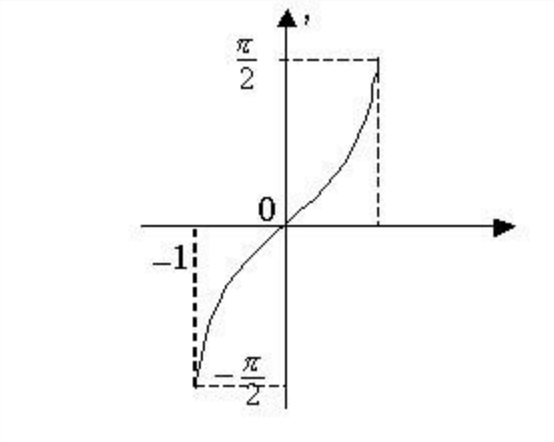
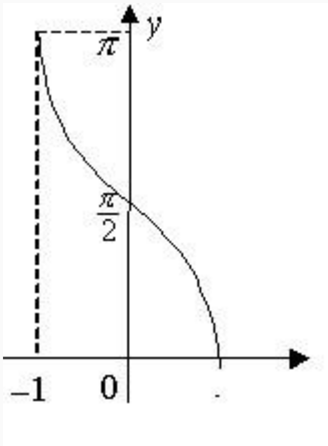


5. логарифмічна функція $y = \log_a x$:

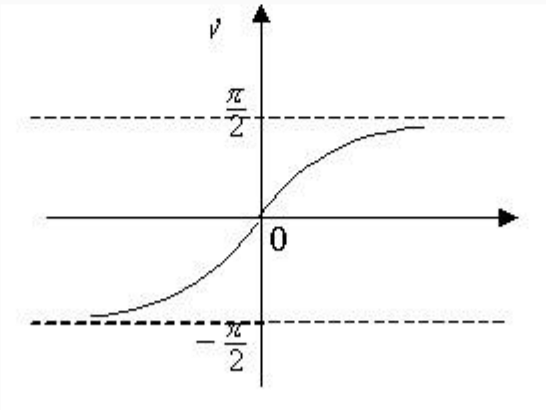
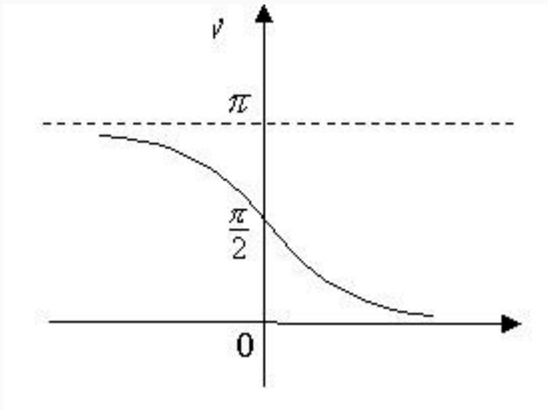


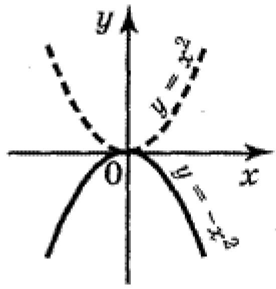
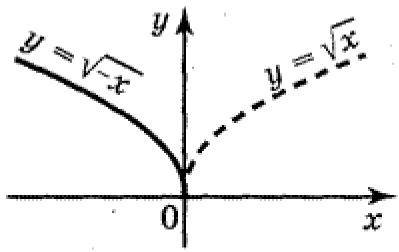
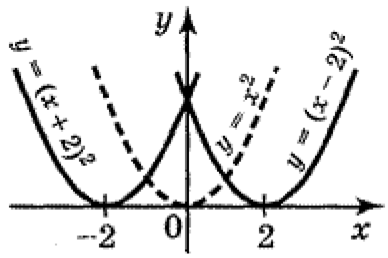
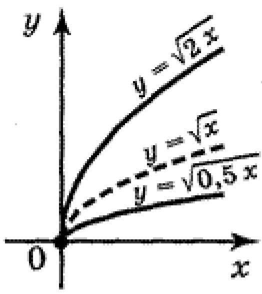
6. Тригонометричні функції

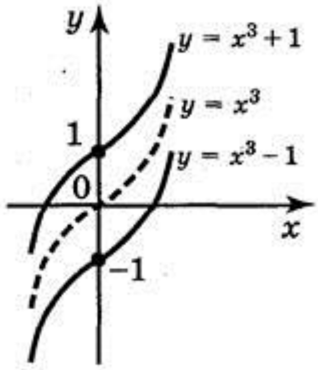
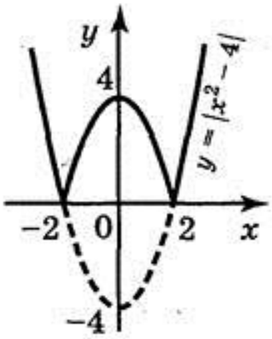
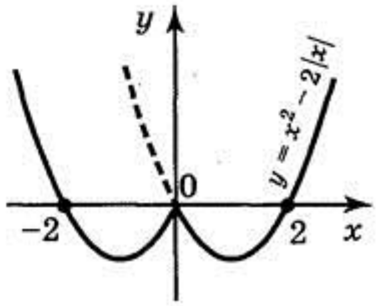
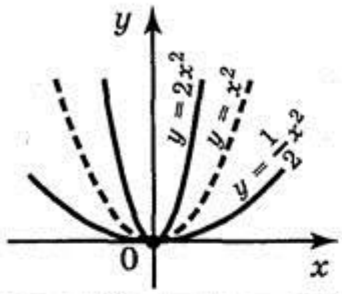
<table>
<tr>
<td>$y = \sin x$
. :

</td>
<td>$y = \cos x$
. :

</td>
</tr>
<tr>
<td>$y = \mathrm{tg}\, x$
. :

</td>
<td>$y = \mathrm{ctg}\, x$
. :

</td>
</tr>
</table>

$y = \arcsin x$.: 	$y = \arccos x$.: 

7. Обернені тригонометричні функції

$y = \mathrm{arctg}\, x$: 	$y = \mathrm{arcctg}\, x$: 

Функція виду	Перетворення	Приклад
1	2	3
$y = -f(x)$	Симетрія відносно осі OX	
$y = f(-x)$	Симетрія відносно осі OY	
$y = f(x + a)$	Паралельне перенесення вдовж осі OX на $-a$ одиниць	
$y = f(kx)$	При $k > 1$ стиск до точки (0; 0) вдовж осі абсцис в k раз; при $0 < k < 1$ розтяг від точки (0; 0) вздовж осі абсцис в $\frac{1}{k}$ раз	

1	2	3
$y = f(x) + b$	Паралельне перенесення вдовж осі OY на b одиниць	
$y = \|f(x)\|$	Частина графіка у верхній півплощині і на осі абсцис без змін, а замість частини графіка в нижній півплощині будуємо симетричну їй відносно осі OX	
$y = f(\|x\|)$	Частину графіка для $x \geq 0$ симетрично відображаємо відносно осі OY	
$y = kf(x)$ $(k > 0)$	При $k > 1$ розтяг від точки (0; 0) вздовж осі ординат в k раз; при $0 < k < 1$ стиск до точки (0; 0) вздовж осі ординат в $\frac{1}{k}$ раз	

Приклад 1

Побудуйте графік функції $y=\sqrt{3x-2}$.

Розв'язання. Схема побудови має такий вигляд (рис. 33):

$$y=\sqrt{x}\ \xrightarrow[\text{}]{\text{управо на 2 од.}}\ y=\sqrt{x-2}\ \xrightarrow{\text{стиск у 3 рази до осі ординат}}\ y=\sqrt{3x-2}$$

Якщо задану функцію подати у вигляді $y=\sqrt{3\left(x-\frac{2}{3}\right)}$, то побудову графіка можна вести і за такою схемою (рис. 34):

$$y=\sqrt{x}\ \xrightarrow{\text{стиск у 3 рази до осі ординат}}\ y=\sqrt{3x}\ \xrightarrow{\text{управо на }\frac{2}{3}\text{ од.}}\ y=\sqrt{3\left(x-\frac{2}{3}\right)}$$

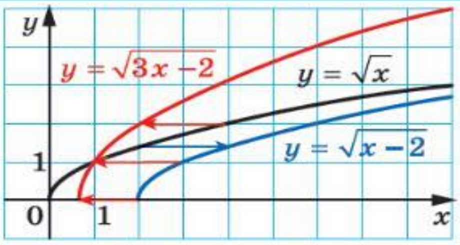


Рис. 33

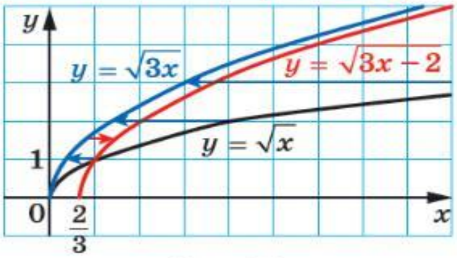


Рис. 34

Приклад 2

Побудуйте графік функції $y=\sqrt{1-3x}$.

Розв'язання. Побудову графіка можна вести за такою схемою (рис. 35):

$$y=\sqrt{x}\ \xrightarrow{\text{уліво на 1 од.}}\ y=\sqrt{x+1}\ \xrightarrow{\text{симетрія відносно осі ординат}}\ y=\sqrt{-x+1}\ \xrightarrow{\text{стиск у 3 рази до осі ординат}}\ y=\sqrt{-3x+1}$$

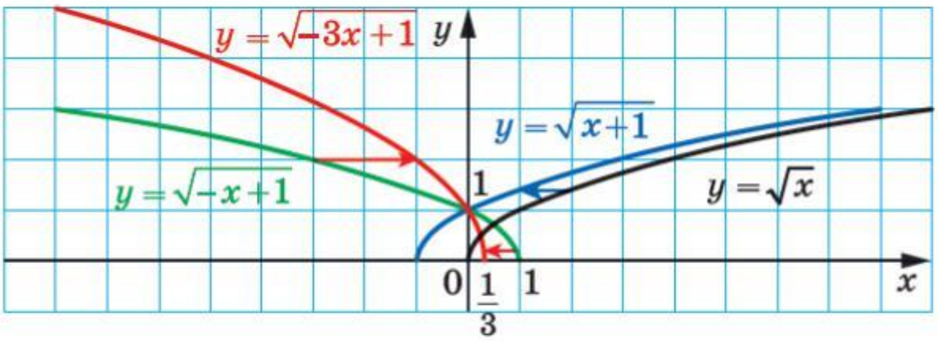


Рис. 35

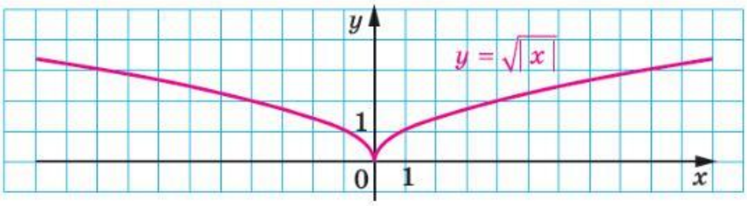
Прилад 3

Побудуйте графік функції $y=\left|\sqrt{|x+1|}-1\right|$.

Розв'язання. Побудову шуканого графіка можна подати за такою схемою (рис. 44):

уліво на 1 од.	униз на 1 од.	симетрія відносно осі абсцис

$y=\sqrt{|x|} \xrightarrow{\text{уліво на 1 од.}} y=\sqrt{|x+1|} \xrightarrow{\text{униз на 1 од.}} y\ \ \sqrt{|x\ \ 1|}\ \ 1 \xrightarrow{\text{симетрія відносно осі абсцис}} y=\left|\sqrt{|x+1|}-1\right|$



а)